

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАЛЬНОСТИ И РАДИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В СРЕДНЕМ И ДАЛЬНОМ КОСМОСЕ МОНОСТАТИЧЕСКОЙ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИЕЙ*

О. В. Чернояров, В. А. Иванов, А. В. Сальникова

Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

Аннотация. Рассмотрена задача определения дальности и радиальной скорости космических аппаратов в среднем и дальнем космосе моностатической радиолокационной станцией по результатам измерения момента приема ретранслированного сигнала, его задержки относительно момента излучения и доплеровского сдвига несущей частоты относительно частоты излучаемого сигнала, а также определения только радиальной скорости по результатам измерения доплеровского сдвига несущей частоты бортового генератора. Установлено, что при одновременном измерении дальности и скорости (активный режим работы) в системе координат станции радиальная скорость измеряется относительно расчетной точки, причем измеренное значение зависит от углового направления на космический аппарат. В пассивном режиме работы (одностороннее излучение) для точного измерения направления и значения компоненты вектора скорости требуется знание координат космического аппарата и модуля его орбитальной скорости.

Ключевые слова: пространственно-временные соотношения, космический аппарат, дальность, скорость, моностатическая радиолокационная станция.

DETERMINING THE RANGE AND THE RADIAL VELOCITY OF SPACE CRAFTS IN THE MIDDLE AND DEEP SPACE BY A MONOSTATIC RADAR

O. V. Chernoyarov, V. A. Ivanov, A. V. Salnikova

Abstract. The problem of determining the range and the radial velocity of space crafts in the middle and deep space by a monostatic radar is considered. The tested determination method is based on the calculations concerning the relayed signal reception moment and its delay relative to both the emission moment and the Doppler shift of the carrier frequency from the emitted signal frequency. The results of the determination of the radial velocity only by calculating the Doppler shift of the onboard generator carrier frequency are also examined. It is established that when the range and the velocity in the station coordinate system (active operation mode) are measured simultaneously, the radial velocity is calculated relative to the target point, while the measured value depends on the angular direction set for the spacecraft. In the passive mode of operation (one-sided emission), to calculate the direction and the components of the velocity vector accurately, one needs a knowledge of the spacecraft coordinates and the scalar of its orbital velocity.

Keywords: space-time relationships, spacecraft, range, velocity, monostatic radar.

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022)

© Чернояров О. В., Иванов В. А., Сальникова А. В., 2022

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задача освоения дальнего космоса становится все более актуальной [1]. Необходимым условием ее решения является надежное навигационно-баллистическое обеспечение полетов дальних космических аппаратов (КА) [2]. Для проведения измерений текущих навигационных параметров движения КА применяются лазерные и радиолокационные средства. Современная методика анализа пространственно-временных соотношений при радиолокационных измерениях параметров движения КА основана на использовании базовых принципов теории относительности [3–5]. В пределах ближнего космоса, как правило, достаточно методологии частной (специальной) теории относительности [4, 5]. Однако для среднего и дальнего космоса [6] может оказаться необходимым использование методики общей теории относительности [3–5].

Основное положение специальной теории относительности состоит в формулировке принципа относительности. При этом важным является определение инерциальной системы как системы, движущейся свободно без каких-либо внешних воздействий (полей тяготения, ускоряющих сил и т. п.). Общая теория относительности рассматривает взаимное движение систем, которые нельзя считать инерциальными. Практические выводы этой теории относятся к движению с постоянным ускорением в поле тяготения или под действием другой ускоряющей силы. Примером такого движения является круговое движение с постоянной угловой скоростью (постоянным тангенциальным ускорением) под действием сил тяготения или за счет жесткой механической связи двух систем.

Как известно [3–5], в двух инерциальных системах, движущихся с относительной скоростью \mathbf{v} , можно ввести системы координат $\{X, Y, Z\}$ и $\{X', Y', Z'\}$ таким образом, чтобы их оси X и X' были параллельны вектору \mathbf{v} . Начало отсчета времени $t = 0$ в каждой из систем можно условно отнести к моменту совмещения плоскостей $\{Y, Z\}$ и $\{Y', Z'\}$. При этом принцип относительности применительно к соотношениям пространства и времени формулируется в виде двух постулатов [4]:

- 1) скорость распространения света в вакууме в каждой из систем неизменна;
- 2) время t' совершения какого-либо события в точке (x', y', z') одной системы связано с временем t и координатами (x, y, z) другой системы преобразованиями Лоренца:

$$t = \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0. \quad (1)$$

Здесь v — алгебраическое значение скорости относительного движения систем, c — скорость света в вакууме, $\beta = v/c$, (y_0, z_0) — координаты точки O' ($x' = 0, y' = 0, z' = 0$) в системе координат $\{X, Y, Z\}$.

Движение реальных физических объектов в пределах солнечной системы в общем случае нельзя считать инерциальным. При этом возможность использования преобразований Лоренца в качестве приближенных соотношений в каждом случае должна оцениваться. Систему $\{X, Y, Z\}$ следует считать инерциальной, если ее движение в координатах другой, заведомо инерциальной, системы равномерно и прямолинейно. При аппроксимации движения тех или иных систем в качестве “заведомо инерциальной” по необходимости приходится принимать систему, связанную с Солнцем, поскольку учет каких бы то ни было внешних воздействий на эту систему все равно невозможен.

Реальными результатами измерения в моностатической РЛС являются момент приема ретранслированного сигнала t_r , его задержка Δt_d относительно момента излучения t_p и доплеровский сдвиг несущей частоты Δf_d относительно частоты излучаемого сигнала f_0 [7]. При этом можно рассматривать два подхода к задачам РЛС:

1) РЛС выдает значения t_r , Δt_d , Δf_d (с доступными поправками на состояние тракта распространения), а интерпретация результатов измерения для оценки параметров движения КА производится на этапе обработки данных;

2) РЛС рассматривается как автономное измерительное средство и выдает значения дальности и радиальной скорости в определенной системе координат и в определенный момент времени.

Первый подход в настоящее время является традиционным при измерении параметров движения в пределах ближнего и среднего космоса и развит как в ряде монографий, так и в практических методиках обработки данных траекторных измерений [8, 9]. В настоящей статье рассмотрен второй подход, который представляется более естественным при формулировке задач радиолокационных средств контроля и траектории и определении требований к их эффективности.

1. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим движение некоторой системы $\mathbf{O}' (X', Y', Z')$ в инерциальной системе $\mathbf{O} (X, Y, Z)$. Закон движения точки O' , которая является началом координат системы \mathbf{O}' , будем считать заданным в виде радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ и вектора скорости $\mathbf{v}(t)$ (рис. 1).

Поскольку движение точки O' в системе координат \mathbf{O} известно, можно установить однозначную связь между показаниями часов, находящихся в начале координат системы \mathbf{O} (точка O) и в точке O' (например, наблюдая из точки O по телевизионному каналу показания часов в точке O' и учитывая известную для каждого момента времени задержку), не прибегая к методике общей теории относительности.

Для установления этой связи рассмотрим последовательные положения точки O' , разделенные достаточно малым интервалом Δt , с тем, чтобы заменить реальный закон движения приближенной полигональной функцией с узлами в точках t_i . Тогда на каждом парциальном интервале Δt систему \mathbf{O}' можно считать инерциальной, причем интервалу Δt в этой системе соответствует интервал

$$\Delta t'_i = \Delta t \sqrt{1 - \beta_i^2}, \quad \beta_i = |\mathbf{v}(t_i)|/c.$$

Следовательно, моменту времени t_n в системе координат \mathbf{O} соответствует момент времени

$$t'_n = t'_0 + \Delta t \sum_{i=0}^n \sqrt{1 - \beta_i^2} \quad (2)$$

в точке O' , где t'_0 — фиксированный временной сдвиг (значение t' при $t = 0$).

Переходя в (2) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$t' = t'_0 + \int_0^t \sqrt{1 - |\mathbf{v}(\tau)|^2/c^2} d\tau. \quad (3)$$

В частности, при круговом движении с постоянной угловой скоростью модуль линейной скорости неизменен: $|\mathbf{v}(t)| = v = const$, и из (3) имеем

$$t' = t'_0 + t\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (4)$$

где β определяется из (1).

Отметим, что в неинерциальной системе в различных фиксированных точках пространства течение времени может быть неодинаковым. В дальнейшем под значением t' всегда понимаются показания часов в начале координат системы \mathbf{O}' (точка O').

Пусть в системе \mathbf{O}' в момент t'_c происходит событие A . Направление осей X', Y', Z' системы \mathbf{O}' задаются, исходя из условий рассматриваемой задачи. Координаты точки совершения события в этой системе обозначим через x', y', z' . Поставим задачу определения параметров t_c, x, y, z того же события в системе \mathbf{O} .

Рассмотрим вспомогательную систему координат $\tilde{\mathbf{O}}' (\tilde{X}', \tilde{Y}', \tilde{Z}')$, полученную поворотом осей $\tilde{X}', \tilde{Y}', \tilde{Z}'$ таким образом, чтобы ось \tilde{X}' совпала с направлением текущего вектора скорости $\mathbf{v}(t)$, соответствующего моменту t'_c , а оси \tilde{Y}', \tilde{Z}' образовывали с \tilde{X}' правую систему координат (рис. 1). Координаты точки события в системе $\tilde{\mathbf{O}}'$ обозначим как $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'$.

Введем также вспомогательную систему $\tilde{\mathbf{O}}$, координатные оси которой получены поворотом осей системы \mathbf{O} и параллельным переносом начала координат в точку $\tilde{\mathbf{O}}'$, соответствующую моменту t'_c , так чтобы для этого момента системы $\tilde{\mathbf{O}}$ и $\tilde{\mathbf{O}}'$ совпали. Для перехода от системы $\tilde{\mathbf{O}}'$ к системе $\tilde{\mathbf{O}}$ примем условно, что при их совпадении время в каждой из систем равно нулю: $\tilde{t}'_0 = \tilde{t}_0 = 0$. При этом, очевидно, момент события A в системе $\tilde{\mathbf{O}}'$ также равен нулю:

$$\tilde{t}'_c = \tilde{t}_0 = 0, \quad (5)$$

а текущее время \tilde{t} в системе $\tilde{\mathbf{O}}$ отличается от текущего времени t в системе \mathbf{O} на величину \bar{t} , соответствующую моменту t'_c в системе \mathbf{O}' .

Для системы $\tilde{\mathbf{O}}$, аналогично (1), можно в этом случае получить

1) время совершения события:

$$\tilde{t}_c = v(\bar{t}) \tilde{x}' / c^2 \sqrt{1 - \beta^2(\bar{t})}, \quad v(\bar{t}) = |\mathbf{v}(\bar{t})| \quad (6)$$

2) пространственные координаты:

$$\tilde{x} = \tilde{x}' / \sqrt{1 - \beta^2(\bar{t})}, \quad \tilde{y} = \tilde{y}', \quad \tilde{z} = \tilde{z}'. \quad (7)$$

В системе \mathbf{O} момент совершения события

$$t_c = \tilde{t}_c + \bar{t}, \quad (8)$$

а пространственные координаты x, y, z определяются по обычным формулам преобразования декартовых координат.

Будем теперь считать, что момент совершения события t_c и координаты точки (x, y, z) заданы в системе \mathbf{O} . Определим те же параметры события t'_c, x', y', z' в системе \mathbf{O}' . Решение задачи может состоять в том, чтобы свести рассмотрение к схеме, представленной на рис. 2, в которой теперь уже необходимо провести переход от известных значений $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ к искомым x', y', z' . Однако, при этом должно выполняться условие (5), т. е. пересчет значения \tilde{t}_c к значению \tilde{t}'_c должен дать нуль:

$$\tilde{t}'_c = (\tilde{t}_c - v(\bar{t}) \tilde{x} / c^2) / \sqrt{1 - \beta^2} = 0 \text{ или } \tilde{t}_c - v(\bar{t}) \tilde{x} / c^2 = 0, \quad (9)$$

где в соответствии с (8)

$$\tilde{t}_c = t_c - \bar{t}. \quad (10)$$

Таким образом, для сведения задачи к схеме, представленной на рис. 2, необходимо подобрать соответствующее значение \bar{t} , определяющее все параметры соотношения (9).

Аналитическое нахождение значения \bar{t} из условия (9) в общем случае невозможно. Итерационное вычисление может быть, в частности, построено по следующей схеме. С учетом (10) перепишем условие (9) в виде

$$I(\bar{t}) = t_c - \bar{t} - v(\bar{t}) x(\bar{t}) / c^2 = 0. \quad (11)$$

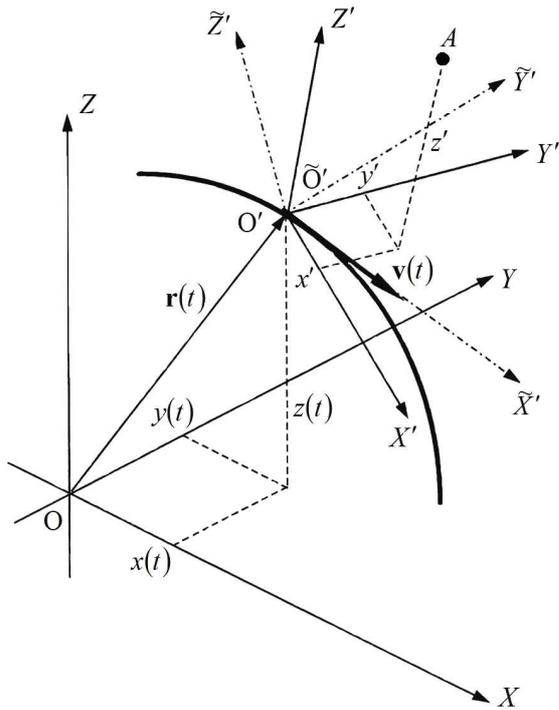


Рис. 1. Движение системы O' в инерциальной системе O .

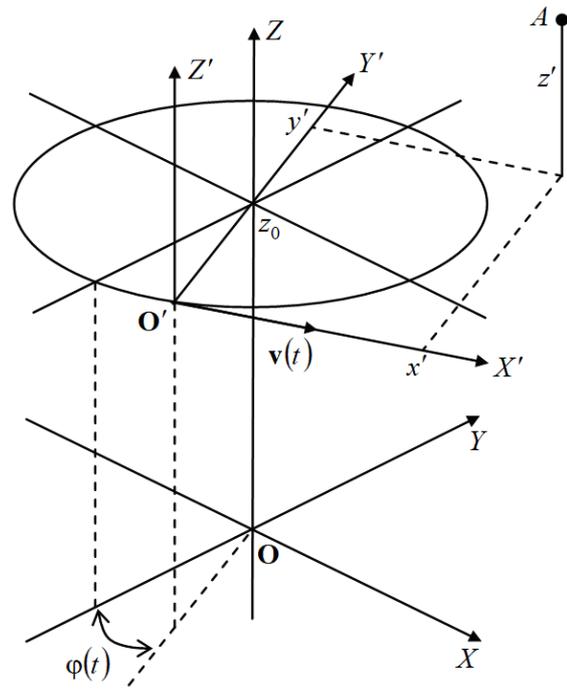


Рис. 2. Взаимосвязь параметров события A в системах O и O' .

На первом шаге итерации ($n = 0$) принимается $\bar{t} = t_c$. Порядок вычислений на n -ом шаге:

$$\hat{t}_n = t_c - \frac{v(\bar{t}_{n-1}) \tilde{x}(\bar{t}_{n-1})}{c^2}, \quad \Delta \bar{t}_n = \frac{I(\hat{t}_n)}{[dI(\bar{t})/d\bar{t}]|_{\bar{t}=\hat{t}_n}}, \quad \bar{t}_n = \hat{t}_n - \Delta \bar{t}_n. \quad (12)$$

Итерации продолжаются до достижения необходимой точности (например, до шага, на котором значение $\Delta \bar{t}_n$ становится соизмеримым с предельной точностью вычислений, обусловленной конечной разрядностью машинного слова). Итерационные вычисления целесообразно использовать, когда все функциональные соотношения, входящие в (12), могут быть выражены аналитически.

Порядок вычислений после выбора значения \bar{t} :

$$\tilde{x}' = (\tilde{x} - v(\bar{t}) \bar{t}_c) / \sqrt{1 - \beta^2(\bar{t})}, \quad \tilde{y}' = \tilde{y}, \quad \tilde{z}' = \tilde{z}. \quad (13)$$

Координаты (x', y', z') точки события в системе O' определяются угловым поворотом осей системы \tilde{O}' , а момент совершения события t'_c соответствует моменту \bar{t} в системе O .

В качестве примера рассмотрим круговое движение с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Z в плоскости $z = z_0$ системы O (рис. 2). При этом для простоты соотношений будем считать, что системы O' и \tilde{O}' совпадают, так что вместо координат \tilde{x}' , \tilde{y}' , \tilde{z}' можно рассматривать непосредственно x' , y' , z' . Приняв в (4) $t'_0 = 0$, получим связь текущего времени в системах O и O' в виде $t' = t\sqrt{1 - \beta^2}$, где $\beta = v/c$, $v = \Omega R$, а R — радиус вращения.

При задании параметров t'_c , x' , y' , z' события A в системе O' для соответствующих параметров в системах \tilde{O} , O можно получить

$$\bar{t} = t'_c / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Угол визирования точки O' в системе O в момент \bar{t} равен

$$\varphi = \Omega \bar{t} = \Omega t'_c / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (14)$$

При этом в соответствии с (6), (7)

$$\tilde{t}_c = vx' / c^2 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \tilde{x} = x' / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \tilde{y} = y', \quad \tilde{z} = z'.$$

С учетом (13) переход от системы \tilde{O} к системе O дает

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cos \varphi - (\tilde{y} - R) \sin \varphi, & y &= \tilde{x} \sin \varphi + (\tilde{y} - R) \cos \varphi, \\ z &= \tilde{z} + z_0, & t_c &= \tilde{t}_c + \bar{t} = (t'_c + vx' / c^2) / \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обратное преобразование координат события A из системы O в систему O' может в этом случае производиться методом итераций. При этом условие (9) принимает здесь вид ($v = const$):

$$t_c - \bar{t} - v \tilde{x} / c^2 = 0.$$

Поскольку из (14), (15) следует, что

$$\tilde{x} = x \cos \Omega \bar{t} + y \sin \Omega \bar{t}, \quad (16)$$

то, подставляя (16) в (11), для \bar{t} получаем соотношение вида

$$I(\bar{t}) = t_c - \bar{t} - v (x \cos \Omega \bar{t} + y \sin \Omega \bar{t}) / c^2 = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) не имеет аналитического решения и может быть решено методом итераций. По аналогии с (12) на первом шаге итерации ($n = 0$) следует принять $\bar{t} = t_c$. Тогда на n -ом шаге имеем

$$\begin{aligned} \hat{t}_n &= t_c - v (x \cos \Omega \bar{t}_{n-1} + y \sin \Omega \bar{t}_{n-1}) / c^2, \\ \Delta \bar{t}_n &= \frac{t - \hat{t}_n - v (x \cos \Omega \bar{t}_n + y \sin \Omega \bar{t}_n) / c^2}{\Omega v (x \sin \Omega \hat{t}_n - y \cos \Omega \hat{t}_n) / c^2 - 1}, \quad \bar{t}_n = \hat{t}_n - \Delta \bar{t}_n. \end{aligned}$$

Дальнейший порядок преобразований следующий:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= -x \sin \Omega \bar{t} + y \cos \Omega \bar{t} + R, & \tilde{t}_c &= \hat{t}_n - \Delta \bar{t}_n, \\ x' &= (\tilde{x} - v \tilde{t}_c) / \sqrt{1 - \beta^2}, & y' &= \tilde{y}, & t' &= \bar{t} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

2. ИЗМЕРЕНИЕ ДАЛЬНОСТИ

2.1. Общие положения

Рассмотрим три системы координат: гелиоцентрическая (инерциальная) система O_g , геоцентрическая (условно “замороженная”) система O_e и система координат станции O_s на поверхности Земли. Начало координат системы O_g совпадает с центром Солнца, а связанные с ней оси координат X_g, Y_g находятся в плоскости эклиптики. Ось Z_e системы O_e направлена из центра Земли к северному полюсу, ось X_e перпендикулярна Z_e в плоскости эклиптики (при этом направление оси X_g выбирается параллельным оси X_e), ось Y_e образует с осями X_e, Z_e правую систему координат. Ось Z_s системы O_s направлена из центра Земли в точку расположения станции, ось X_s коллинеарна с текущим вектором вращения станции вокруг оси Земли, ось Y_s дополняет систему координат до правой.

Обозначим Ω_e, R_e — угловая скорость и радиус вращения Земли вокруг Солнца, Ω_s, R_s — угловая скорость и радиус вращения станции вокруг земной оси. Радиолокационное измерение дальности состоит в определении задержки зондирующего сигнала и привязке результата измерения к некоторому моменту времени. По постановке задачи, определенной в разделе 1, измеренное значение дальности и момент временной привязки результата должны относиться к системе координат станции. При этом должна быть определена методика пересчета результатов измерения в другие системы.

Станция, расположенная на поверхности Земли, совершает сложное трехмерное движение в инерциальной гелиоцентрической системе \mathbf{O}_g . При этом момент излучения, момент приема и пространственные координаты станции различны в каждой из трех систем $\mathbf{O}_s, \mathbf{O}_e, \mathbf{O}_g$. Задачу измерения дальности и временной привязки в системе \mathbf{O}_s можно решать, рассматривая распространение электромагнитной волны в неинерциальной системе. Это распространение будет, очевидно, анизотропным по направлению, что и вызывает рефракцию радиолуча в такой системе. В этой связи удобнее воспользоваться другим способом.

Если пересчитать моменты излучения и приема сигнала станцией и пространственные координаты станции в эти моменты в выбранную инерциальную систему, то в последней решение задачи не представляет затруднений, так как волна здесь распространяется изотропно с групповой скоростью v_g (в предположении изотропности среды распространения). Можно также использовать значение скорости света в вакууме c , а влияние реальной среды распространения учитывать введением соответствующей поправки на задержку. Обратный пересчет результатов, полученных в инерциальной системе, в систему координат станции завершает решение задачи.

Очевидно, что в любой инерциальной системе, в которой задано движение станции, координаты точек излучения и приема не обязательно совпадают, и интервал задержки определяет суммарное расстояние, пройденное радиолучом до КА и обратно. Геометрическое место точек возможного пространственного положения КА представляет собой в этом случае эллипсоид с фокусами в точках излучения и приема, причем каждой точке эллипсоида соответствует свой момент временной привязки (момент “касания” КА зондирующим лучом). Пересчет результатов в систему координат станции определяет новое геометрическое место точек в этой системе и, вообще говоря, новые моменты временной привязки.

2.2. Инерциальное движение Земли

Рассмотрим вначале задачу измерения дальности, полагая систему \mathbf{O}_e инерциальной. При этом гелиоцентрическая система \mathbf{O}_g может не рассматриваться. Радиус вращения точки расположения станции около земной оси R_s определяется ее широтой θ : $R_s = R_l \cos \theta$, где R_l — локальный (местный) радиус Земли. Если принять за нулевой момент времени в обеих системах момент совпадения направления осей X_s, X_e , то движение станции в системе \mathbf{O}_e может быть задано соотношениями (рис. 3):

$$x_{es} = R_s \sin \Omega_s t_e, \quad y_{es} = -R_s \cos \Omega_s t_e, \quad z_{es} = R_l \sin \theta. \quad (18)$$

Пусть в системе \mathbf{O}_e измерены момент приема ответного сигнала $t_r = t_2$ и задержка $\Delta t_d = \Delta t_s$, так что момент излучения $t_p = t_1 = t_2 - \Delta t_s$. Очевидно, что излучение и прием происходят в одной и той же точке O_s ($x_s = 0, y_s = 0, z_s = 0$). Определим пространственные координаты точек излучения и приема и соответствующие моменты времени в системе \mathbf{O}_e . В соответствии с методикой раздела 1, в системе \mathbf{O}_e имеем

$$t_{1e} = t_{1s} / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad t_{2e} = t_{2s} / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \Delta t_e = \Delta t_s / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (19)$$

где $\beta = v/c$ и $v = \Omega_s R_s$.

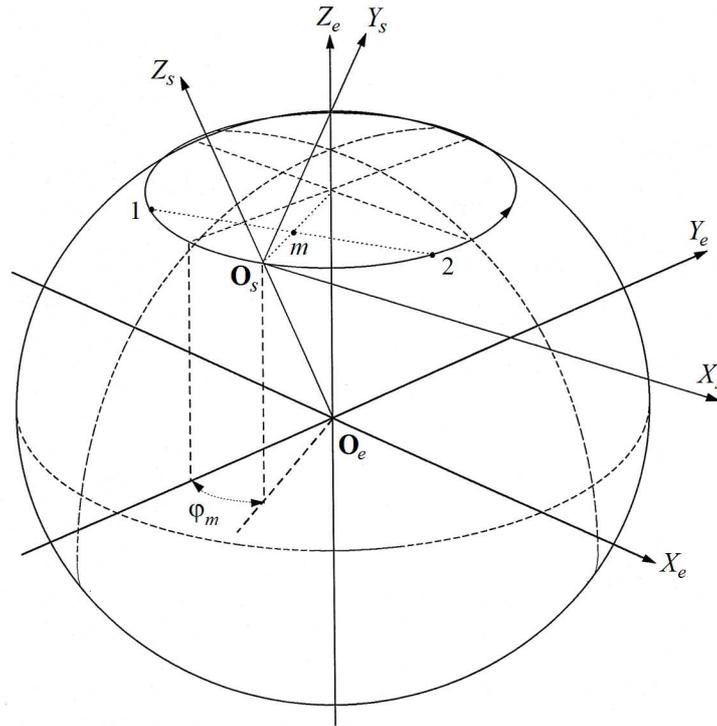


Рис. 3. Гелиоцентрическая система O_e и система координат станции O_s на поверхности Земли.

Вводя углы визирования φ_1 и φ_2 точек излучения и приема в плоскости $z_e = z_{es}$, согласно (18) можем записать

$$\begin{aligned} x_{1e} &= R_s \sin \varphi_1, & x_{2e} &= R_s \sin \varphi_2, & y_{1e} &= -R_s \cos \varphi_1, \\ y_{2e} &= -R_s \cos \varphi_2, & z_{1e} &= z_{2e} = z_{es}. \end{aligned} \quad (20)$$

Принимая $v_g = c$, для суммарного расстояния получаем

$$r = c\Delta t_e. \quad (21)$$

Таким образом, эллипсоид, определяющий возможное положение КА в пространстве, имеет фокусы в точках, соответствующих координатам (20), центр в точке

$$x_{0e} = (x_{1e} + x_{2e})/2, \quad y_{0e} = (y_{1e} + y_{2e})/2, \quad z_{0e} = z_{es},$$

большую и малую полуоси

$$a = r/2, \quad b = \sqrt{(r/2)^2 - R_s^2 \sin^2 (\Omega_s \Delta t_e / 2)}. \quad (22)$$

Момент временной привязки, соответствующий точке эллипсоида с координатами x_e, y_e, z_e , определяется соотношением

$$t_{e0} = t_{1e} + \sqrt{(x_e - x_{1e})^2 + (y_e - y_{1e})^2 + (z_e - z_{1e})^2} / c.$$

Пересчет для каждой точки эллипсоида момента временной привязки t_{e0} и пространственных координат x_e, y_e, z_e из системы O_e в систему O_s , который выполняется аналогично процедуре, представленной в разделе 1, дает сферу радиуса b со смещенным из начала координат

центром, каждой точке которой соответствует свой момент привязки t_{so} . Таким образом, по результатам измерений вообще нельзя говорить о расстоянии от станции до КА в определенный момент времени, так как в зависимости от углов визирования КА эти значения при одних и тех же моментах излучения t_{1s} и приема t_{2s} различны.

Для оценки существенности отмеченного обстоятельства рассмотрим пример измерения, задавшись следующими параметрами:

- локальный радиус $R_l = 6372$ км (средний радиус Земли),
- период вращения Земли $T_s = 24$ часа (86400 с),
- широта расположения станции $\theta = 56^\circ$ (широта Москвы),
- радиус вращения станции $R_s = R_l \cos \theta$,
- расстояние от центра Земли до плоскости вращения $z_{es} = R_l \sin \theta$,
- моменты излучения и приема $t_{1s} = -1000$ с, $t_{2s} = 1000$ с,
- групповая скорость распространения $v_g = c = 3 \cdot 10^5$ км/с.

Результаты расчета дальности R_{so} представлены на рис. 4а в виде графиков зависимости от азимута при фиксированных углах места δ . Кривая 1 соответствует $\delta = 0$, 2 – $\delta = \pi/2 - \theta$, 3 – $\delta = \theta$. На рис. 4б приведены моменты привязки результатов измерения t_{so} , соответствующие тем же угловым направлениям.

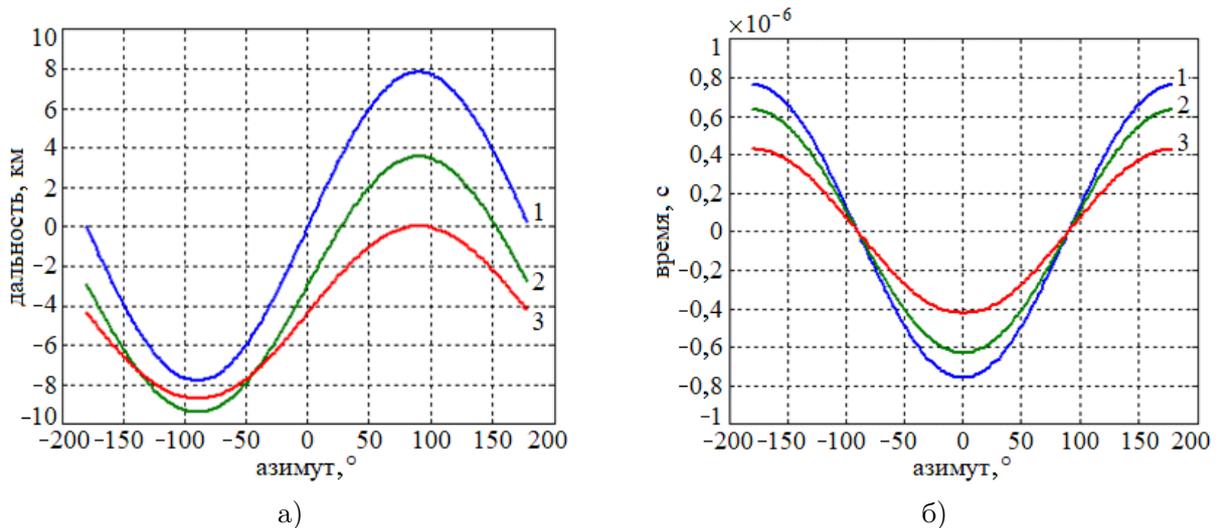


Рис. 4. Зависимость вариаций измеренного расстояния R_{so} от станции до КА (а) и моментов привязки результатов измерения t_{so} (б) от азимута КА (инерциальное движение Земли).

Из рис. 4 следует, что, если изменения момента привязки в различных направлениях можно считать незначительными (рис. 4б), вариации радиальной дальности достигают ~ 17 км (рис. 4а). Для определения фактического расстояния требуется угловое целеуказание с точностью десятых долей угловой минуты. Можно, однако, указать точку m , относительно которой как радиальная дальность, так и момент привязки данных измерения не зависят от углового направления при заданных моментах излучения и приема. Действительно, представим систему \mathbf{O}_m , движущуюся в системе \mathbf{O}_e равномерно и прямолинейно и пересекающую точки излучения 1 и приема 2 в моменты t_{1e} , t_{2e} (рис. 3). Очевидно, что ее скорость в системе \mathbf{O}_e с координатами (19), (20) равна

$$v_m = 2R_s \sin(\Omega_s \Delta t_e / 2) / \Delta t_e.$$

Пересчет точек эллипсоида, определяющего возможное положение КА в системе \mathbf{O}_e , и

соответствующих моментов привязки согласно (22) дает в системе \mathbf{O}_m сферу с радиусом

$$R_m = b = \sqrt{(c\Delta t_e/2)^2 - R_s^2 \sin^2 (\Omega_s \Delta t_e/2)} \quad (23)$$

и неизменный для каждой точки сферы момент привязки t_{mo} . Все значения, входящие в (23), определяются моментом приема t_{2s} и задержкой сигнала Δt_s (19), измеренными в точке расположения станции (20). Таким образом, результат измерения на станции определяет дальность R_m в момент t_{mo} относительно точки m , расположенной в плоскости вращения (X_e, Y_e) и отстоящей от станции на расстояние $d_m = R_s [1 - \cos (\Omega_s \Delta t_e/2)]$ в направлении оси вращения.

Порядок вычисления результатов измерения дальности по данным наблюдения на станции t_{2s} (момент приема), Δt_s (задержка) в общем случае должен быть следующим:

– определение момента временной привязки измеренного значения дальности $t_{mo} = t_{2s} - \Delta t_s/2 = (t_{1s} + t_{2s})/2$;

– определение координат точки привязки дальности x_{sm}, y_{sm}, z_{sm} в системе станции \mathbf{O}_s по алгоритму

$$R_s = R_l \cos \theta, \quad \beta = \Omega_s R_s / c, \quad \Delta t_e = \Delta t_s / \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\Delta \varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)/2 = \Omega_s \Delta t_e / 2 = \Omega_s \Delta t_s / 2 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad x_{sm} = 0,$$

$$y_{sm} = R_s (1 - \cos \Delta \varphi) \sin \theta, \quad z_{sm} = -R_s (1 - \cos \Delta \varphi) \cos \theta,$$

– расчет измеренного значения дальности (23) $R_m = \sqrt{(c\Delta t_e/2)^2 - R_s^2 \sin^2 \Delta \varphi}$.

2.3. Круговое движение Земли

Будем теперь считать, что центр Земли совершает круговое движение около Солнца с постоянной угловой скоростью $\Omega_e = 2\pi/31536000$ рад/с и радиусом $R_e = 1.5 \cdot 10^8$ км, а ось ее собственного вращения перемещается параллельно. При этом в качестве инерциальной следует рассматривать гелиоцентрическую систему \mathbf{O}_g и в расчетах использовать методику раздела 1 для произвольного криволинейного движения (в данном случае — движение системы координат станции \mathbf{O}_s).

Для дальнейшего анализа прежде всего необходимо описать закон движения станции в системе \mathbf{O}_g . Очевидно, что движение станции вокруг земной оси по-прежнему должно быть задано в системе \mathbf{O}_e в соответствии с (18). Для общности рассмотрения дополнительно введем фазу φ_s положения станции в момент $t_e = 0$. При этом соотношение (18) принимает вид

$$x_{es} = R_s \sin (\Omega_s t_e + \varphi_s), \quad y_{es} = -R_s \cos (\Omega_s t_e + \varphi_s), \quad z_{es} = R_l \sin \theta.$$

Удобно также ввести вспомогательную систему координат \mathbf{O}'_e , для которой ось X'_e совпадает с осью X_e системы \mathbf{O}_e , а ось Z'_e перпендикулярна плоскости эклиптики. Если угол отклонения земной оси от нормали к плоскости эклиптики обозначить через ψ , то в системе \mathbf{O}'_e координаты станции определяются как

$$x'_{es} = R_s \sin (\Omega_s t_e + \varphi_s), \quad y'_{es} = -R_s \cos (\Omega_s t_e + \varphi_s) \cos \psi + R_l \sin \theta \sin \psi,$$

$$z'_{es} = R_s \cos (\Omega_s t_e + \varphi_s) \sin \psi + R_l \sin \theta \cos \psi.$$

Полагается, что время в системах \mathbf{O}_e и \mathbf{O}'_e одинаково.

Движение центра Земли в системе \mathbf{O}_g запишем в виде

$$x_{ge} = R_e \sin (\Omega_e t_g + \psi_e), \quad y_{ge} = R_e \cos (\Omega_e t_g + \psi_e), \quad z_{ge} = 0,$$

где ψ_e — фаза положения Земли в момент $t_g = 0$.

Задача пересчета движения станции из системы \mathbf{O}'_e в систему \mathbf{O}_g соответствует рассмотренному в разделе 1 примеру кругового движения в инерциальной системе. При этом под “событием” следует понимать нахождение станции в определенной точке пространства и в определенный момент времени каждой из систем. Связь текущего времени в системах \mathbf{O}'_e (\mathbf{O}_e) и \mathbf{O}_g определяется соотношением $t_e = t_g \sqrt{1 - \beta_e^2}$, где $\beta_e = v_e/c$, $v_e = R_e \Omega_e$ – линейная скорость движения Земли вокруг Солнца.

Следуя методике раздела 1, получим

1) угол визирования центра Земли в системе \mathbf{O}_g в момент t_{es} фиксирования положения станции в системе \mathbf{O}'_e :

$$\varphi = \Omega_e t_{es} / \sqrt{1 - \beta_e^2} + \varphi_e, \quad (24)$$

2) координаты станции во вспомогательной системе $\tilde{\mathbf{O}}'_e$ (в разделе 1 – система $\tilde{\mathbf{O}}'$):

$$\tilde{x}'_{es} = x'_{es} \cos \varphi - y'_{es} \sin \varphi, \quad \tilde{y}'_{es} = x'_{es} \sin \varphi + y'_{es} \cos \varphi, \quad \tilde{z}'_{es} = z'_{es}, \quad (25)$$

3) момент времени во вспомогательной системе $\tilde{\mathbf{O}}_g$ (в разделе 1 – система $\tilde{\mathbf{O}}$):

$$\tilde{t}_{gs} = v_e \tilde{x}'_{es} / c^2 \sqrt{1 - \beta_e^2},$$

4) координаты станции в системе $\tilde{\mathbf{O}}_g$:

$$\tilde{x}_{gs} = \tilde{x}'_{es} / \sqrt{1 - \beta_e^2}, \quad \tilde{y}_{gs} = \tilde{y}'_{es}, \quad \tilde{z}_{gs} = \tilde{z}'_{es}, \quad (26)$$

5) момент времени в системе \mathbf{O}_g :

$$t_{gs} = t_{es} / \sqrt{1 - \beta_e^2} + \tilde{t}_{gs}, \quad (27)$$

6) координаты станции в системе \mathbf{O}_g :

$$\begin{aligned} x_{gs} &= \tilde{x}_{gs} \cos \varphi + (\tilde{y}_{gs} + R_e) \sin \varphi, \\ y_{gs} &= -\tilde{x}_{gs} \sin \varphi + (\tilde{y}_{gs} + R_e) \cos \varphi, \quad z_{gs} = \tilde{z}_{gs}. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, последовательный пересчет $\mathbf{O}_e \rightarrow \mathbf{O}'_e \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}'_e \rightarrow \tilde{\mathbf{O}}_g \rightarrow \mathbf{O}_g$ позволяет связать координаты станции x_{es}, y_{es}, z_{es} в момент t_{es} геоцентрической системы \mathbf{O}_e с координатами станции x_{gs}, y_{gs}, z_{gs} в момент t_{gs} гелиоцентрической системы \mathbf{O}_g .

Далее необходимо определить связь текущего времени t_s на станции (в системе \mathbf{O}_s) с текущим временем t_g в гелиоцентрической системе \mathbf{O}_g . В соответствии с (3) для этого требуется расчет временной зависимости модуля вектора движения станции в системе \mathbf{O}_g . Координаты x_{gs}, y_{gs}, z_{gs} последовательными переходами (24), (25), (26), (28) могут быть непосредственно выражены через время t_{es} в системе \mathbf{O}_e . В свою очередь, связь t_{es} и t_{gs} задается (27). При этом для компонент скорости движения станции v_x, v_y, v_z в системе \mathbf{O}_g можно записать

$$v_x = \frac{dx_{gs}}{dt_{gs}} = \frac{dx_{gs}}{dt_{es}} \frac{dt_{es}}{dt_{gs}}, \quad v_y = \frac{dy_{gs}}{dt_{gs}} = \frac{dy_{gs}}{dt_{es}} \frac{dt_{es}}{dt_{gs}}, \quad v_z = \frac{dz_{gs}}{dt_{gs}} = \frac{dz_{gs}}{dt_{es}} \frac{dt_{es}}{dt_{gs}}, \quad (29)$$

откуда модуль вектора скорости $v_{gs} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Производные (29) могут быть без затруднений вычислены, в связи с чем здесь не приводятся.

Приведенные соотношения позволяют произвести точечные вычисления параметров движения станции в системе \mathbf{O}_g по заданному моменту времени t_{es} в системе \mathbf{O}_e . Однако при расчетах требуется выражение этих параметров непосредственно в виде функции текущего

времени t_g в системе \mathbf{O}_g . Для этого можно воспользоваться подходящей аппроксимацией зависимостей $x_{gs}(t_g)$, $y_{gs}(t_g)$, $z_{gs}(t_g)$, $v_x(t_g)$, $v_y(t_g)$, $v_z(t_g)$, полученных по точечным значениям t_{es} на необходимом интервале времени (например, с помощью степенных многочленов).

Для удобства интегрирования в (3) целесообразно использовать аппроксимацию выражения $J(t_g) = \sqrt{1 - |\mathbf{v}_g(t_g)|^2/c^2} = \sqrt{1 - v_{gs}^2(t_g)/c^2}$. При этом также может быть получена зависимость $t_s(t_g)$ и обратная ей зависимость $t_g(t_s)$.

Если все необходимые соотношения выражены аналитически, то в соответствии с общей методикой раздела 1 моменты излучения t_{1s} и приема t_{2s} станцией могут быть пересчитаны в соответствующие моменты t_{1g} , t_{2g} системы \mathbf{O}_g . Очевидно, что оба эти события происходят в одной и той же точке системы \mathbf{O}_e — начале координат. В системе \mathbf{O}_g точки излучения и приема определяются из полученных на интересующем интервале времени аналитических аппроксимаций радиусами-векторами $\mathbf{r}_{1g} = \mathbf{r}_{gs}(t_{1g})$, $\mathbf{r}_{2g} = \mathbf{r}_{gs}(t_{2g})$.

Как и в случае инерциального движения Земли (подраздел 2.2), полученные данные определяют в системе \mathbf{O}_g геометрическое место точек возможного положения КА в виде эллипсоида вращения с фокусами в точках излучения и приема и суммарным расстоянием $r_g = c(t_{2g} - t_{1g}) = c\Delta t_g$. Большая и малая полуоси подобно (22) определяются выражениями $a = r_g/2$, $b = \sqrt{(r_g/2)^2 - (\Delta r_g/2)^2}$, где Δr_g — расстояние между точками излучения и приема в системе \mathbf{O}_g , а моменты временной привязки точек эллипсоида —

$$t_{go} = t_{1g} + \sqrt{(x_{go} - x_{1g})^2 + (y_{go} - y_{1g})^2 + (z_{go} - z_{1g})^2} / c,$$

где x_{go} , y_{go} , z_{go} — координаты точек эллипсоида.

Аналогично подразделу 2.2 можно ввести условную систему \mathbf{O}_m , движущуюся вдоль большой полуоси эллипсоида со скоростью $v_{gm} = \Delta r_g/\Delta t_g$ и последовательно совпадающую в соответствующие моменты времени с точками излучения и приема, для которой в момент $t_{0g} = (t_{1g} + t_{2g})/2$ совпадения ее начала координат с центром эллипсоида $\mathbf{r}_{0g} = (\mathbf{r}_{1g} + \mathbf{r}_{2g})/2$ геометрическим местом точек возможного положения КА является сфера с радиусом $R_m = b$ и фиксированным моментом привязки результатов измерения t_{mo} . Это и определяет систему координат, в которой рассчитывается дальность по измеренным станцией моментам излучения и приема.

Координаты центра эллипсоида (точка m) по методике раздела 1 могут быть пересчитаны в систему координат станции \mathbf{O}_s , (где “событием” является совпадение начала координат системы \mathbf{O}_m с центром эллипсоида системы \mathbf{O}_g в момент t_{0g}). Расчеты показывают, что эти координаты при одних и тех же моментах t_{1s} , t_{2s} зависят как от времени суток, так и времени года.

На рис. 5 приведены примеры такого расчета в виде параметрических графиков координат x_{sm} , y_{sm} (Рис. 5а) и x_{sm} , z_{sm} (Рис. 5б) точки m в системе станции для задержки $\Delta t_d = 2000$ с. Параметром является текущее суточное время t_s . Звездочками отмечены точки “полдень”. На кривых X , Y ход времени соответствует направлению против часовой стрелки, на кривых X , Z — по часовой стрелке. Графики построены, исходя из расположения станции на широте Москвы, для различных времен года. Сплошные линии соответствуют середине зимы, штриховые — весне или осени (равноденствие), штрих-пунктирные — середине лета. Как можно видеть из рис. 5, начальная точка отсчета дальности по измеренной задержке значительно смещается в зависимости от времени суток и времени года, что является следствием изменения закона движения станции в инерциальной гелиоцентрической системе.

Хотя система \mathbf{O}_s , вообще говоря, не совпадает с системой \mathbf{O}_m , расчеты в оговоренных условиях показывают, что отличие временных моментов привязки результата измерения дальности R_m от значения $t_{0s} = (t_{1s} + t_{2s})/2$ во всех случаях не превышает ~ 1 мкс. Изменение самого значения R_m достоверно не обнаруживается.

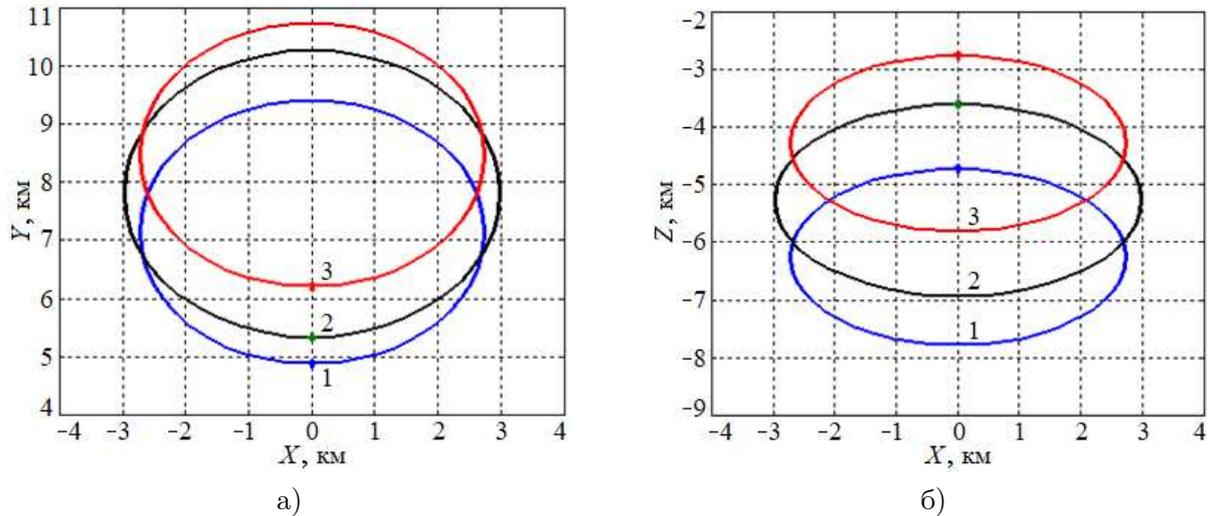


Рис. 5. Параметрические графики координат x_{sm}, y_{sm} (а) и x_{sm}, z_{sm} (б) точки m в системе координат станции для задержки $\Delta t_d = 2000$ с (круговое движение Земли).

3. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ

3.1. Предварительные замечания

Применительно к задаче оценки скорости движения КА в моностатическом радиолокаторе объективным результатом наблюдения является текущее значение несущей частоты принимаемого сигнала. При этом пространственно-временные соотношения в радиоканале должны дать соответствующую трактовку результатов измерения, обычно называемых доплеровским сдвигом частоты. Очевидно, что результат радионаблюдения в этом случае может дать лишь одну из компонент вектора движения. Как правило, говорят о радиальной компоненте, т.е. проекции вектора скорости на радиальное направление относительно станции.

Определение радиальной компоненты вектора скорости по данным измерения доплеровского сдвига частоты однозначно при инерциальном движении станции. Однако необходимо уточнение трактовки результатов измерения для условий радионаблюдения в среднем и дальнем космосе, когда моменты излучения и приема разделены интервалами времени, в течение которых может существенно проявляться неинерциальность системы, связанной со станцией. Ниже приводится одна из возможных трактовок связи между измеренным значением частоты принятого станцией сигнала и компонентами скорости движения КА.

3.2. Доплеровский сдвиг частоты в инерциальной системе при ретрансляции (активный режим)

Пусть в инерциальной системе произвольным образом движется КА с некоторым законом изменения дальности $r(t)$. Станция, расположенная в начале координат системы, излучает гармонический сигнал с частотой ω_0 , так что фаза излучаемого сигнала равна $\varphi_0(t) = \omega_0 t$. Тогда фаза сигнала в точке текущего положения КА допускает представление

$$\varphi_1(t) = \varphi_0(t - \tau_1(t)) = \omega_0 [t - \tau_1(t)], \quad (30)$$

где $\tau_1(t) = r(t)/c$ — текущая задержка сигнала.

Если при ретрансляции производится преобразование частоты в отношении $q = m/n$, то ретранслированный сигнал имеет фазу (с точностью до постоянного сдвига) $\bar{\varphi}_1(t) = q\varphi_1(t)$. В свою очередь фаза принятого станцией сигнала запишется как $\bar{\varphi}_2(t) = \varphi_1(t - \tau_2(t))$, где

$\tau_2(t)$ определяется соотношением

$$\tau_2(t) = r(t - \tau_2(t))/c. \quad (31)$$

Таким образом, принятый станцией сигнал имеет фазу $\bar{\varphi}_2(t) = q\omega_0 [t - \tau_2(t) - r(t - \tau_2(t))/c]$.

Производная фазы (мгновенная частота)

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2(t) &= q\omega_0 [t - \tau_2'(t) - v_r(t - \tau_2(t)) (1 - \tau_2'(t))/c] = \\ &= q\omega_0 [c - v_r(t - \tau_2(t))] [1 - \tau_2'(t)]/c. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь обозначено: $v_r(t)$ — радиальная скорость КА (производная дальности), $\tau_2'(t)$ — производная задержки в канале ретрансляции.

Из (31) находим $\tau_2'(t) = v_r(t - \tau_2(t)) [1 - \tau_2'(t)]/c$, откуда

$$\tau_2'(t) = v_r(t - \tau_2(t))/[c + v_r(t - \tau_2(t))]. \quad (33)$$

В результате после подстановки (33) в (32) получаем

$$\bar{\omega}_2(t) = q\omega_0 [c - v_r(t - \tau_2(t))]/[c + v_r(t - \tau_2(t))]. \quad (34)$$

В соответствии с (34) значение принимаемой частоты в момент времени t определяется радиальной скоростью КА в момент ретрансляции $t_r = t - \tau_2(t)$. Таким образом, при измерении радиальной скорости необходимо знание дальности до КА в момент ретрансляции (31). Требуемая точность знания дальности (задержки в канале ретрансляции) зависит от ожидаемого значения радиального ускорения.

3.3. Доплеровский сдвиг частоты в инерциальной системе при одностороннем излучении (пассивный режим)

Измерение радиальной скорости при одностороннем излучении с борта КА затрудняется неточным знанием исходной частоты бортового сигнала. Однако в ряде случаев при сохранении параметров свободного движения КА (вектора состояния) на значительных отрезках времени влияние отклонений частоты от номинального значения может быть существенно уменьшено при уточнении вектора состояния. Такое исследование было проведено, в частности, при экспериментах с КА “Гранат” [10]. Поэтому рассмотрение пространственно-временных соотношений для этого случая представляет практический интерес.

При одностороннем излучении сигнала необходимо уже рассматривать две независимые системы: инерциальную систему \mathbf{O} , в центре которой расположена приемная станция, и в общем случае неинерциальную систему \mathbf{O}' , связанную с КА. Связь текущего времени t' в системе \mathbf{O}' с текущим временем t в системе \mathbf{O} , заданную соотношением (3), запишем как $t' = T(t)$. При этом текущая фаза бортового гармонического сигнала $\varphi_0(t') = \omega_0 t'$ в системе \mathbf{O} имеет вид $\varphi_1(t) = \varphi_0(T(t)) = \omega_0 T(t)$. Аналогично (30) фаза в точке приема (начало координат \mathbf{O}) равна $\varphi_2(t) = \varphi_1(t - \tau_2(t)) = \omega_0 T(t - \tau_2(t))$, а мгновенная частота — $\omega_2(t) = \omega_0 T'(t - \tau_2(t)) [1 - \tau_2'(t)]$, где $T'(t) = dT(t)/dt$.

Из (3) следует, что $T'(t - \tau_2(t)) = \sqrt{1 - |\mathbf{v}(t - \tau_2(t))|^2/c^2}$, где $|\mathbf{v}(t)|$ — модуль вектора относительной скорости КА в момент времени t . Тогда в соответствии с (33)

$$\omega_2(t) = \frac{\omega_0 c \sqrt{1 - |\mathbf{v}(t - \tau_2(t))|^2/c^2}}{c + v_r(t - \tau_2(t))}. \quad (35)$$

Согласно (35) измерение радиальной скорости в таком режиме предполагает задание модуля орбитальной скорости КА. Последний множитель в числителе (35) отражает так называемый “поперечный эффект Доплера” (сдвиг частоты при $v_r(t) = 0$). Пренебрежение этим множителем формально может привести к существенным ошибкам. Однако в условиях неточного знания частоты ω_0 в отдельных сеансах измерения следует считать допустимым отнесение его в отклонение частоты от номинального значения. Очевидно также, что значение дальности КА (задержки в канале излучения $\tau_2(t)$) должно быть получено из других данных.

3.4. Доплеровский сдвиг частоты в активном режиме работы при круговом движении Земли

Будем говорить о движении двух объектов в некоторой инерциальной системе (например, гелиоцентрической) — измерительной станции и КА. В качестве заданных условий рассмотрения примем двумерную функцию $r(\theta_1, \theta_2)$, определяющую расстояние между точкой положения КА в момент θ_1 и точкой положения станции в момент θ_2 . Заметим, что соответствие функции $r(\theta_1, \theta_2)$ можно поставить временную функцию

$$\tau(\theta_1, \theta_2) = r(\theta_1, \theta_2)/c. \quad (36)$$

При этом в разделах 3.2, 3.3 функция $r(\theta_1, \theta_2)$ вырождается в одномерную, поскольку положение станции принимается неизменным — в начале координат системы.

Если в системе \mathbf{O}_s , связанной со станцией, излучается гармонический сигнал с частотой ω_0 , так что фаза сигнала

$$\varphi_0(t_s) = \omega_0 t_s, \quad (37)$$

то в гелиоцентрической системе \mathbf{O}_g это соответствует частоте

$$\tilde{\omega}_0(t_g) = \omega_0 T'(t_g), \quad (38)$$

где $T'(t_g) = dT(t_g)/dt_g$, а функция $T(t_g)$ устанавливает связь текущих отсчетов времени t_s и t_g :

$$t_s = T(t_g). \quad (39)$$

При этом можно по-прежнему говорить о связи законов изменения фазы сигнала в точках излучения, ретрансляции и приема, учитывая текущие значения задержки сигнала $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ в трактах запроса и ретрансляции, но теперь уже в гелиоцентрической системе, где вместо t_g временно используется обозначение текущего времени t .

При вычислении $\tau_1(t)$ для текущего момента t следует принять $\theta_1 = t$, $\theta_2 = t - \tau_1(t)$. Соответственно, при вычислении $\tau_2(t) - \theta_1 = t - \tau_2(t)$, $\theta_2 = t$. Тогда, принимая во внимание (36)

$$\tau_1(t) = \tau(t, t - \tau_1(t)), \quad \tau_2(t) = \tau(t - \tau_2(t), t). \quad (40)$$

Следующим шагом является определение фаз сигнала $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в точках передачи и приема. Принимая во внимание (36)-(40), для $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ можно записать

$$\varphi_1(t) = \tilde{\omega}_0 [t - \tau_1(t)], \quad \varphi_2(t) = \varphi_1(t - \tau_2(t)). \quad (41)$$

При этом текущая производная фазы в точке приема определится как

$$\tilde{\omega}_2(t) = \varphi_1'(t - \tau_2(t)) [1 - \tau_2'(t)],$$

где из (41) следует $\varphi_1'(t) = \tilde{\omega}_0 [1 - \tau_1'(t)]$.

Для упрощения последующих выражений обозначим

$$\partial_1(t_a, t_b) = \left. \partial\tau(\theta_1, \theta_2)/\partial\theta_1 \right|_{\substack{\theta_1 = t_a \\ \theta_2 = t_b}}, \quad \partial_2(t_a, t_b) = \left. \partial\tau(\theta_1, \theta_2)/\partial\theta_2 \right|_{\substack{\theta_1 = t_a \\ \theta_2 = t_b}}.$$

Поскольку в каждом случае (40) аргументы θ_1, θ_2 (36) являются функциями текущего времени t , следует ввести скорости их изменения $\theta'_1(t) = d\theta_1(t)/dt$, $\theta'_2(t) = d\theta_2(t)/dt$. При этом с учетом (40) можно записать

$$\tau'_1(t) = \partial_1(t, t - \tau_1(t)) \theta'_1(t) + \partial_2(t, t - \tau_1(t)) \theta'_2(t) = \\ = \partial_1(t, t - \tau_1(t)) + \partial_2(t, t - \tau_1(t)) [1 - \tau'_1(t)].$$

Отсюда следует, что

$$\tau'_1(t) = \frac{\partial_1(t, t - \tau_1(t)) + \partial_2(t, t - \tau_1(t))}{1 + \partial_2(t, t - \tau_1(t))}.$$

Аналогично можно получить

$$\tau'_2(t) = \frac{\partial_1(t - \tau_2(t), t) + \partial_2(t - \tau_2(t), t)}{1 + \partial_1(t - \tau_2(t), t)}.$$

Если обозначить $t_2 = t$ — момент приема, $t_0 = t - \tau_2(t)$ — момент ретрансляции, $t_1 = t - \tau_1(t) - \tau_2(t)$ — момент запроса, то в конечном итоге имеем

$$\tilde{\omega}_2(t_2, t_0, t_1) = \tilde{\omega}_0 \frac{1 - \partial_1(t_0, t_1)}{1 + \partial_1(t_0, t_2)} \frac{1 - \partial_2(t_0, t_2)}{1 + \partial_2(t_0, t_1)}. \quad (42)$$

Иначе выражение (42) можно записать в виде

$$\tilde{\omega}_2(t_2, t_0, t_1) = \tilde{\omega}_0 \frac{c - v_a(t_0, t_1)}{c + v_a(t_0, t_2)} \frac{c - v_s(t_0, t_2)}{c + v_s(t_0, t_1)}. \quad (43)$$

Здесь обозначено: $v_a(t_0, t_1)$ — радиальная скорость КА в момент ретрансляции t_0 относительно точки положения станции в момент излучения t_1 , $v_a(t_0, t_2)$ — радиальная скорость КА в момент ретрансляции t_0 относительно точки положения станции в момент приема t_2 , $v_s(t_0, t_1)$ — радиальная скорость станции в момент излучения t_1 относительно точки положения КА в момент ретрансляции t_0 , $v_s(t_0, t_2)$ — радиальная скорость станции в момент приема t_2 относительно точки положения КА в момент ретрансляции t_0 .

Поскольку все функции и переменные рассматриваются в гелиоцентрической системе \mathbf{O}_g , текущие моменты приема и излучения в системах $\mathbf{O}_s, \mathbf{O}_g$ связаны соотношениями (39), т. е.

$$t_{1g} = T^{-1}(t_{1s}), \quad t_{2g} = T^{-1}(t_{2s}). \quad (44)$$

а измеренной на станции частоте $\omega_2(t_{2s})$ соответствует частота $\tilde{\omega}_2(t_{2g}) = \omega_2(t_{2s}) T'(t_{2g})$. Соответственно для момента излучения справедливо равенство $\tilde{\omega}_0(t_{1g}) = \omega_0 T'(t_{1g})$.

3.5. Определение компонент вектора скорости при круговом движении Земли

В соответствии с (43) частота принятого сигнала определяется четырьмя параметрами движения станции и КА в системе \mathbf{O}_g . Эти параметры могут быть трансформированы в более удобную характеристику движения КА в системе \mathbf{O}_g — проекцию вектора скорости на некоторое направление, заданное тремя направляющими косинусами или, иначе, определенную компоненту вектора скорости.

Если ввести отношение $k = \omega_2(t_{2s})/\omega_0$ частот излучаемого и принимаемого станцией сигналов, то соотношение (43) можно представить в виде

$$k = \frac{T'(t_{2g})c - v_a(t_{0g}, t_{1g})c - v_s(t_{0g}, t_{2g})}{T'(t_{1g})c + v_a(t_{0g}, t_{2g})c + v_s(t_{0g}, t_{1g})}.$$

Поскольку движение станции в системе \mathbf{O}_g известно, то для заданного положения КА $\mathbf{r}_{ag} = [x_{ag}, y_{ag}, z_{ag}]$ значения $v_s(t_{0g}, t_{1g})$, $v_s(t_{0g}, t_{2g})$ могут быть вычислены. Действительно, значения $v_a(t_{0g}, t_{1g})$, $v_a(t_{0g}, t_{2g})$ представляют собой проекции вектора скорости КА $\mathbf{v}_{ag} = [v_{xg}, v_{yg}, v_{zg}]$ на направления “станция – КА” в соответствующие моменты времени. Обозначим орты этих направлений как $\mathbf{n}_1(t_{0g}, t_{1g}) = [n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}]$, $\mathbf{n}_2(t_{0g}, t_{2g}) = [n_{x2}, n_{y2}, n_{z2}]$. Тогда, вводя представления

$$\begin{aligned} v_a(t_{0g}, t_{1g}) &= \mathbf{v}_{ag} \mathbf{n}_1(t_{0g}, t_{1g}) = v_{xg}n_{x1} + v_{yg}n_{y1} + v_{zg}n_{z1}, \\ v_a(t_{0g}, t_{2g}) &= \mathbf{v}_{ag} \mathbf{n}_2(t_{0g}, t_{2g}) = v_{xg}n_{x2} + v_{yg}n_{y2} + v_{zg}n_{z2} \end{aligned} \quad (45)$$

и соотношение

$$K = \frac{c - v_a(t_{0g}, t_{1g})}{c + v_a(t_{0g}, t_{2g})} = k \frac{T'(t_{1g})c + v_s(t_{0g}, t_{1g})}{T'(t_{2g})c - v_s(t_{0g}, t_{2g})}, \quad (46)$$

и из (45), (46) имеем

$$v_{xg}(Kn_{x2} + n_{x1}) + v_{yg}(Kn_{y2} + n_{y1}) + v_{zg}(Kn_{z2} + n_{z1}) = c(1 - K). \quad (47)$$

Обозначив $M_g = \sqrt{(Kn_{x2} + n_{x1})^2 + (Kn_{y2} + n_{y1})^2 + (Kn_{z2} + n_{z1})^2}$ и разделив обе части (47) на M_g , получим

$$v_{xg}l_g + v_{yg}m_g + v_{zg}n_g = c(1 - K)/M_g. \quad (48)$$

Левая часть соотношения (48) представляет собой компоненту вектора скорости КА с направляющими косинусами $l_g = (Kn_{x2} + n_{x1})/M_g$, $m_g = (Kn_{y2} + n_{y1})/M_g$, $n_g = (Kn_{z2} + n_{z1})/M_g$, а измеренное значение частоты $\omega_2(t_{2s})$, определяющее эту компоненту, отражено в правой части (48). В векторной форме выражение (48) может быть представлено следующим образом

$$\mathbf{n}_g^+ \mathbf{v}_g = V_g. \quad (49)$$

В дальнейших расчетах будем иметь в виду совместное измерение дальности и скорости, так что моменты излучения t_{1s} и приема t_{2s} фиксируются непосредственно на станции и в соответствии с (44) могут быть пересчитаны в значения t_{1g} , t_{2g} в системе \mathbf{O}_g .

Момент ретрансляции t_{0g} и орты \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 задаются выбором точки на поверхности эллипсоида, определяющего возможные положения КА при фиксированных моментах излучения и приема (см. раздел 2). При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1(t_{0g}, t_{1g}) &= [\mathbf{r}_{go}(t_{0g}) - \mathbf{r}_{gs}(t_{1g})] / |\mathbf{r}_{go}(t_{0g}) - \mathbf{r}_{gs}(t_{1g})|, \\ \mathbf{n}_2(t_{0g}, t_{1g}) &= [\mathbf{r}_{go}(t_{0g}) - \mathbf{r}_{gs}(t_{2g})] / |\mathbf{r}_{go}(t_{0g}) - \mathbf{r}_{gs}(t_{2g})|, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_{go}(t)$, $\mathbf{r}_{gs}(t)$ – радиус-векторы КА и станции в соответствующие моменты времени.

Для пересчета измеряемых компонент вектора скорости из системы \mathbf{O}_g в другие системы необходимо ввести общие соотношения для преобразования скоростей в инерциальных системах. Из преобразования Лоренца (1) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dx'/dt' - v}{1 - (v/c^2)dx'/dt'}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (v/c^2)dx'/dt'}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (v/c^2)dx'/dt'}. \end{aligned} \quad (50)$$

Используя иные обозначения, перепишем (50) в виде

$$v_x = \frac{v'_x - v}{1 - vv'_x/c^2}, \quad v_y = v'_y \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vv'_x/c^2}, \quad v_z = v'_z \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vv'_x/c^2}. \quad (51)$$

В выражениях (50), (51) скорость относительного движения v — алгебраическая величина, т. е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Проведем пересчет направления измеряемой компоненты вектора скорости и ее значения в систему \mathbf{O}_m (см. подраздел 2.3). Последовательный пересчет должен основываться на соотношении (48). Выражая ортогональные компоненты вектора скорости исходной системы через такие же компоненты преобразованной системы, можно получить новое соотношение, соответствующая нормировка которого определит направляющие косинусы измеряемой компоненты в этой системе (левая часть) и ее значение (правая часть).

Порядок преобразования в систему \mathbf{O}_m должен быть следующим.

1) Пересчет соотношения (48) в систему \mathbf{O}_{ge} , связанную с эллипсоидом возможных положений КА и получаемую угловым поворотом и параллельным переносом координатных осей системы \mathbf{O}_g : $\mathbf{v}_g = \mathbf{N}_{ge}^+ \mathbf{v}_{ge}$, где \mathbf{N}_{ge} — матрица углового преобразования координат, \mathbf{v}_{ge} — вектор измеряемой компоненты скорости в системе \mathbf{O}_{ge} ,

$$\mathbf{n}_{ge}^+ \mathbf{v}_{ge} = V_g, \quad \mathbf{n}_{ge} = \mathbf{N}_{ge} \mathbf{n}_g. \quad (52)$$

2) Пересчет соотношения (51) в систему \mathbf{O}_m в соответствии с (50), (52) и учетом того, что скорость движения системы \mathbf{O}_{ge} относительно \mathbf{O}_m отрицательна

$$v_{xge} = \frac{v_{xm} + v_{gm}}{1 + v_{gm}v_{xm}/c^2}, \quad v_{yge} = v_{ym} \frac{\sqrt{1 - \beta_m^2}}{1 + v_{gm}v_{xm}/c^2},$$

$$v_{xm} (n_{xge} - V_g v_{gm}/c^2) + v_{ym} n_{yge} \sqrt{1 - \beta_m^2} + v_{zm} n_{zge} \sqrt{1 - \beta_m^2} = V_g - v_{gm} n_{xge},$$

$$M_m = \sqrt{(n_{xge} - V_g v_{gm}/c^2)^2 + n_{yge}^2 (1 - \beta_m^2) + n_{zge}^2 (1 - \beta_m^2)}, \quad \mathbf{n}_m^+ \mathbf{v}_m = V_m, \quad (53)$$

$$V_m = V_g/M_m, \quad \mathbf{n}_m = M_m^{-1} [n_{xge} - V_g v_{gm}/c^2, n_{yge} \sqrt{1 - \beta_m^2}, n_{zge} \sqrt{1 - \beta_m^2}].$$

Расчеты по формулам (49), (52), (53) показывают, что измеряемая в системе \mathbf{O}_m компонента скорости является радиальной, т. е. ее направление совпадает с линией визирования КА из начала координат системы. Однако значение этой компоненты зависит от выбранного направления. Это объясняется тем, что в инерциальной системе \mathbf{O}_m точки излучения и приема хотя и расположены в начале координат, но имеют производные по времени, так как станция движется в этой системе, причем проекции движения на различные радиальные направления отличаются.

На рис. 6а приведены графики изменения результата измерения радиальной скорости КА для условий, представленных в разделе 2.2, при отсутствии доплеровского сдвига частоты, измеренной на станции ($k = 1$). Аргументом графика является угол в некотором сечении эллипсоида системы \mathbf{O}_g , проходящем через его большую полуось. Время года соответствует середине лета. Кривые 1–4 соответствуют различному времени суток: 1 — полдень, 2 — вечер, 3 — полночь, 4 — утро. Из графиков видно, что измеренное значение радиальной скорости изменяется в пределах ± 45 см/с, что предполагает учет в ходе измерений направления на КА в момент t_{mo} .

Пересчет измеряемой компоненты скорости в систему \mathbf{O}_s , связанную с измерительной станцией, должен производиться на основе общей методики, описанной в разделе 1, для произвольного криволинейного движения в инерциальной системе. Для рассчитанных по этой

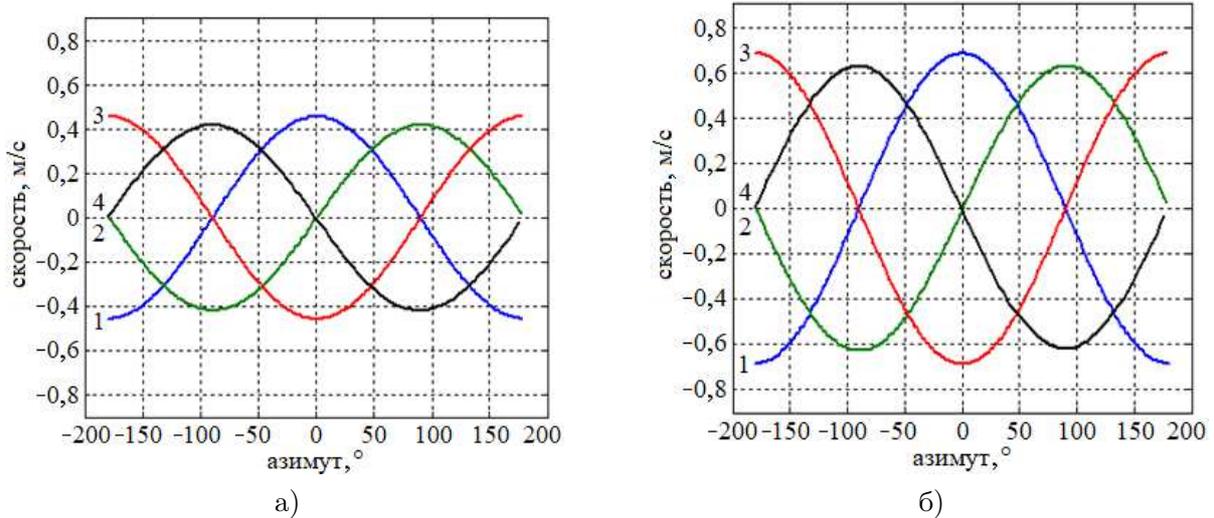


Рис. 6. Зависимость изменения результатов измерения радиальной скорости от направления на КА в системах координат O_m (а) и O_s (б) (круговое движение Земли, активный режим).

методике моментов \bar{t} могут быть использованы соотношения (49), (52), (53), как при преобразовании измеряемой компоненты вектора скорости в инерциальных системах, по схеме $O_g \rightarrow \tilde{O}_g \rightarrow \tilde{O}_s \rightarrow O_s$. Результаты расчета в системе O_s для тех же условий, для которых были выполнены расчеты рис.6а, приведены на рис. 6б.

В системе O_s измеренное значение компоненты скорости меняется уже в пределах ± 68 см/с. При этом она оказывается не радиальной относительно точки положения станции, однако остается практически радиальной относительно точки m в координатах системы O_s .

3.6. Измерение компоненты скорости в пассивном режиме работы при круговом движении Земли

Рассмотрим задачу измерения скорости при одностороннем излучении сигнала с борта КА, полагая по-прежнему заданной функцию $\tau(\theta_1, \theta_2)$ (36). В этом случае в системе O_g должны рассматриваться два момента времени – момент приема сигнала станцией t_2 и момент излучения с борта КА $t_0 = t_2 - \tau_2(t_2)$. Момент приема в системе O_g рассчитывается непосредственно по моменту измерения частоты принятого сигнала на станции. Для определения момента излучения необходимо решение нелинейного уравнения $\tau(t - \tau_2(t), t) = \tau_2(t)$ для задержки $\tau_2(t)$ в тракте передачи.

Обозначим связь текущего времени t_a на излучающем КА с текущим временем t_g в системе O_g в виде $t_a = T_a(t_g)$. В последующих соотношениях текущее время в системе O_g , как и в разделе 3.4, обозначается через t . При этом для фазы излучаемого гармонического сигнала с частотой ω_0 имеем $\varphi_1(t) = \omega_0 T_a(t)$, а для фазы $\varphi_2(t)$ и мгновенной частоты $\tilde{\omega}_2(t)$ принятого станцией сигнала – $\varphi_2(t) = \varphi(t - \tau_2(t)) = \omega_0 T_a(t - \tau_2(t))$ и $\tilde{\omega}_2(t) = \omega_0 T'_a(t - \tau_2(t)) [1 - \tau'_2(t)]$.

Аналогично подразделу 3.3 $T'_a(t - \tau_2(t)) = \sqrt{1 - |\mathbf{v}_a(t - \tau_2(t))|^2 / c^2}$, где $|\mathbf{v}_a(t - \tau_2(t))|$ – модуль вектора скорости КА в системе O_g . В свою очередь, для $\tau'_2(t)$, используя обозначения подраздела 3.4, можно получить

$$\tau'_2(t) = \frac{\partial_1(t - \tau_2(t), t) + \partial_2(t - \tau_2(t), t)}{1 + \partial_1(t - \tau_2(t), t)},$$

Отсюда

$$\tilde{\omega}_2(t_2, t_0) = \omega_0 \frac{c - v_s(t_0, t_2)}{c + v_a(t_0, t_2)} \sqrt{1 - |\mathbf{v}_a(t_2)|/c^2}, \quad (54)$$

где $v_a(t_0, t_2)$ — радиальная скорость КА в момент излучения t_0 относительно точки положения станции в момент приема t_2 , $v_s(t_0, t_2)$ — радиальная скорость станции в момент приема t_2 относительно точки положения КА в момент излучения t_0 .

Частота принятого сигнала в системе \mathbf{O}_g связана с частотой $\omega_2(t_{2s})$, измеренной на станции, соотношением $\tilde{\omega}_2(t_{2g}) = \omega_2(t_{2s}) \Gamma'(t_{2g})$, где $\Gamma'(t_{2g}) = \sqrt{1 - |v_a(t_{2g})|^2/c^2}$. Тогда учетом (54) можно записать

$$K = \frac{c}{c + v_a(t_0, t_2)} = k \frac{c \sqrt{1 - |\mathbf{v}_s(t_2)|^2/c^2}}{[c - v_s(t_0, t_2)] \sqrt{1 - |\mathbf{v}_a(t_0)|^2/c^2}}, \quad k = \omega_2(t_2)/\omega_0,$$

причем значение измеренной компоненты вектора скорости определится как $v_a(t_0, t_2) = c(1 - K)/K$.

Угловое направление компоненты совпадает с направлением из точки положения станции в момент приема t_{2g} в точку положения КА в момент излучения t_{0g} . Пересчет результатов измерения в систему станции \mathbf{O}_s может производиться аналогично раздела 3.5.

В качестве примера ниже приводятся результаты расчета для фиксированного значения задержки в тракте излучения $\tau_2 = 1000$ с, определяющее геометрическое место точек возможного положения КА в системе \mathbf{O}_g в виде сферы радиуса $\sim 3 \cdot 10^8$ км. На рис. 7 показано изменение измеренной компоненты скорости КА относительно станции в центральном сечении сферы, параллельном плоскости XU системы \mathbf{O}_g , при нулевом доплеровском смещении частоты и орбитальной скорости КА $v = 20$ км/с. Аргументом графика служит угол визирования КА в сечении сферы из точки расположения станции в системе \mathbf{O}_g . Время измерения соответствует середине зимы. Цифрами обозначено время суток при проведении измерений: кривая 1 — полдень, 2 — вечер, 3 — полночь, 4 — утро.

Как следует из приведенных графиков, результат измерения компоненты вектора скорости при нулевом сдвиге частоты, измеренном на станции, существенно зависит от угла визирования КА. Направление измеренной компоненты не совпадает с радиальным и, как показывают расчеты, отклонение от радиального направления достигает $\sim 10^{-4}$ рад.

На рис. 8 для тех же угловых направлений приведены графики изменения моментов временной привязки результатов измерения, также показывающие значительную зависимость этих моментов от направления на КА. Проведенное рассмотрение показывает, что в пассивном режиме работы для точного измерения компоненты вектора скорости еще в большей мере необходимо знание координат КА. Кроме того, метод одностороннего излучения требует данных о модуле орбитальной скорости КА.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ пространственно-временных соотношений при криволинейном движении станции в инерциальной гелиоцентрической системе позволяет рассматривать РЛС как автономное измерительное средство, обеспечивающее измерение дальности до КА в определенной системе координат \mathbf{O}_m и отнесение результата измерения к расчетному моменту времени t_{m0} в этой системе. Практически тот же результат будет получен в системе координат \mathbf{O}_s станции для среднего момента времени между излучением и приемом сигнала относительно расчетной точки m , не совпадающей с началом координат (точкой расположения станции)

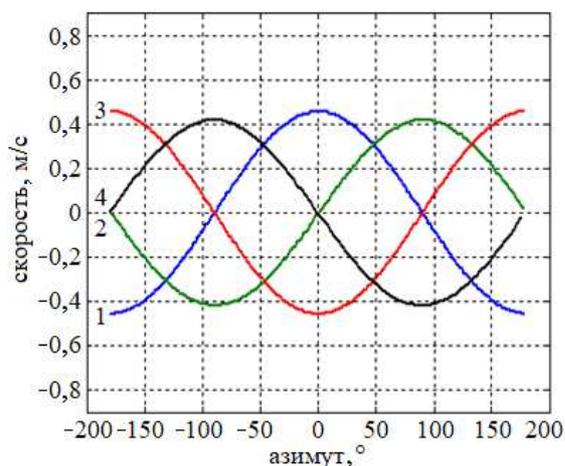


Рис. 7. Зависимости изменения измеренной компоненты скорости КА от угла визирования КА (круговое движение Земли, пассивный режим).

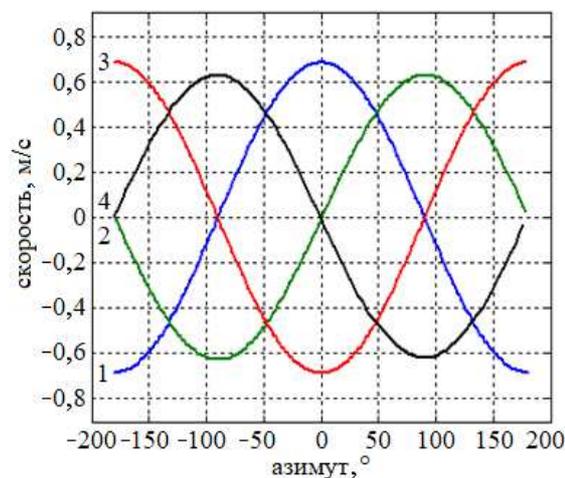


Рис. 8. Зависимость изменения моментов временной привязки от угла визирования КА (круговое движение Земли, пассивный режим).

и изменяющей свое положение при измеренной задержке сигнала на несколько километров в зависимости от времени суток и времени года.

При одновременном измерении дальности и скорости (активный режим работы) в системе O_m определяется радиальная компонента вектора скорости КА, значение которой зависит от угла визирования КА при одном и том же доплеровском сдвиге частоты, измеренном на станции. В системе координат станции измеряется радиальная скорость относительно точки t , причем измеренное значение также зависит от углового направления на КА. В пассивном режиме работы (одностороннее излучение) для точного измерения направления и значения компоненты вектора скорости требуется знание координат и модуля орбитальной скорости КА. Переход к инерциальной гелиоцентрической системе позволяет провести пересчет результата измерения в любую заданную систему.

Следует отметить, что во всех случаях анализа пространственно-временных соотношений время рассматривается как объективная категория. Однако реально отсчеты времени производятся по тем или иным “часам” и, поскольку физические процессы в неинерциальных системах протекают, вообще говоря, иначе, чем в инерциальных, показания различных “часов” (кварцевых, молекулярных) могут отличаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun, Z. Technologies for deep space exploration / Z. Sun. — New York : Springer, 2021.
2. Лысенко, Л. Н. Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов / Л. Н. Лысенко, В. В. Бетанов, Ф. В. Звягин. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014.
3. Carroll, S. An introduction to general relativity: spacetime and geometry / S. Carroll. — Cambridge : Cambridge University Press, 2019.
4. Эйнштейн, А. О специальной и общей теории относительности / А. Эйнштейн. — М. : RUGRAM, 2012.
5. Мицкевич, Н. В. Релятивистская физика. Специальная теория относительности. Общая теория относительности / Н. В. Мицкевич. — М. : Едиториал УРСС, 2020.
6. Радиосистемы межпланетных космических аппаратов / Р. В. Бакитько, М. Б. Васильев, А. С. Веницкий и др. — М. : Радио и связь, 1993.

7. Rothenstein, B. Radar echo, Doppler effect and radar detection in the uniformly accelerated reference frame / B. Rothenstein, S. Popescu, 2016.
8. Жданюк, Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б. Ф. Жданюк. — М. : Сов. радио, 1978.
9. Небесно-механическая интерпретация радиотехнических измерений наклонной дальности и радиальной скорости / А. Г. Тучин и др. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2013. — № 066. — С. 1–30.
10. Определение движения КА “Гранат” по данным измерений радиальной скорости, выполненных беззапросным способом / В. А. Иванов и др. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1997. — № 075. — С. 1–21.

REFERENCES

1. Sun Z. Technologies for deep space exploration. New York: Springer, 2021.
2. Lysenko L.N., Betanov V.V., Zvyagin F.V. Theoretical fundamentals of ballistic and navigation support for space flights. [Lysenko L.N., Betanov V.V., Zvyagin F.V. Teoreticheskie osnovy ballistiko-navigatsionnogo obespecheniya kosmicheskikh poletov]. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2014.
3. Carroll C. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
4. Einstein A. Relativity: the special and general theory. [Ejnshtejn A. O special'noj i obshchej teorii otноситel'nosti]. Moscow, 2012.
5. Mitskevich N.V. Relativistic physics. Special theory of relativity. General theory of relativity. [Mitskevich N.V. Relyativistskaya fizika. Spetsial'naya teoriya otноситel'nosti. Obschaya teoriya otноситel'nosti]. Moscow: URSS, 2020.
6. Bakit'ko R.V., Vasil'ev M.B., Vinitskii A.S. et al. Radio systems of interplanetary spacecraft. [Bakit'ko R.V., Vasil'ev M.B., Vinitskii A.S. et al. Radiosistemy mezhplanetnyh kosmicheskikh apparatov]. Moscow: Radio i Svyaz', 1993.
7. Rothenstein B., Popescu S. Radar echo, Doppler effect and radar detection in the uniformly accelerated reference frame, 2016.
8. Zhdanyuk B.F. Fundamentals of statistical processing of trajectory measurements. [Zhdanyuk B.F. Osnovy statisticheskoi obrabotki traektornyh izmerenii]. Moscow: Sovetskoe Radio, 1978.
9. Tuchin A.G., Komovkin S.V., Lavrenov S.M., Tuchin D.A., Yaroshevskii V.S. Celestial mechanics interpretation of radio measurements of slant range and radial velocity. [Tuchin A.G., Komovkin S.V., Lavrenov S.M., Tuchin D.A., Yaroshevskii V.S. Nebesno-mehanicheskaya interpretatsiya radiotekhnicheskikh izmerenii naklonnoi dal'nosti i radial'noi skorosti]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha — Keldysh Institute preprints*, 2013, no. 066, pp. 1–30.
10. Ivanov V.A., Marin S.F., Meshkov M.N., Sazonov V.V., Sokolov G.A. Determination of the spacecraft “Granat” orbital motion by processing non-interrogative measurements of its radial velocity. [Ivanov V.A., Marin S.F., Meshkov M.N., Sazonov V.V., Sokolov G.A. Opredelenie dvizheniya KA “Granat” po dannym izmerenii radial'noi skorosti, vypolnennyh bezzaprosnym sposobom]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha — Keldysh Institute preprints*, 1997, no. 075, pp. 1–21.

Черноярлов Олег Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета "МЭИ", Москва, Российская Федерация

E-mail: chernoyarovov@mpei.ru

Тел.: +7(495) 362-71-68

Chernoyarov Oleg Vyacheslavovich, Doctor in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor at the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University "MPEI", Moscow, Russian Federation

E-mail: chernoyarovov@mpei.ru

Tel.: +7(495) 362-71-68

Иванов Владимир Алексеевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Учебно-исследовательского центра "Лаборатория навигационных систем" Национального исследовательского университета "МЭИ", Москва, Российская Федерация

E-mail: ivanovva@mpei.ru

Тел.: +7(495) 362-71-68

Ivanov Vladimir Alekseevich, Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher at the Training and Research Center "Laboratory of Navigation Systems" of the National Research University "MPEI", Moscow, Russian Federation

E-mail: ivanovva@mpei.ru

Tel.: +7(495) 362-71-68

Сальникова Александра Валериевна, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета "МЭИ", Москва, Российская Федерация

E-mail: salnikovaav@mpei.ru

Тел.: +7(495) 362-71-68

Salnikova Aleksandra Valerievna, postgraduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University "MPEI", Moscow, Russian Federation

E-mail: salnikovaav@mpei.ru

Tel.: +7(495) 362-71-68