

УДК 621.391

**ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ  
СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА  
С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ  
И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ ПРИНИМАЕМОГО НА ФОНЕ  
УЗКОПОЛОСНЫХ ПОМЕХ И ГАУССОВСКОГО  
БЕЛОГО ШУМА**

**П. А. Трифонов, Т. Т. Доан, Н. Н. Ахмад**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.

**Аннотация.** В статье выполнен синтез и анализ максимально правдоподобного алгоритма обнаружения сверхширокополосного сигнала (СШПС) с неизвестными моментами появления и исчезновения на фоне узкополосных помех и гауссовского белого шума. Найдены точные статистические характеристики синтезированного алгоритма — вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска сигнала.

**Ключевые слова:** моменты появления и исчезновения, максимальное правдоподобие, узкополосная помеха, сверхширокополосный сигнал, марковский случайный процесс, уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова.

**EXACT FORMULA FOR CALCULATION OF STATISTICAL  
CHARACTERISTICS OF DETECTION OF  
ULTRA-WIDEBAND SIGNAL WITH UNKNOWN TIMES OF  
APPEARANCE AND DISAPPEARANCE RECEIVED  
AGAINST NARROW-BAND INTERFERENCE AND  
GAUSSIAN WHITE NOISE**

**P. A. Trifonov, T. T. Doan, N.N. Ahmad**

**Abstract.** The efficiency of the functioning of the maximum likelihood algorithm for detecting an ultra-wideband signal (UWBSS) with unknown moments of appearance and disappearance against the background of narrow-band noise and Gaussian white noise is considered. The exact statistical characteristics of the synthesized detection algorithm are found — the probability of false alarm and the probability of missing a signal.

**Keywords:** appearance and disappearance moments, likelihood, narrowband interference, ultra-wideband signal, Markov random process, Fokker – Planck – Kolmogorov equations.

В последние годы в радиофизике и её приложениях широкое применение находят сверхширокополосные сигналы (СШПС), которые могут обеспечить высокую информативность и устойчивость функционирования РЭС в сложной сигнально-помеховой обстановке, что не раз обсуждалась в литературе [1, 2].

---

© Трифонов П. А., Доан Т. Т., Ахмад Н. Н., 2022

В реальной радиоэлектронной обстановке многие параметры сигнала могут быть неизвестны, поэтому рассмотрим задачу оценки эффективности обнаружения СШПС с неизвестными моментами появления и исчезновения [3].

В ранее опубликованных работах [4] и т. д., рассмотрена задача обнаружения СШПС неизвестной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения на фоне узкополосных помех и гауссовского белого шума. Синтезированы квазиравдоподобные (КП) алгоритмы обнаружения, однако незнание моментов появления и исчезновения приводит к снижению эффективности обнаружения. В [5] используется способ преодоления априорной неопределенности путем адаптации приёмного устройства к неизвестным моментам появления и исчезновения. Формулы в этих работах для определения эффективности обнаружения были получены приближенно.

Цель данной работы: найти точные формулы для оценки эффективности алгоритма обнаружения СШПС с неизвестными моментами появления и исчезновения принимаемого на фоне узкополосных помех и гауссовского белого шума.

Пусть на интервале наблюдения  $[0, T]$  подлжит обнаружению СШПС

$$s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} f(t), \theta_1 \leq t \leq \theta_2, \\ 0, t < \theta_1, t > \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — соответственно моменты его появления и исчезновения, которые могут принимать значения из априорных интервалов

$$\theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}]. \quad (2)$$

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  в случае наличия сигнала (гипотеза  $H_1$ ) наблюдается реализация:  $H_1 : x(t) = s(t, \theta_1, \theta_2) + n(t) + \xi(t)$ , а в случае отсутствия сигнала (гипотеза  $H_0$ ):  $H_0 : x(t) = n(t) + \xi(t)$ . Здесь  $n(t)$  — реализация ГУП с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а  $\xi(t)$  — узкополосная помеха с корреляционной функцией  $B_\xi(t_2 - t_1)$  и спектральной плотностью

$$G_\xi(\omega) = \sum_{i=1}^K \frac{\gamma_i}{2} \left[ I\left(\frac{\omega_{0i} - \omega}{\Omega_i}\right) + I\left(\frac{\omega_{0i} + \omega}{\Omega_i}\right) \right], \quad (3)$$

где  $\omega_{0i}$  — центральная частота,  $\Omega = \int_0^\infty G_\xi^2(\omega) d(\omega) / \max G_\xi^2(\omega)$  — эквивалентная полоса частот,  $\gamma$  — величина спектральной плотности узкополосных помех (интенсивность),  $I(x) = \begin{cases} 1, |x| < 1/2, \\ 0, |x| > 1/2. \end{cases}$

Для синтеза приёмного устройства при наличии априорной неопределенности о моментах исчезновения, появления и форме сигнала можно воспользоваться методом квазиравдоподобного обнаружения (КПО) [3, 4, 5]. Приёмник КПО должен формировать случайную величину  $L_0 = L(\theta_1, \theta_2)$ , где

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(t) [x(t) - g(t)/2] dt \quad (4)$$

— логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП).

Блок-схему КП обнаружителя (4) можно изобразить в виде рис. 1.

Решение о наличии или отсутствии сигнала может быть основан на критерии отношения правдоподобия.

$$L(\theta_1, \theta_2) \begin{matrix} \geq h, \\ \text{---} H_1 \\ < h, \\ \text{---} H_0 \end{matrix} \quad (5)$$

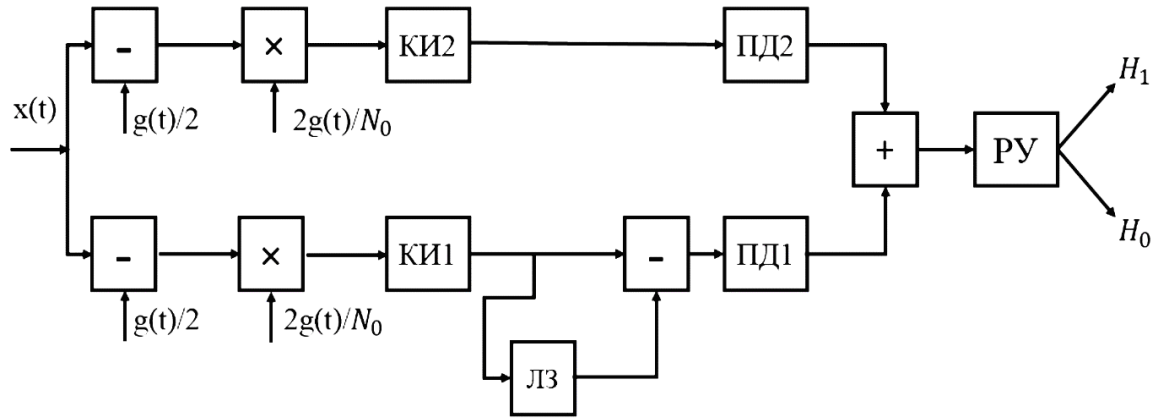


Рис. 1. Часть блок-схему КП обнаружителя.

где  $h$  — порог, определяемый исходя из выбранного критерия оптимальности обнаружения. Поскольку  $L$  (5) является гауссовской случайной величиной, для вероятностей ошибки 1-го рода (ложной тревоги)  $\alpha_1$  и ошибки 2-го рода (пропуска сигнала)  $\beta_1$  можно записать [6, 7]

$$\alpha = P(L_1 > h | H_0) = 1 - \Phi((h - m_0)/\sigma_0) = 1 - P_0(h),$$

$$\beta = P(L_1 < h | H_1) = 1 - \Phi((h - m_1)/\sigma_1) = 1 - P_1(h), \quad (6)$$

здесь  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$  — интеграл вероятности, а

$$m_i = \langle L_1 | H_i \rangle, \quad \sigma_i^2 = \langle (L_1 - m_i)^2 | H_i \rangle \quad (7)$$

— математическое ожидание и дисперсия случайной величины (6), в случае, когда верна гипотеза  $H_i (i = 0, 1)$  [6].

Используя (6), (7) вероятность пропуска сигнала запишем как

$$\beta = \Phi \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \text{arc}\Phi(1 - \alpha) - z \right], \quad (8)$$

где

$$z^2 = (m_1 - m_0)^2 / \sigma_1^2 \quad (9)$$

— отношение сигнал – шум (ОСШ) по мощности на выходе обнаружителя (4).

Предположим, что формы принятого и опорного сигналов совпадают  $f(t) = g(t)$ , тогда на основе принятой реализации  $x(t)$  на выходе приемника максимального правдоподобия (МП) [3, 5] формируется величина

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t) [x(t) - f(t)/2] dt \quad (10)$$

для всех возможных значений моментов появления и исчезновения (2). Решение в пользу одной из гипотез выносится в результате сравнения

$$L = \sup_{\substack{H_1 \\ \geq \\ H_0}} L(\theta_1, \theta_2) \stackrel{H_1}{\geq} h. \quad (11)$$

Будем полагать, что интервал наблюдения  $[0, T]$  удовлетворяет условию  $0 \leq \theta_{1 \min} \leq \theta_{2 \max} \leq T$ , так что сигнал (1) полностью размещается в этом интервале.

Рассмотрим случай, когда ГУП отсутствует, тогда моменты случайной величины (4) представим в виде

$$m_i = \frac{2a_i}{N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad a_i = 0, 1, \quad (12)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt = z^2. \quad (13)$$

При наличии на входе приемника ГУП моменты случайной величины (4) запишем как

$$m_i = \frac{2a_i}{N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (14)$$

$$\sigma_0^2 = \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [n(t) + \sum_{i=1}^K \xi_i(t)] f(t) dt \right\}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt + \sum_{i=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{4}{N_0^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\xi_i(t_1) \xi_v(t_2)) f(t_1) \times f(t_2) dt_1 dt_2 = z^2 + \sigma_\xi^2, \quad (15)$$

где  $z$  — ОСШ при приеме СШПС (1) на фоне только белого шума, а

$$\sigma_\xi^2 = \frac{4}{N_0^2} \sum_{i=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{i\xi}(t_2 - t_1) f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 \quad (16)$$

— составляющая дисперсии случайной величины (7), обусловленная действием ГУП.

Подставляя (15) и (13) в (9), получим ОСШ на выходе обнаружителя (4) при воздействии узкополосных помех

$$z_1^2 = z^4 / (z^2 + \sigma_\xi^2) = z^2 / \chi. \quad (17)$$

Параметр

$$\chi = z^2 / z_1^2 = 1 + \sigma_\xi^2 / z^2, \quad (18)$$

показывает снижение эффективности обнаружения СШПС вследствие воздействия ГУП.

Подставляя (13) и (16) в (18), параметр  $\chi$  можно переписать как

$$\chi = 1 + \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{i\xi}(t_2 - t_1) f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 / \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \quad (19)$$

Используя спектральное представление, можно переписать (19) как

$$\chi = 1 + \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^K \int_0^{\infty} G_i(\omega) |S(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (20)$$

Трудностей аппаратной реализации МП алгоритма частично удастся избежать, если представить логарифм ФОП (10) в виде суммы [7, 8]  $L_1(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_1(\theta_2)$  двух случайных процессов. Первый из них зависит только от момента появления  $\theta_1$ , а второй — только

от момента исчезновения  $\theta_2$ :

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t) [x(t) - f(t)/2] dt, \quad (21)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t) [x(t) - f(t)/2] dt, \quad (22)$$

где  $\theta$  — произвольная точка, принадлежащая интервалу  $(\theta_{1, \max}, \theta_{2, \min})$ .

Согласно выражениям (21), (22) функции  $L_1(\theta_1)$  и  $L_2(\theta_2)$  статистически независимы, так как представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах  $(\theta_1, \theta)$  и  $(\theta, \theta_2)$ . Тогда (11) можно представить в виде  $L = L_1 + L_2$

$$L_1 = \sup L_1(\theta_1), \quad L_2 = \sup L_2(\theta_2). \quad (23)$$

Здесь  $L_1$  и  $L_2$  — статистически независимые случайные величины [7, 8].

В силу статистической независимости случайных процессов  $L_1(\theta_1)$  (21) и  $L_2(\theta_2)$  (22) положение максимума случайного поля  $L_1(\theta_1, \theta_2)$  по переменной  $\theta_1$  совпадает с положением максимума случайного процесса  $L_1(\theta_1)$  а по переменной  $\theta_2$  — с положением максимума  $L_2(\theta_2)$ . В результате для ОМП моментов появления и исчезновения можно записать  $\theta_{im} = \arg \sup L_i(\theta_i) \theta_i \in [\theta_{i, \min}, \theta_{i, \max}]$ .

Представление логарифма ФОР в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов позволяет найти эффективность МП алгоритма обнаружения СШПС с неизвестными моментами появления и исчезновения, и точные характеристики случайной величины (4). Для полного статистического описания логарифма ФОР представим случайные величины (9) в виде:

$$S_i(\theta_i) = \langle L_i(\theta_i) \rangle = a_i S_i(\theta_{0i}, \theta_i) - S_i(\theta_i, \theta_i)/2, \quad (24)$$

а корреляционные функции

$$B_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = \chi S_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}), \quad (25)$$

где использованы обозначения

$$S_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (26)$$

$$S_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt. \quad (27)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$Q(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\chi N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt \quad (28)$$

— ОСШ на входе приемника при приеме сигнала с моментом появления  $\theta_1$  и моментом исчезновения  $\theta_2$ . Пусть  $f(t)$  может обращаться в нуль только на части интервала  $[\theta_1, \theta_2]$ , имеющей нулевую меру. Тогда  $Q(\theta_1, \theta)$  — монотонно убывающая функция от  $\theta_1$ , а  $Q(\theta, \theta_2)$  — монотонно

возрастающая функция от  $\theta_2$ . Использование ОСШ (28) позволяет переписать функции (26), (27) в виде

$$S_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \chi \min [Q(\theta_{11}, \theta), Q(\theta_{21}, \theta)], \quad (29)$$

$$S_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \chi \min [Q(\theta, \theta_{12}), Q(\theta, \theta_{22})]. \quad (30)$$

Перейдем в выражении (21) от  $\theta_1$  к новой переменной  $\lambda_1 = Q(\theta_1, \theta)$ ,  $\lambda_1 \in [\lambda_{1 \min}, \lambda_{1 \max}]$ ,  $\lambda_{1 \min} = Q(\theta_{1 \max}, \theta)$ ,  $\lambda_{1 \max} = Q(\theta_{1 \min}, \theta)$ , а в выражении (22) — от  $\theta_2$  к новой переменной  $\lambda_2 = Q(\theta_2, \theta)$ ,  $\lambda_2 \in [\lambda_{2 \min}, \lambda_{2 \max}]$ ,  $\lambda_{2 \min} = Q(\theta_{2 \min}, \theta)$ ,  $\lambda_{2 \max} = Q(\theta_{2 \max}, \theta)$ . Тогда для случайных процессов (21), (22) можно записать

$$L_i(\lambda_i) = L_i(Q_i(\lambda_i)) = \mu_i(\lambda_i) = a_i \min(\lambda_{0i}, \lambda_i) - \lambda_i/2 + \nu_i(\lambda_i), \quad (31)$$

где  $Q_1(\lambda_1)$  — решение уравнения  $\lambda_1 = Q(\theta_1, \theta)$  относительно  $\theta_1$ ,  $\lambda_{01} = Q(\theta_{01}, \theta)$ ,  $Q_2(\lambda_2)$  — решение уравнения  $\lambda_2 = Q(\theta_2, \theta)$  относительно  $\theta_2$ ,  $\lambda_{02} = Q(\theta_{02}, \theta)$ ,  $\nu_i(\lambda_i)$  — статистически независимые гауссовские случайные процессы, для которых

$$\langle \nu_i(\lambda_i) \rangle = 0, \langle \nu_i(\lambda_{1i}) \nu_i(\lambda_{2i}) \rangle = \chi \min(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}). \quad (32)$$

Согласно (31), (32) процессы  $\mu_i(\lambda_i)$  являются статистически независимыми гауссовскими марковскими случайными процессами с коэффициентами сноса и диффузии [9]

$$k_{1i} = \begin{cases} a_i - 1/2, \lambda_{1, \min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{0i}, \\ -1/2, \lambda_{0i} \leq \lambda_i \leq \lambda_{i, \max}, \end{cases} \quad k_{2i} = \chi. \quad (33)$$

Используя марковские свойства случайных процессов  $\mu_i(\lambda_i)$  [7, 8], можно найти характеристики синтезированных МП алгоритмов.

Используя представление логарифма ФОП в виде суммы статистически независимых случайных процессов (21), (22), получаем, что

$$P_0(c) = P [L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2) < h | H_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{20}(h - x) dF_{10}(x), \quad (34)$$

$$P_1(c) = P [L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2) < h | H_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{21}(h - x) dF_{11}(x), \quad (35)$$

$$F_{ij}(x) = P [\sup L_i(\theta_i) < u, \theta_{i, \min} \leq \theta_i \leq \theta_{i, \max} | H_j] = \\ = P [\sup \mu_i(\lambda_i) < u, \lambda_{i, \min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{i, \max} | H_j] \quad (36)$$

— функции распределения величин абсолютных максимумов процессов  $L_i(\theta_i)$  [8].

Рассмотрим вначале функцию  $F_{i0}(u)$   $a_i = 0$ , т. е. сигнал отсутствует в принятой реализации, для которой аналогично [3, 8, 10] можно записать

$$F_{i0}(u) = \int_{-\infty}^u W_i(y, \lambda_{i, \max}) dy, \quad (37)$$

где  $W_i(y, \lambda_i)$  — решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial W_i(y, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial}{\partial y} [k_{1i} W_i(y, \lambda_i)] - \frac{1}{2} [k_{2i} W_i(y, \lambda_i)] = 0 \quad (38)$$

с коэффициентами сноса  $k_{1i}$  и диффузии  $k_{2i}$  (14) при начальном условии

$$W_i(y, \lambda_{i, \min}) = \exp \left[ -(y + \lambda_{i, \min}/2)^2 / 2\chi\lambda_{i, \min} \right] / \sqrt{2\pi\chi\lambda_{i, \min}} \quad (39)$$

$$W_i(y, \lambda_{i, \min}) = \frac{\exp [y/2\chi - (\lambda_i - \lambda_{i, \min})/8\chi]}{\sqrt{2\pi\chi(\lambda_i - \lambda_{i, \min})}} \times \int_0^\infty \frac{\exp [-(u - \xi - \lambda_{i, \min}/2)^2 / 2\chi\lambda_{i, \min}]}{\sqrt{2\chi\pi\lambda_{i, \min}}} \times \\ \times \exp(-\xi/2\chi) \times \left[ \exp \left( -\frac{(y - \xi)^2}{2\chi(\lambda_i - \lambda_{i, \min})} \right) - \exp \left( -\frac{(y + \xi)^2}{2\chi(\lambda_i - \lambda_{i, \min})} \right) \right] d\xi. \quad (40)$$

Подставляя  $\lambda_i = \lambda_{i, \max}$  в (40), а затем (40) в выражение (37), получаем

$$F_{i0}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\chi\pi\lambda_{i, \min}}} \int_0^\infty \exp [-(u - \xi - \lambda_{i, \min}/2)^2 / 2\chi\lambda_{i, \min}] \times \varphi(\chi, \lambda_{i, \max} - \lambda_{i, \min}, \xi) d\xi, \quad (41)$$

где

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Phi \left( \frac{\sqrt{y_2}}{2\sqrt{y_1}} + \frac{y_3}{\sqrt{y_1 y_2}} \right) - \exp \left( -\frac{y_3}{y_1} \right) \Phi \left( \frac{\sqrt{y_2}}{2\sqrt{y_1}} - \frac{y_3}{\sqrt{y_1 y_2}} \right), \quad (42)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  – интеграл вероятности. Подставляя функции (41) в выражение (34), а затем (34) в (5), находим точное выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha = 1 - \frac{1}{4\sqrt{\pi}\chi z_{\min}^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi_1 + \xi_2 - h - z_{\min})}{\sqrt{\chi z_{\min}}} \exp \left[ -\frac{(\xi_1 + \xi_2 - h - z_{\min}^2)^2}{4\chi z_{\min}^2} \right] \times \\ \times \varphi(\chi, \eta_1, \xi_1) \varphi(\chi, \eta_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (43)$$

где  $z_{\min}^2 = Q(\theta_{1, \max}, \theta_{2, \min})$ ,  $\eta_i = Q(\theta_{i, \max}, \theta_{i, \min})$ .

Перейдем теперь к определению вероятности пропуска сигнала (1), полагая, что  $a_i = 1$ , т. е. сигнал присутствует в принятой реализации. Рассмотрим функции  $F_{i1}(u)$ ,  $i = 1, 2$ , для которых аналогично [3, 8, 10] можно записать

$$F_{i1}(u) = \int_{-\infty}^u W_i(y, \lambda_{i, \max}) dy, \quad (44)$$

где  $W_i(y, \lambda_{i, \max})$ , а  $W_i(y, \lambda_i)$  – решения уравнения (21) при  $i = 1, 2$  с коэффициентами сноса  $k_{1i}$  и диффузии  $k_{2i}$  при начальном условии

$$W_i(y, \lambda_{i, \min}) = \exp \left[ -(y - \lambda_{i, \min}/2)^2 / 2\chi\lambda_{i, \min} \right] / \sqrt{2\pi\chi\lambda_{i, \min}}. \quad (45)$$

Задавая нулевые граничные условия  $W_i(y = u, \lambda_i) = W_i(y = -\infty, \lambda_i) = 0$ ,  $\lambda_i \in [\lambda_{i, \min}, \lambda_{i, \max}]$ , решая уравнение ФПК методом отражения с переменной знака [9], получаем при  $\lambda_i \geq \lambda_{0i}$

$$W_i(y, \lambda_{i, \min}) = \frac{\exp [y/2\chi - (\lambda_i - \lambda_{0i})/2\chi - (\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})/2\chi]}{2\pi\chi\sqrt{2\pi\chi\lambda_{i, \min}(\lambda_i - \lambda_{0i})(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})}} \times \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \exp \left( -\frac{(y - \xi_1^*)^2}{2\chi(\lambda_i - \lambda_{0i})} \right) - \exp \left( -\frac{(y + \xi_1^*)^2}{2\chi(\lambda_i - \lambda_{0i})} \right) \right] \times \left[ \exp \left( -\frac{(\xi - \xi_1^*)^2}{2\chi(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})} \right) - \right. \\ \left. - \left( -\frac{(\xi + \xi_1^*)^2}{2\chi(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})} \right) \right] \times \exp \left[ -(u - \xi - \lambda_{i, \min}/2)^2 / 2\chi\lambda_{i, \min} + \frac{\xi - 2\xi_1^*}{2\chi} \right] d\xi d\xi_1^*. \quad (46)$$

Подставляя  $\lambda_i = \lambda_{i, \max}$  в (46), а затем (46) в выражение (37), получаем

$$F_{i1}(u) = \frac{\exp[-(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})/2\chi]}{2\pi\chi\sqrt{\lambda_{i, \min}(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(u - \xi - \lambda_{i, \min}/2)^2/2\chi\lambda_{i, \min} + \frac{\xi - \xi_1^*}{2\chi}\right] \times \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_1^*)^2}{2\chi(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})}\right) - \left(-\frac{(\xi + \xi_1^*)^2}{2\chi(\lambda_{0i} - \lambda_{i, \min})}\right) \right] \varphi(\chi, \lambda_{i, \max} - \lambda_{0i}, \xi_1^*) d\xi. \quad (47)$$

Подставляя далее функции (47) в формулу (35), а затем (35) в (6), получаем точное выражение для вероятности пропуска

$$\beta = \frac{1}{8\pi\chi^2 z_{\min} \sqrt{2\pi\chi\mu_1\mu_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi_1 + \xi_3 - h + 2z_{\min}^2)^2}{4\chi z_{\min}^2}\right] \times \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{2\chi\mu_1}\right) - \left(-\frac{(\xi_1 + \xi_2)^2}{2\chi\mu_1}\right) \right] \varphi(\chi, m_1, \xi_2) \times \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{(\xi_3 - \xi_4)^2}{2\chi\mu_2}\right) - \left(-\frac{(\xi_3 + \xi_4)^2}{2\chi\mu_2}\right) \right] \varphi(\chi, m_2, \xi_4) (\xi_1 + \xi_3 - h) \times \\ \times \exp[(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)/2\chi] \exp[-(\mu_1 + \mu_2)/2\chi] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \quad (48)$$

где  $m_1 = Q(\theta_{1 \min}, \theta_{01})$ ,  $m_2 = Q(\theta_{02}, \theta_{2 \max})$ ,  $\mu_1 = Q(\theta_{01}, \theta_{1 \max})$ ,  $\mu_2 = Q(\theta_{2 \min}, \theta_{02})$ ,  $z_{\min}^2 = Q(\theta_{1, \max}, \theta_{2, \min})$ .

Таким образом, найдены точные выражения для характеристик алгоритмов обнаружения СШПС произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения. Полученные результаты позволяют исследовать влияние формы СШПС на эффективность его обнаружения в различных условиях сигнально-помеховой обстановки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радзиевский, В. Г. Обработка сверхширокополосных сигналов и помех / В. Г. Радзиевский, П. А. Трифонов. — М. : Радиотехника, 2009. — 288 с.
2. Иммореев, И. Я. Сверхширокополосная локация: основные особенности и отличия от традиционной радиолокации / И. Я. Иммореев // Электромагнитные волны и электронные системы. — 1997. — Т. 2, № 1.
3. Трифонов, А. П. Приём сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин. — Воронеж, 2017. — 202 с.
4. Трифонов, П. А. Методика оценки степени влияния гауссовских узкополосных помех на эффективность обнаружения сверхширокополосных сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения при наличии гауссовского белого шума / П. А. Трифонов, Т. Т. Доан // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 2. — С. 30–39.
5. Трифонов, А. П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными формой и моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 43–53.
6. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М. : Сов. радио, 1985. — 320 с.
7. Трифонов, А. П. Точные формулы для расчета характеристик приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Пробл. передачи информ. — 2009. — Т. 45, вып. 2. — С. 91–100.
8. Трифонов, А. П. Оптимальный прием сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Пробл. передачи информ. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 52–71.



9. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Радио и связь, 1977.
10. Трифонов, А. П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами / Теория обнаружения сигналов / А. П. Трифонов. — М. : Радио и связь, 1984. — С. 12–89.
11. Бакут, П. А. Теория обнаружения сигналов / П. А. Бакут. — М. : Сов. радио, 1984. — 440 с.

## REFERENCES

1. Radzievsky V.G., Trifonov P.A. Processing of ultra-wideband signals and interference. [Radziyevskiy V.G., Trifonov P.A. Obrabotka sverkhshirokopolosnykh signalov i pomekh]. Moscow, 2009, 288 p.
2. Immoreev I.Ya. Ultra-wideband location: main features and differences from traditional radar. [Immoreyev I.YA. Sverkhshirokopolosnaya lokatsiya: osnovnyye osobennosti i otlichiya ot traditsionnoy radiolokatsii]. *Elektromagnitnyye volny i elektronnyye sistemy — Electromagnetic waves and electronic systems*, 1997, vol. 2, no. 1.
3. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Reception of signals with unknown moments of appearance of disappearance. [Trifonov A.P., Korchagin YU.E. Priyom signalov s neizvestnymi momentami poyavleniya ischeznoeniya]. Voronezh, 2017, 202 p.
4. Trifonov P.A., Doan T.T. A technique for estimating the degree of influence of Gaussian narrow-band interference on the detection efficiency of ultra-wideband signals with unknown moments of appearance and disappearance in the presence of Gaussian white noise. [Trifonov P.A., Doan T.T. Metodika ocenki stepeni vliyaniya gaussovskikh uzkopolosnykh pomekh na effektivnost' obnaruzheniya sverhshirokopolosnykh signalov s neizvestnymi momentami poyavleniya i ischeznoeniya pri nalichii gaussovskogo belogo shuma]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 2, pp. 30–39.
5. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Quasi-plausible detection of signals with unknown shape and times of appearance and disappearance. [Trifonov A.P., Korchagin YU.E. Kvazipravdopodobnoe obnaruzhenie signalov s neizvestnymi formoj i momentami poyavleniya i ischeznoeniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 43–53.
6. Tikhonov V.I. Optimum signal reception. [Tihonov V.I. Optimal'nyj priem signalov]. Moscow, 1985, 320 p.
7. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Exact formulas for calculating the reception characteristics of a signal with unknown moments of appearance and disappearance. [Trifonov A.P., Korchagin YU.E. Tochnye formuly dlya rascheta harakteristik priema signala s neizvestnymi momentami poyavleniya i ischeznoeniya]. *Problems of information transmission — Problemy peredachi informacii*, 2009, vol. 45, iss. 2, pp. 91–100.
8. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Optimal reception of a signal with unknown times of appearance and disappearance. [Trifonov A.P., Korchagin YU.E. Optimal'nyj priem signala s neizvestnymi momentami poyavleniya i ischeznoeniya]. *Problems of information transmission — Problemy peredachi informacii*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 52–71.
9. Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tihonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy]. Moscow: Radio and communications, 1977.
10. Trifonov A.P. Detection of signals with unknown parameters / Theory of signal detection. [Trifonov A.P. Obnaruzhenie signalov s neizvestnymi parametrami / Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow: Radio and communications, 1984, pp. 12–89.
11. Bakut P.A. Signal Detection Theory. [Bakut P.A. Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow, 1984, 440 p.

*Трифонов Павел Андреевич, доктор технических наук, доцент, профессор каф. радиоп физики ВГУ, Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: bk\_123@bk.ru*

*Trifonov Pavel Andreevich, doctor of technical sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Radiophysics of Voronezh State University. Voronezh, Russian Federation  
E-mail: bk\_123@bk.ru*

*Доан Тхе Туан, аспирант каф. радиоп физики ВГУ, Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: doanhetuan30071996@gmail.com*

*Doan The Tuan, graduate student of the Department of Radiophysics of Voronezh State University. Voronezh, Russian Federation  
E-mail: doanhetuan30071996@gmail.com*

*Насим Надим Ахмад, адъюнкт, ВУНЦ ВВС “ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Российская федерация  
E-mail: nasimakhtad@yandex.ru*

*Nasem Nadem Ahmad, adjunct, MESC AF “N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, Voronezh, Russian federation  
E-mail: nasimakhtad@yandex.ru*