УДК 517.95

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. А. Рахимова

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики

Поступила в редакцию 01.04.2022 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию полной разрешимости и доказательству теоремы о существования и единственности ограниченных решений переопределенных систем двух линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Рассматривается квазилинейная переопределенная система уравнений в частных производных. Методами теории функций и функционального анализа для этой системы устанавливается единственность ограниченного решения в пространстве $C(R^2)$.

Ключевые слова: квазилинейная, переопределенная система, сжимающее отображение, ограниченное решение.

QUASILINEAR OVERDETERMINED SYSTEMS OF TWO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

M. A. Rahimova

Abstract. The article is devoted to the study of the complete solvability and proof of the theorem on the existence and uniqueness of bounded solutions of overdeveloped systems of two linear partial differential equations. A quasilinear overdetermined system of partial differential equations is considered. Methods of the theory of functions and functional analysis for this system the uniqueness of a bounded solution in space $C(R^2)$ is established.

Keywords: quasilinear, overdetermined system, compressing display, bounded.

1. ВВЕДЕНИЕ

Переопределенные системы уравнений в частных производных используются при моделировании различных физических процессов. Такие системы используются при исследовании задач теории упругости, теории электромагнитного поля и гидродинамики. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат Л. Г. Михайлову [1–2]. Вслед за этим появился ряд работ, близкие к работам Л. Г. Михайлова, изучались преопределенные системы с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами. Полученные им результаты затем развивались и обобщались Н. Раджабовым [4].

В этой работе доказывается существование и единственность ограниченных решений переопределенных систем уравнений в частных производных в пространстве $C(R^2)$. Метод доказательства основан на принцип сжимающих отображений [5]. В работе систематически используется специальное интегральное преобразование теорема Фубини о перестановке порядка интегрирования [5].

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть задана квазилинейная переопределенная система линейных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} u_x = au + f(x,y,u), \\ u_y = bu + g(x,y,u), \end{cases} \tag{1}$$

где a, b — постоянные, функции f, g определены и непрерывны в R^3, ограниченны по x, y и существуют частные производные f_y, g_x, f_u, g_u принадлежащие $L_{1,loc}(R^3)$. Для этой системы исследуем задачу существования и единственности решения в пространстве $C(R^2)$.

Для нахождения решения переопределенных систем предполагаются выполненными условия полной разрешимости. Необходимым и достаточным условием вполне интегрируемости системы (1) является условие Фробениуса.

Если $u = u(x,y)$ является решением системы (1), тогда определяя смешанные производные имеем

$$\begin{cases} u_{xy} = au_y(x,y) + f_y(x,y,u) + f_u(x,y,u) \cdot u_y(x,y), \\ u_{yx} = bu_x(x,y) + g_x(x,y,u) + g_u(x,y,u) \cdot u_x(x,y). \end{cases}$$

Подставляя из (1) выражения для первых частных производных с учетом соотношение $u_{xy} = u_{yx}$, получаем

$$(bf_u - ag_u)u + f_y - g_x + (a + f_u)g - (b + g_u)f = 0 \quad \forall (x,y,u) \in R^3. \tag{2}$$

Формула вида (2) является условием совместности системы (1). Пусть условие (2) выполняется, тогда для системы (1) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2) и хотя бы одно из следующих условий:*

1. $a \neq 0$ и функция $f(x,y,u)$ равномерно по x, y, удовлетворяет условию Липшица по переменной u

$$|f(x,y,u_1) - f(x,y,u_2)| \leqslant K|u_1 - u_2|, \tag{3}$$

где $K > 0$ не зависит от x, y, u_1, u_2, причем $K < |a|$;

2. $b \neq 0$ и функция $g(x,y,u)$ равномерно по x, y, удовлетворяет условию Липшица по переменной u

$$|g(x,y,u_1) - g(x,y,u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|,$$

где $L > 0$ не зависит от x, y, u_1, u_2, причем $L < |b|$. Тогда система (1) имеет единственное ограниченное на R^2 решение и такое решение имеет вид

$$u(x,y) = \begin{cases} -\int\limits_x^{+\infty} f[\xi,y,u(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\, d\xi & \text{в случае} \quad a > 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{x} f[\xi,y,u(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\, d\xi & \text{в случае} \quad a < 0, \\ -\int\limits_y^{+\infty} g[x,\eta,u(x,\eta)]e^{b(y-\eta)}\, d\eta & \text{в случае} \quad b > 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{y} g[x,\eta,u(x,\eta)]e^{b(y-\eta)}\, d\eta & \text{в случае} \quad b < 0. \end{cases}$$

Доказательство. В настоящей работе используются результаты приведенные в работе [3]. Рассмотрим случай 1) с учетом того, что $a > 0$. По условию теоремы для каждой ограниченной на R^2 функции $u(x,y)$ существует несобственный интеграл $J = \int\limits_x^{+\infty} f[\xi,y,u(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\, d\xi$ (см. [3]). Этот интеграл равномерно сходится по x и y, так как функция f ограниченна по переменным x, y и существует такая постоянная $M > 0$, что $|f[\xi,y,u(\xi,y)]| \leqslant M \ \forall (x,y) \in R^2$. Следовательно, для каждого $r > x$ имеем

$$\left|\int\limits_x^r f[\xi,y,u(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\, d\xi\right| \leqslant M \int\limits_x^r e^{a(x-\xi)}\, d\xi = \frac{M}{a}\big[1 - e^{a(x-r)}\big].$$

Пусть $C(R^2)$ банахово пространство ограниченных на R^2 функций с нормой $\|u\| = \underset{(x,y)\in R^2}{sup}|u(x,y)|$.

Для $u \in C(R^2)$ предположим

$$Fu = -\int_x^{+\infty} f[\xi,y,u(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\,d\xi.$$

Этот нелинейный оператор действует в пространстве $C(R^2)$. Покажем, что этот оператор является сжимающим. Для $u_1,u_2 \in C(R^2)$ в соответствии с неравенством (3) для любых $(x,y) \in R^2$, получим

$$|Fu_1 - Fu_2| = \left|\int_x^{+\infty}\{f[\xi,y,u_1(\xi,y)] - f[\xi,y,u_2(\xi,y)]\}e^{a(x-\xi)}\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\int_x^{+\infty}\big|u_1(\xi,y) - u_2(\xi,y)\big|e^{a(x-\xi)}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant K\sup_{(x,y)\in R^2}\big|u_1(x,y)] - u_2(x,y)\big|\cdot\int_x^{+\infty}e^{a(x-\xi)}\,d\xi = \frac{K}{a}\big\|u_1 - u_2\big\|_{C(R^2)}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\big\|Fu_1 - Fu_2\big\| \leqslant \frac{K}{a}\big\|u_1 - u_2\big\| \quad \forall u_1,u_2 \in C(R^2).$$

Поскольку $0 < \frac{K}{a} < 1$, то выходит, что оператор $F : C(R^2) \to C(R^2)$ является сжимающим. В силу принципа сжимающих отображений (см. [5]) $\vartheta = \vartheta(x,y) \in C(R^2)$ единственная неподвижная точка оператор F, т.е. нелинейное интегральное уравнение

$$u(x,y) = -\int_x^{+\infty} f[\xi,y,u(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\,d\xi \tag{4}$$

в пространстве $C(R^2)$ имеет единственное решение $\vartheta(x,y)$.

Можно показать, что функция $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет системе (1). В самом деле, из равенства

$$\vartheta(x,y) = -\int_x^{+\infty} f[\xi,y,\vartheta(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\,d\xi \quad \forall (x,y) \in R^2$$

с учетом непрерывности функции f и равномерной сходимости несобственного интеграла J имеем

$$\vartheta_x(x,y) = f[x,y,\vartheta(x,y)] - a\int_x^{+\infty} f[\xi,y,\vartheta(\xi,y)]e^{a(x-\xi)}\,d\xi$$

или

$$\vartheta_x(x,y) = a\vartheta(x,y) + f[x,y,\vartheta(x,y)] \quad \forall (x,y) \in R^2$$

т. е. функция $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет первому уравнению системы (1). Докажем, что $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет и второму уравнению системы (1). В начале исследуем, что существует непрерывная частная производная ϑ_y.

Предполагая $h \neq 0$ и $w_h(x,y) = \frac{1}{h}[\vartheta(x,y+h) - \vartheta(x,y)]$. Действительно $w_h \in C(R^2)$ и

$$\frac{\partial w_h}{\partial x} = aw_h + f_h, \tag{5}$$

где

$$f_h = \frac{1}{h}\{f[x,y+h,\vartheta(x,y+h)] - f[x,y,\vartheta(x,y)]\}.$$

Таким образом, функция $w_h(x,y)$ как функция переменной x при каждом $h \neq 0$ и y является ограниченным на R решением уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial x} = aw + f_h.$$

Поскольку $a > 0$ и f_h ограниченно, то единственное и ограниченное на R решение этого уравнения имеет вид [3]

$$w_h = -\int\limits_x^{+\infty} f(\xi,y)e^{a(x-\xi)}\, d\xi.$$

Следовательно

$$\left|w_h(x,y)\right| \leqslant \frac{1}{a} \sup_{(x,y)\in R^2} |f_h(x,y)|. \tag{6}$$

Оценим $\left|f_h(x,y)\right|$. Имеем

$$\left|f_h(x,y)\right| \leqslant \frac{1}{h}\left|f[x,y+h,\vartheta(x,y+h)] - f[x,y+h,\vartheta(x,y)]\right| +$$

$$+\frac{1}{h}\left|f[x,y+h,\vartheta(x,y)] - f[x,y,\vartheta(x,y)]\right|$$

Для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства используем неравенство (3), второе слагаемое представим в интегральной форме. Тогда имеем

$$\left|f_h(x,y)\right| \leqslant K\left|w_h(x,y)\right| + \left|\frac{1}{h}\int\limits_y^{y+h} f_y[x,\eta,\vartheta(x,\eta)]d\eta\right|. \tag{7}$$

С учетом неравенство (6), получим

$$\sup_{(x,y)\in R^2} |w_h(x,y)| \leqslant \frac{K}{a} \sup_{(x,y)\in R^2} |w_h(x,y)| + \frac{1}{a} \sup_{(x,y)\in R^2} |f_y(x,\eta,\vartheta(x,\eta))|$$

или

$$\sup_{(x,y)\in R^2} |w_h(x,y)| \leqslant \frac{1}{a-K} \sup_{(x,y)\in R^2} |f_y(x,\eta,\vartheta(x,\eta))|.$$

Это неравенство показывает, что семейство функций $\{w_h\}$ является равномерно ограниченным. Равномерная ограниченность семейства производных $\left\{\frac{dw_h}{dx}\right\}$ следует из неравенства (7) и равенства (5), а эта влечет за собой равностепенную непрерывность семейства $\{w_h\}$. Поэтому в силу теоремы Арцела семейство $\{w_h\}$ предкомпактное.

Равенство (5) перепишем в виде

$$\frac{\partial w_h}{\partial x} = [a + \alpha_h(x,y)]w_h + \beta_h(x,y), \tag{8}$$

где

$$\alpha_h(x,y) = \int\limits_0^1 f_u[x,y+h,s\vartheta(x,y+h)+(1-s)\vartheta(x,y)]dy,$$

$$\beta_h(x,y) = \frac{1}{h}\int\limits_y^{y+h} f_y[x,\eta,\vartheta(x,\eta)]d\eta.$$

Проинтегрируем равенство (8):

$$w_h(x,y) - w_h(0,y) = \int\limits_0^x \{[a+\alpha_h(t,y)]w_h(t,y) + \beta_h(x,y)\}dt.$$

Переходя к пределу при $n_i \to \infty$ из этого равенство при $h = h_{n_i}$ имеем

$$w(x,y) - w(0,y) = \int\limits_0^x \{[a + f_u(t,y,\vartheta(t,y))]w(t,y) + f_y[t,y,\vartheta(t,y)]\}dt.$$

Отсюда следует, что функция $w(x,y)$ дифференцируема по x и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = (a + f_u[x,y,\vartheta(x,y)])\omega(x,y) + f_y[x,y,\vartheta(x,y)]. \tag{9}$$

Из неравенства (3) имеем $|f_u[x,y,u]| \leqslant K \quad \forall u \in R$. Следовательно

$$a + f_u[x,y,\vartheta(x,y)] \geqslant a - K > 0 \quad \forall (x,y) \in R^2.$$

Таким образом (см. [3]), функция $w(x,y)$ является единственным в пространстве $C(R^2)$ решением уравнение (9).

Поэтому, пределом любой сходящейся на каждом компакте последовательности из семейства $\{w_h\}$ будет функция $w(x,y)$.

Таким образом, мы установили, что функция $\vartheta(x,y)$ дифференцируема по y и $\vartheta_y(x,y) = w(x,y)$. Теперь проверим, что $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет второму уравнению системы (1).

Рассмотрим ограниченную на R^2 функцию

$$\varphi(x,y) = \vartheta_y - b\vartheta - g(x,y,\vartheta).$$

Эта функция будет решением однородного уравнения соответствующего уравнению (9). Ввиду того, что $\vartheta(x,y)$ удовлетворяет первому уравнению системы (1), получим

$$\varphi_x = \vartheta_{yx} - b\vartheta_x - g_x - g_u\vartheta_x = a\vartheta_y + f_u\vartheta_y - ba\vartheta - bf - ag_u\vartheta - fg_u + f_y - g_x.$$

Далее

$$(a + f_u[x,y,\vartheta(x,y)])\varphi(x,y) = a\vartheta_y - ab\vartheta - ag + f_u\vartheta_y - bf_u\vartheta - f_u g.$$

Таким образом

$$\varphi_x - (a + f_u[x,y,\vartheta(x,y)])\varphi(x,y) = -bf - ag_u\vartheta - fg_u + f_y - g_x + ag + bf_u\vartheta + f_u g =$$

$$= (bf_u - ag_u)\vartheta + f_y - g_x + (a + f_u)g - (b + g_u)f = 0$$

в силу условия (2). С учетом того, что $a + f_u[x,y,\vartheta(x,y)] \geqslant a - K > 0$, выше указанное однородное уравнение в $C(R^2)$ имеет только нулевое решение, поэтому $\varphi(x,y) \equiv 0$, т.е. $\vartheta_y - b\vartheta - g(x,y,\vartheta) \equiv 0$.

Следовательно, функция $\vartheta(x,y) \in C(R^2)$ является решением системы (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2) и хотя бы одно из условий* 1) *или* 2)*. Тогда ограниченное на всей плоскости решение системы (1) является единственной.*

Доказательство. В теореме 1 было доказано существование ограниченного решения. Докажем единственность решения в $C(R^2)$ при выполнении условия 1) и $a > 0$. Из первого уравнения системы (1) с учетом того что функция $\vartheta_1(x,y) \in C(R^2)$ является решением этой системы получим

$$\vartheta_1(x,y) = e^{ax}\left[\vartheta_1(0,y) + \int\limits_0^x f\big[\xi,y,\vartheta_1(\xi,y)\big]e^{-a\xi}d\xi\right].$$

Поскольку $a > 0$, то из ограниченности функции $\vartheta_1(x,y)$ при $x \to +\infty$, имеем

$$\vartheta_1(0,y) = -\int\limits_0^{+\infty} f\big[\xi,y,\vartheta_1(\xi,y)\big]e^{-a\xi}d\xi.$$

Поэтому

$$\vartheta_1(x,y) = -\int\limits_x^{+\infty} f\big[\xi,y,\vartheta_1(\xi,y)\big]e^{a(x-\xi)}d\xi,$$

т. е. функция $\vartheta_1(x,y)$ является решением нелинейного интегрального уравнения (4). В силу того что это уравнение в пространстве $C(R^2)$ имеет единственное решение, получим $\vartheta_1(x,y) = \vartheta(x,y)$. Этим установлено, что решения системы (1) в пространстве $C(R^2)$ является единственной.

Аналогично рассматривается случай $a < 0$.

Если выполняется условия 2), то нужно в начале исследовать второе уравнение системы (1) и дословно повторить схему доказательства случая $a > 0$.

Теорема доказана.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследуется проблема существования и единственность решения квазилинейных переопределенных систем уравнений с частными производными в пространстве $C(R^2)$. Установлено условие полной разрешимости этой системы и получены явные формулы для решений.

Результаты работы, а именно формулы для решения и метод исследования условий совместимости можно применят при изучении многомерных переопределенных систем уравнений с частными производными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов, Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями / Л. Г. Михайлов. — Душанбе : Дониш, 1986. — 116 с.

2. Михайлов, Л. Г. О совместности некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями / Л. Г. Михайлов // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 238, № 6. — С. 1291–1294.

3. Байзаев, С. О необходимых и достаточных условиях существования ограниченных решений переопределенных систем уравнений с частными производными / С. Байзаев, М. А. Рахимова // Ученые записки ХГУ. Серия : естественные и экономические науки. — 2017. — № 3(42). — С. 3–12.

4. Раджабов, Н. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и

сверхсингулярными линиями / Н. Раджабов, Мохамед эл Саид. — LAP.LAMBEPT : Academik Publishig, 2011. — 234 с.

5. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 554 с.

6. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

7. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

REFERENCES

1. Mikhailov L.G. Some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. [Mihajlov L.G. Nekotorye pereopredelennye sistemy uravnenij v chastnyh proizvodnyh s dvumya neizvestnymi funkciyami]. Dushanbeh, 1986, 116 p.

2. Mikhailov L.G. On the unitaries of some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. [Mihajlov L.G. O sovmestnosti nekotoryh pereopredelennyh sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh s dvumya neizvestnymi funkciyami]. *Doklady AN SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1978, vol. 238, no. 6, pp. 1291–1294.

3. Bayzaev S., Rakhimova M.A. On the necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solutions of overdetermined systems of partial differential equations. [Bajzaev S., Rahimova M.A. O neobhodimyh i dostatochnyh usloviyah sushchestvovaniya ogranichennyh reshenij pereopredelennyh sistem uravnenij s chastnymi proizvodnymi]. *Uchenye zapiski HGU. Ceriya: estestvennye i ekonomicheskie nauki — Scientific notes of the Khujand State University. Series: Natural and Economic Sciences*, 2017, no. 3(42), pp. 3–12.

4. Rajabov N., Mohamed Al Said Overdetermined linear second order system with singular and supersingular lines. [Radzhabov N., Mohamed el Said Pereopredelennaya linejnaya sistema vtorogo poryadka s singulyarnymi i sverhsingulyarnymi liniyami]. LAP.LambEpt: Academik Publishig, 2011, 234 p.

5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza]. Moscow: Science, 1976, 544 p.

6. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

7. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

Рахимова Махсуда Аюбовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естественнознания, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд, Таджикистан
E-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru

Rahimova Makhsuda Aubovna, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of mathematical disciplines and modern natural sciences, Tajik State University of law, business and politics, Khudjand, Tajikistan
E-mail: rakhimova.mahsuda@mail.ru