УДК 517.95

МЕТОД ОПОРНОГО БАЗИСА ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*

В. Б. Пеньков, Л. В. Левина

Липецкий государственный технический университет

Поступила в редакцию 12.05.2021 г.

Аннотация. Решение неоднородного линейного операторного уравнения, описывающего объект математической физики, традиционно представляется суммой общего решения для однородной части уравнения и частного решения. При рассмотрении корректных краевых задач с граничными условиями, представимыми в линейной форме, решению однородного уравнения соответствует краевая задача со скорректированными граничными условиями за счет поправок от уже полученного частного решения. Эта задача является традиционным объектом исследователей и для ее решения разработано множество методов, реализованных в форме численных пакетов прикладных программ. Современная тенденция развития вычислительных средств ориентирована на использование компьютерных алгебр и позволяет выписывать численно-аналитическое и даже полнопараметрическое решение. Для построения частного решения с регулярной (полиномиальной) правой частью предложен метод опорного базиса, гарантирующего для оговоренного гипотезами класса “самодостаточных” объектов выписывание строгого решения в численно-аналитической форме. Эффективность подхода продемонстрирована на уравнениях Пуассона и эластостатики.

Ключевые слова: базис гильбертова пространства, мономный базис, внутреннее состояние, граничное состояние, изоморфизм внутренних и граничных состояний.

THE METHOD OF THE REFERENCE BASIS FOR CONSTRUCTING A PARTIAL SOLUTION OF A LINEAR INHOMOGENEOUS OPERATOR EQUATION OF MATHEMATICAL PHYSICS

V. B. Penkov, L. V. Levina

Abstract. The solution of an inhomogeneous linear operator equation describing an object of mathematical physics is traditionally represented as the sum of the general solution for the homogeneous part of the equation and the partial solution. When considering correct boundary value problems with boundary conditions that are represented in linear form, the solution of a homogeneous equation corresponds to a boundary value problem with adjusted boundary conditions due to corrections from the already obtained partial solution. This problem is a traditional object of researchers and many methods have been developed to solve it, implemented in the form of numerical application packages. The current trend in the development of computing tools is focused on the use of computer algebras and allows you to write out a numerical-analytical and even full-parametrical solution. To construct a particular solution with a regular (polynomial) right-hand side, the method of the reference basis is proposed, which guarantees that for a class of "self-sufficient" objects specified by hypotheses,

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19–41–480003 “р_а” .

a strict solution is written out in a numerical-analytical form. The effectiveness of the approach is demonstrated on the Poisson and elastostatic equations.

Keywords: Hilbert space basis, monomic basis, internal state, boundary state, isomorphism of internal and boundary states.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно и обоснованно общее решение линейных задач математической физики с неоднородной правой частью в операторной форме записи ищется в форме суммы какого-либо частного решения и общего решения для однородного уравнения. Такой подход является эффективным при построении численно-аналитического (и даже полнопараметрического) решения.

Основное внимание исследователей уделяется разработке методов решения задач второго шага: классические аналитические подходы, описанные в руководствах по уравнениям математической физики [1]; методы конечных разностей и их модификации [2], граничных интегральных уравнений с численным вариантом — методом граничных элементов [3, 4]; метод рядов, опирающийся на разложение искомого состояния ξ в ряд по элементам ортогонального базиса гильбертова пространства $\{\xi_i\} \in \Xi$ [2, 5]; метод Ритца с его численным аналогом и по сей день "главным оружием" инженера-расчетчика — методом конечных элементов (МКЭ) [2, 5]; метод Бубнова-Галеркина, также имеющий склонность к конечно-элементному моделированию; метод наименьших квадратов [5], весьма эффективный при использовании подхода Треффтца [6, 7] при формировании исходного базиса пространства Ξ на основе общего решения; метод Канторовича [2, 5], минимизирующий квадратичный функционал вариантом наискорейшего спуска, обоснованного для функциональных пространств; метод граничных состояний (МГС) [8, 9], опирающийся на изоморфизм функциональных пространств внутренних Ξ и граничных Γ состояний: $\Xi \leftrightarrow \Gamma$.

Проблеме построения частного решения уделяется меньшее внимание: способы учета неоднородности в операторном уравнении часто зависят от физического смысла задачи и являются по большей части индивидуальными.

Если ограничить классы правых частей требованием регулярности, заключающейся в допустимости и возможности их приближения полиномами с достаточной степенью точности, то эту проблему можно решать достаточно эффективно [10, 11]. Более того, для введенного ниже класса "самодостаточных" объектов также решения можно строить строго (в численно-аналитической и даже в полнопараметрической аналитической форме [10]).

Целью работы является обоснование метода опорного базиса – подхода к построению строгого решения для полиномиальных правых частей уравнений.

Задачи, ведущие к достижению цели: 1) выработка набора гипотез "самодостаточности" объекта исследования, гарантирующих возможность построения строгого решения; 2) разработка и описание общего алгоритма создания мономного базиса правых частей, позволяющего декомпозировать задачу и свести ее к построению линейной комбинации уже известных внутренних состояний объекта.

1. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ

Пусть система определяющих соотношений описывает объект, заключенный в области $V \subset R^n$ с границей ∂V. Состояние объекта будем характеризовать избыточным набором полевых характеристик $\xi(x)$, $x = \{x_i\}_n \in V$, в состав которых могут входить тензоры любого рода (скаляры, векторы, ...). Пусть также в формировании состояния объекта участвует конечный набор констант M(размерность пространства n, физические параметры среды и т. п.).

Будем полагать, что система определяющих соотношений описывает состояние ξ посредством линейного оператора L:

$$L\,\xi(x) = f(x),\ x \in V, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — заданный набор функций, представленных в полиномиальной форме через координаты x_i n-мерного действительного пространства R^n.

При корректной постановке краевой задачи для уравнения (1.1) требуется привлечение граничных условий, форму которых оговаривать не будем (кроме требования корректности). Решение линейной краевой задачи традиционно декомпозируется на два этапа: 1) построение частного решения, которому соответствует какое-либо состояние ξ^*, так что

$$L\,\xi^* = f, \tag{1.2}$$

2) корректировка ГУ в соответствии с частным состоянием ξ^* и последующее решение скорректированной краевой задачи для однородного операторного уравнения

$$L\,\xi^\circ = 0. \tag{1.3}$$

Суперпозиция обоих решений дает решение краевой задачи для (1.1) [1]:

$$\xi = \xi^* + \xi^\circ. \tag{1.4}$$

При всем многообразии подходов к построению решения задачи для однородного уравнения со скорректированными граничными условиями проблема построения частного решения отходит на второй план, хотя и является обязательным этапом в решении краевой задачи для (1.1).

Рассмотрим классические примеры формулировки соотношений (1.1).

1°. *Уравнение Пуассона.* Является классическим примером неоднородной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных:

$$u_{,ii} = f(x),\ x \in V, \tag{1.5}$$

где используется тензорно-индексная форма записи [12], $u(x)$ — дважды дифференцируемая, регулярная в $V \cup \partial V$ функция $u \in C^2(V)$. Правая часть продолжима на границу ∂V.

Классическим подходом при решении краевой задачи для (1.5) является использование функции Грина [1], но подход эффективен, когда задачи ставятся в форме Дирихле или Неймана. Решение выражается через сингулярное ядро в интегральной форме представления результата, что не позволяет выписывать его в аналитическом виде, поскольку в общем случае интегралы берутся лишь численно.

Под внутренним состоянием удобно понимать согласованный набор характеристик $\xi = \{u, u_{,i}\} \in \Xi$, что позволяет в гильбертовом пространстве Ξ использовать скалярное произведение

$$\left(\xi^1,\xi^2\right) = \int\limits_V u^1_{,i}\, u^2_{,i} dV.$$

2°. *Уравнения однородной изотропной эластостатики.* Внутреннее состояние упругого тела удобно характеризовать списком $\xi = \{u_i,\ \varepsilon_{ij},\ \sigma_{ij}\} \in \Xi$, где u_i — компонента вектора перемещений, ε_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций и напряжений соответственно. Эти характеристики согласованы между собой соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{1.6}$$

обобщенным законом Гука (λ, mu — константы упругости Ламе)

$$\sigma_{i\,j} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{i\,j} + 2\,\mu\,\varepsilon_{i\,j}, \tag{1.7}$$

уравнениями равновесия

$$\sigma_{i\,j,\,j} + X_i = 0, \tag{1.8}$$

где X_i — заданные объемные силы, наличие которых и определяет неоднородный характер операторного уравнения (1.1).

Пространство Ξ является гильбертовым со скалярным произведением

$$\left(\xi^1{,}\xi^2\right) = \int\limits_V \sigma^1_{i\,j}\,\varepsilon^2_{i\,j} dV.$$

Классическим подходом построения частного решения является сингулярно-интегральное представление поля перемещений формулой Чезаро [1] непосредственно через поле заданных объемных сил. Результаты имеют численный характер, поэтому восстановление внутреннего состояния по цепочке $u_i \to\ \varepsilon_{i\,j} \to \sigma_{i\,j}$ затруднительно.

В случае консервативных объемных сил построение частного решения “завязывается” на уравнение Пуассона [1], что несколько снижает уровень трудностей.

2. ГИПОТЕЗЫ САМОДОСТАТОЧНОСТИ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОПОРНОГО БАЗИСА

Правая часть $f(x)$ операторного уравнения (1.1) по определению представляет собой набор полиномиальных функций и является элементом гильбертова пространства полиномов P со скалярным произведением $\left(f^1{,}f^2\right)_P$, $f^1{,}f^2 \in P$ физический смысл которого может конкретизироваться.

В конкретных задачах полагаем, что максимальный порядок полиномов для $f(x)$ известен и равен K. Тогда для описания правой части достаточно пользоваться отрезком базиса пространства $P_{maz}\ \subset P$, состоящим из подпространств P^k однородных многочленов порядка k:

$$P_K = \bigcup_{k=0}^{K} P^k.$$

Условимся для каждого P^k называть список его многочленов “кластером k”. Элементом опорного базиса $P^k_j \in P^k$ будем называть такой набор однородных полиномов порядка k, которому соответствует уже известное внутреннее состояние ξ^k_j . Если опорный базис $\left\{P^k_j\right\} \subset P^k$ сформирован, для каждого $k \in \{0{,}1{,}...K\}$ разложения $f(x)$

$$f = \sum_{k=1}^{K} \chi_k\, f^k,\ f^k = \sum_{j=1}^{N^k} \kappa_{k\,j}\, p^k_j, \tag{2.1}$$

где $\kappa_{k\,j}$ — коэффициент разложения кластерной составляющей k правой части f^k по опорному базису, то соответствующее частному решению внутреннее состояние ξ^* определяется однотипно:

$$\xi^* = \sum_{k=0}^{K} \chi_k\, \xi^{*\,k},\ \xi^{*\,k} = \sum_{j=1}^{N^k} \kappa_{k\,j}\, \xi^k_j. \tag{2.2}$$

В обеих формулах (2.1), (2.2) N^k означает мощность опорного базиса кластера k. Описанное соответствие возможно, если выполняется

гипотеза морфизма: Любой моном $w \in P$ (генерирующий моном) позволяет по цепочке определяющих соотношений установить ему соответствующее внутреннее состояние ξ_w и правую часть неоднородного уравнения f_w:

$$w \to \xi_w \to f_w = L(\xi_w). \tag{2.3}$$

Более жестким требованием, но часто имеющим место при решении прикладных задач, является

гипотеза однородности: моном $w = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$порождает по цепочке (2.3) правую часть, составленную из однородных многочленов кластера k, причем порядок кластера однозначно определяется порядком ord w монома w:

$$k = k(\operatorname{ord} w), \operatorname{ord} w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Гипотезе однородности далеко не всегда удовлетворяют задачи математической физики. Однако ее выполнимость коренным образом упрощает построение частного решения. Еще одним обеспечивающим условием служит

***гипотеза полноты*:** множество генерирующих мономов (мощности $N^{\operatorname{ord} w}$) порождает опорный базис кластера k мощности N^k, определяемой как $\operatorname{ord} w$, так и набором параметров M:

$$N^k = \left|\left\{P_j^k\right\}\right| = N^k(\operatorname{ord} w, M) \tag{2.4}$$

По выполнении процедур морфизма по факту установлено соответствие $N^{\operatorname{ord} w} \leftrightarrow N^k$.

Назовем объект, удовлетворяющий введенным гипотезам “самодостаточным”, поскольку их выполнение позволяют эффективно формировать опорный базис для кластера k, указывая каждому элементу p_j^k ему соответствующее внутреннее состояние ξ_j^k. Требование изоморфизма является избыточным, поскольку предварительные процедуры $\xi_j^k \to p_j^k$ указывают, что для элемента опорного базиса уже назначен некоторый элемент пространства внутренних состояний. При построении частного решения требуется восстановить какое-либо внутреннее состояние ${\xi^*}^k$, соответствующее правой части (1.1).

Следующие примеры убеждают в правомочности и эффективности использования введенных гипотез.

1°. *Уравнение Пуассона.* В пространственных задачах $n = 3$ моном $w = x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma$ порождает согласно определению

$$f = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

правую часть уравнения в форме однородного многочлена порядка $k = \alpha + \beta + \gamma - 2$:

$$f_w = \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}\, y^\beta\, z^\gamma + \beta(\beta-1)\, x^\alpha\, y^{\beta-2}\, z^\gamma + \gamma(\gamma-1)\, x^\alpha\, y^\beta\, z^{\gamma-2}.$$

Внутреннее состояние есть $\xi_w = \{w, \mathbf{grad}\, w\}$.

Все три гипотезы выполняются. Аналогичный результат имеет место при $n = 2$ и произвольном n.

2°. *Эластостатическая среда.* В пространственном варианте моном w можно поместить в любую позицию вектора перемещений

$$\mathbf{u} \in \left\{ \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \right\}.$$

Цепочка преобразований $\mathbf{u} \to \widehat{\varepsilon} \to \widehat{\sigma} \to \mathbf{X}$ выписывает три варианта внутреннего состояния, соответствующее позиции w в векторе перемещений. Например, в случае $\mathbf{u} = \{w,0,0\}$ получаем внутреннее состояние $\xi_w = \{\mathbf{u}, \widehat{\varepsilon}, \widehat{\sigma}\}$:

$$\widehat{\varepsilon} = \frac{w}{2}\begin{pmatrix} 2\,\alpha x^{-1} & \beta y^{-1} & \gamma\, z^{-1} \\ \beta\, y^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma\, z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{\sigma} = w\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\,\alpha x^{-1} & \mu\,\beta\, y^{-1} & \mu\,\gamma\, z^{-1} \\ \mu\,\beta\, y^{-1} & \lambda\,\alpha\, x^{-1} & 0 \\ \mu\,\gamma\, z^{-1} & 0 & \lambda\,\alpha\, x^{-1} \end{pmatrix}$$

и представление объемной силы $\mathbf{X}$, которой это состояние отвечает:

$$\mathbf{X} = -w\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\,\alpha\,(\alpha-1)x^{-2} + \mu\,\beta\,(\beta-1)y^{-2} + \mu\,\gamma\,(\gamma-1)z^{-2} \\ (\lambda+\mu)\alpha\,\beta\, x^{-1}y^{-1} \\ (\lambda+\mu)\,\alpha\,\gamma\, x^{-1}z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Вектор объемных сил описывается в каждой позиции однородными многочленами порядка $k = \alpha + \beta + \gamma - 2$. Все гипотезы самодостаточности “срабатывают”. Мощность множества, представляющего собой опорный базис пространства P^k, равна $N_k = \frac{3}{2}(k+1)(k+2)$. Понятно, что конкретному N_k соответствует единственный порядок $\operatorname{ord} w = k + 2$.

3. НАПОЛНЕНИЕ ОПОРНОГО БАЗИСА И ВЫПИСЫВАНИЕ СТРОГОГО РЕШЕНИЯ

Для *самодостаточного* объекта все гипотезы выполняются. Структура генерирующего монома $w = \prod\limits_{j=1}^{w} x_j^{\alpha_j}$ позволяет простым перебором выписывать все мономы, определенные в пространстве R^n. Наличие дифференциальных операций в L снижает порядки полиномов, описывающих внутреннее состояние ξ_w объекта, а также и порядок k формируемого кластера опорного базиса, который меньше $\operatorname{ord} w$. Поэтому использование всех вариантов перебора приводит ко множеству вариантов правых частей (1.1), превышающему по мощности размерность базиса. Отбрасывание линейно зависимых элементов можно проводить традиционными средствами, проверяя на таковую каждый вновь создаваемый элемент. Иногда удается указать более короткую схему, позволяющую не генерировать заведомо линейно зависимый элемент. К таким подходам относятся алгоритмы: обеспечивающий, сортировочный [10, 11], успешно примененные для эластостатической среды. Обеспечивающий алгоритм служит одновременно доказательством полноты опорного базиса (выполнение гипотезы полноты), сортировочный позволяет произвольным перебором заказываемых элементов наполнять опорный базис.

Приведем примеры наполнения опорных базисов, оказавшимися одинаковыми для случаев уравнения Пуассона и эластостатической среды. Это установлено опытным путем.

В R^2 множество мономов $x^a\, y^b$ каждого кластера k эквивалентны списку $a \in \{0,1,...,k\}, (b = k - a)$. Сортировочный алгоритм подсказывает, что до $a \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]$ (“антье”) надо класть $\alpha = a + 2, \beta = b$, а при $a > \left[\frac{k}{2}\right]$ — наоборот, $\alpha = a, \beta = b + 2$.

В R^3 множество мономов кластера k размещается в плоскости двух индексов и образует равносторонний треугольник, составленный из узлов, в каждом из которых помещен единственный моном $w = x^a\, y^b\, z^c,\ a + b + c = k$. Вершинам треугольника соответствуют узлы x^k, y^k, z^k, ребрам – $x^a\, y^{k-a},\ y^b\, z^{k-b},\ x^{k-c}\, z^c$. Сортировочный алгоритм позволяет назначать значения α, β, γ через a, b, c анализом “близости” к вершинам: либо $\alpha = a + 2$, либо $\beta = b + 2$, либо $\gamma = c + 2$ (при одинаковом отклонении узла от двух или всех трех вершин выбор безразличен, поскольку ведет к одинаковым результатам).

Полагаем опорный базис $\{f_i^k\}_{N^k}$ для кластера k построенным. Благодаря гипотезе однородности каждый его элемент является линейной комбинацией элементов мономного базиса

$\{p_i^k\}$ кластера k с уже известными коэффициентами $c^k_{i\,j}$:

$$f_i^k = \sum_j c^k_{i\,j}\, p_j^k \tag{3.1}$$

Матрица $\left[c^k_{i\,j}\right]_{N^k \times N^k}$ является невырожденной, поскольку связывает два базиса. Ее обращение позволяет выразить каждый элемент мономного базиса через элементы опорного базиса:

$$p_j^k = \sum_i \kappa^k_{j\,i}\, f_i^k \tag{3.2}$$

где $\left[\kappa^k_{j\,i}\right]_{N^k \times N^k} = \left[c^k_{i\,j}\right]^{-1}$. Такая же линейная комбинация восстанавливает соответствующее пространство внутренних состояний $\widetilde{\xi}_j^k$:

$$\widetilde{\xi}_j^k = \sum_i \kappa^k{}_{j\,i}\, \widetilde{\xi}_i^* \quad . \tag{3.3}$$

Итак, каждому мономному вектору правых частей (1.1) отвечает внутреннее состояние. Для выписывания частного решения следует представить правую часть f в виде линейной комбинации мономных элементов всех порядков до максимального включительно:

$$f = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N^k} \chi_{k\,j} \widetilde{\xi}_j^k \tag{3.4}$$

Эта линейная комбинация и является строго построенным частным решением задачи (1.2).

4. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Примеры, подчеркивающие эффективность метода опорного базиса, приведем для выше приведенных самодостаточных объектов: уравнений Пуассона и эластостатики.

1°. *Уравнение Пуассона.* Пусть правая часть уравнения Пуассона имеет вид

$$f = 2\,z^3 + 3\,z\,(x+y)^2.$$

После раскрытия скобок функция f оказывается равной линейной комбинации четырех мономов кластера 3, а именно

$$f = 2\,f_1 + 3\,f_2 + 3\,f_3 + 6\,f_4,$$
$$f_1 = z^3,\ f_2 = x^2\,z,\ f_3 = y^2\,z,\, f_4 = x\,y\,z.$$

Базис мономов третьего порядка содержит 10 элементов, каждый из которых следует представить линейной комбинацией однородных полиномов третьего порядка, составляющих опорный базис для f. Для построения опорного базиса нужно использовать мономы пятого порядка количеством $N^5 = \frac{1}{2}(5+1)(5+2) = 21$, но из них для опорного базиса линейно-независимых вариантов представляют лишь 10 элементов (применен сортировочный алгоритм):

$$w_i \in \left\{x^5,\, x^4\,y,\ x\,y^4,\, y^5, y^4\,z,\ y\,z^4,\, z^5,\, x^4\,z,\ x\,z^4,\ x^3\,y\,z\right\}.$$

Каждому w_i здесь соответствует состояние $\xi_i^* = \{u_i^*, \text{grad}\ u_i^*\}$ и правая часть $f_i^* = \Delta\, u_i^*$, выражаемая линейной комбинацией мономов порядка 3 (промежуточные результаты не выписываем из-за громоздкости и необозримости). Таким образом, 10 элементов опорного базиса правых частей выражаются линейной комбинацией через 10 мономов третьего порядка. Обращение матрицы C представляет мономный базис через опорный, для которого уже назначено соответствие элементов пространства внутренних состояний. Получаем ответ на вопрос, какие из внутренних состояний $\xi_i^*,\ i\in\{1,...,4\}$ соответствуют мономам $f_i^*,\ i\in\{1,...,4\}$.

Линейная комбинация

$$\xi^* = 2\,\xi_1^* + 3\,\xi_2^* + 3\,\xi_3^* + 6\,\xi_4^*$$

представила внутреннее состояние $\xi^* = \{u^*,\mathrm{grad}\ u^*\}$, отвечающее частному решению уравнения Пуассона

$$u^* = \frac{1}{2}\,x^2\,z^3 + \frac{1}{2}\,y^2\,z^3 + x\,y\,z^3,$$

$$\mathrm{grad}\ u^* = \left\{(x+y)\,z^3,\,(x+y)\ z^3,\ \frac{3}{2}(x+y)^2\,z^2\right\}.$$

Такая информация о внутреннем состоянии, отвечающем частному решению уравнения Пуассона, позволяет в точках границы тела вычислить любые характеристики граничного состояния $\gamma^* = \left\{u^*,\ \frac{du}{d\mathbf{n}}^*\right\},\ x\in\partial V$ ($\mathbf{n}$– направление внешней нормали на границе) и, скорректировав граничное условие произвольного типа (но корректные!), приступить к решению соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа.

2°. *Уравнения эластостатики.* Рассмотрим систему соотношений (1.6)–(1.8), записанную в безразмерной форме с масштабом по напряжениям μ и коэффициентом Пуассона $\nu = 1/4$, при котором $\mu = \lambda$. Пусть на тело воздействует безразмерная объемная сила

$$\mathbf{X} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x^2+y^2\right)\ z \end{pmatrix},$$

где параметры A, B — некоторые произвольные постоянные.

Максимальный порядок полиномиальных сил равен 3. Для кластеров $k\in\{0,1,2,3\}$ поочередно строились опорные базисы размерностями $\{3,9,18,30\}$ соответственно сортировочным алгоритмом (промежуточные результаты не приводятся из-за громоздкости; ориентированная на компьютерные алгебры система Mathematica выполнила все операции в численно-аналитической форме). Вектор $\mathbf{X}$ был декомпозирован на 6 мономных слагаемых; для каждого мономного базисного вектора получено внутреннее состояние вида (3.3); линейная комбинация соответствующих внутренних состояний для $\mathbf{X}$ дала композицию этих состояний $\xi^* = \{\mathbf{u}^*, \mathbf{P}^*, \widehat{\sigma}^*\}$ в форме

$$\mathbf{u}^* = -\frac{A}{36}\begin{pmatrix} 2\,x^3 \\ 2\,y^3 \\ 3\,x^4 + 3\,y^4 \end{pmatrix} + \frac{B}{90}\begin{pmatrix} x^5 \\ y^5 \\ -\frac{15}{2}\,z\,(x^4+y^4) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\varepsilon}^* = -\frac{A}{6}\begin{pmatrix} x^2 & 0 & x^3 \\ 0 & y^2 & y^3 \\ x^3 & y^3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{B}{36}\begin{pmatrix} -2\,x^4 & 0 & 6\,x^3\,z \\ 0 & -2y^4 & 6\,y^3\,z \\ 6\,x^3\,z & 6\,y^3\,z & 3(x^4+y^4) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\sigma}^* = -\frac{A}{6}\begin{pmatrix} 3\,x^2+y^2 & 0 & 2\,x^3 \\ 0 & x^2+3\,y^2 & 2\,y^3 \\ 2\,x^3 & 2\,y^3 & x^2+y^2 \end{pmatrix} - \frac{B}{36}\begin{pmatrix} -3\,x^4+y^4 & 0 & 12\,x^3\,z \\ 0 & x^4-3y^4 & 12\,y^3\,z \\ 12\,x^3\,z & 12\,y^3\,z & 7\,(x^4+y^4) \end{pmatrix}.$$

Элементарная проверка правильности результата состоит в использовании определяющих соотношений (1.6) - (1.8) и показала тождественное равенство. Обладание внутренним состоянием ξ^*, отвечающим за частное решение эластостатической задачи, позволяет на каждом участке границы получить представление для любых физических величин, удерживаемых в граничных условиях и после корректировки ГУ приступить к решению однородной краевой задачи для уравнения (1.3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. При рассмотрении краевых задач для неоднородных уравнений математической физики использовано понятие внутреннего состояния объекта исследования как избыточного набора его согласованных полевых характеристик. Неоднородное состояние декомпозировано на сумму состояния, отвечающего частному решению неоднородного уравнения и состояния, являющегося решением однородной задачи при скорректированных граничных условиях. Проведен анализ подходов к построению решений для классических постановок (уравнение Пуассона, уравнения эластостатики) и сформулирована целевая задача об отыскании частного решения для правых частей уравнений, имеющих полиномиальное представление.

2. Сформулированы гипотезы, позволяющие гарантировать построение строгого решения для классов задач уравнений математической физики, обозначенных “самодостаточными”.

3. Предложен метод опорного базиса для формирования базиса пространства состояний объекта и им соответствующих полиномиальных правых частей операторного уравнения.

4. Выполнен подход, позволяющий сформировать базис внутренних состояний для правых частей, описываемых мономами. Представление правых частей в виде линейной комбинации мономных векторов позволяет составить такую же комбинацию из соответствующих мономам внутренних состояний и представить в качестве ответа состояние, строго соответствующее заданной правой части.

5. Приведены примеры строго построенных частных решений для неоднородных задач: уравнений Пуассона, эластостатики с заданными объемными силами.

В перспективе требуется расширить класс эффективно решаемых задач уравнений математической физики за счет смягчения требований гипотезы однородности. Потребуется обеспечение полноты опорного базиса уже не внутри кластера однородных многочленов, но уже при объединении таковых. Потребуется гарантировать полноту такой системы элементов, что пока очевидным не является.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А. И. Уравнение математической физики / А. И. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 763 с.

2. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М.-Л. : ГИТТЛ, 1952. — 696 с.

3. Вреббия, К. С. Применение метода граничных элементов в технике / К. Вреббия, С. Уокер. — М. : Мир, 1982. — 218 с.

4. Угодчиков, А. Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский. — Казань : КГУ, 1986. — 295 с.

5. Rektorys, K. Varinional Meyhods in Mathematics, Science and Engineering / K. Rektorys. — Prague : Springer, 2001. — 576 p.

6. Trefftz, E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren: Verhandl 2er Internat. Kongress. Techn. Mechanik / E. Trefftz. — Zürich, 1926. — P. 131–137.

7. Терещенко, В. Я. Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости / В. Я. Терещенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1976. — Т. 16, № 4. — С. 996–1005.

8. Пеньков, В. Б. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина. — Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. — 108 с.

9. Пеньков, В. Б. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики /

В. Б. Пеньков, В. В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. — 2001. — Т. 2, № 2. — С. 115–137.

10. Пеньков, В. Б. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение / В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, О. С. Новикова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2020. — Т. 24, № 1. — С. 56–73.

11. A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation / V. I. Kuz'menko, N. V. Kuz'menko, L. V. Levina, V. B. Pen'kov // Mechanics of Solids. — 2019. — T. 54, № 5. — C. 741–749.

12. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — М. : Наука, 1979. — 744 с.

REFERENCES

1. Tikhonov A.I., Samarsky A.A. Equation of mathematical physics. [Tixonov A.I., Samarskij A.A. Uravnenie matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1972, 763 p.

2. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate Methods of Higher Analysis. [Kantorovich L.V., Kry'lov V.I. Priblizhenny'e metody' vy'sshego analiza]. Moscow-Leningrad, 1952, 696 p.

3. Vrebbia K.S., Walker S. Application of the boundary element method in engineering. [Vrebbiya K.S., Uoker S. Primenenie metoda granichny'x e'lementov v texnike]. Moscow: Mir, 1982, 218 p.

4. Ugodchikov A.G., Khutoryansky N.M. Boundary element method in solid mechanics. [Ugodchikov A.G., Xutoryanskij N.M. Metod granichny'x e'lementov v mexanike deformiruemogo tverdogo tela]. Kazan, 1986, 295 p.

5. Rektorys K. Varinional Meyhods in Mathematics, Science and Engineering, Prague: Springer, 2001, 576 p.

6. Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren: Verhandl 2er Internat. Kongress. Techn. Mechanik. Zürich, 1926, pp. 131–137.

7. Tereshchenko V.Ya. Generalization of the Treftz Method for Spatial Problems of the Theory of Elasticity. [Tereshhenko V.Ya. Obobshhenie metoda Treftcza dlya prostranstvenny'x zadach teorii uprugosti]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1976, vol. 16, no. 4, pp. 996–1005.

8. Penkov V.B., Satalkina L.V. Perturbed Boundary State Method: Inhomogeneous and Nonlinear Problems of the Theory of Elasticity and Thermoelasticity. [Pen'kov V.B., Satalkina L.V. Metod granichny'x sostoyanij s vozmushheniyami: neodnorodny'e i nelinejny'e zadachi teorii uprugosti i termouprugosti]. Saarbr¨ucken: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012, 108 p.

9. Penkov V.B., Penkov V.V. Boundary State Method for Solving Problems of Linear Mechanics. [Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. Metod granichny'x sostoyanij dlya resheniya zadach linejnoj mexaniki]. *Dal'nevostochny'j matematicheskij zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137.

10. Penkov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. Analytical solution of problems of elastostatics of a simply connected body loaded with non-conservative body forces. Theoretical and algorithmic support. [Pen'kov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. Analiticheskoe reshenie zadach e'lastostatiki odnosvyaznogo tela, nagruzhennogo nekonservativny'mi ob"emny'mi silami. Teoreticheskoe i algoritmicheskoe obespechenie]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences*, 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73.

11. Kuz'menko V.I., Kuz'menko N.V., Levina L.V., Pen'kov V.B. A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation. Mechanics of Solids,

2019, vol. 54, no. 5, pp. 741–749.
12. Rabotnov Yu.N. Solid Mechanics. [Rabotnov Yu.N. Mexanika deformiruemogo tverdogo tela]. Moscow: Nauka, 1979, 744 p.

Пеньков Виктор Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, Липецк, Российская Федерация
E-mail: vbpenkov@mail.ru

Penkov Viktor Borisovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of General Mechanics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation
E-mail: vbpenkov@mail.ru

Левина Любовь Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета, Липецк, Российская Федерация
E-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Levina Lyubov Vladimirovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation
E-mail: satalkina_lyubov@mail.ru