УДК 517

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНО–СТЕПЕННОЙ СУММОЙ

В. А. Костин, Алкади Хамса

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

Аннотация. Устанавливается корректная разрешимость задачи без начальных условий для неоднородного обобщённого уравнения в правой части которого стоит сумма дробно–дифференциального полинома и генератора (производящего оператора) с областью определения в банаховом пространстве, а в правой части вектор–функция со значением в том же пространстве. Указываются условия связывающие порядок поведения полугруппы с коэффициентами и дробными показателями полинома при которых задача корректна. Приводятся примеры показывающие широкую возможность для исследования корректной разрешимости задач без начальных условий с применением используемых в работе методов для уравнений с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: задачи без начальных условий, дробные производные Маршо, сильно непрерывные полугруппы и косинус-функции, корректные задачи.

ON THE SOLVABILITY OF THE PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR A GENERALIZED EQUATION WITH A FRACTIONAL-POWER SUM

V. A. Kostin, Alkadi Khamsa

Abstract. The correct solvability of the problem without initial conditions is established for an inhomogeneous generalized equation on the right side of which there is the sum of a fractional-differential polynomial and a generator (generating operator) with a domain of definition in a Banach space, and on the right side a vector function with a value in the same space. Conditions are indicated that connect the order of behavior of the semigroup with the coefficients and fractional exponents of the polynomial under which the problem is well-posed. Examples are given showing a wide opportunity for studying the correct solvability of problems without initial conditions using the methods used in the work for equations with variable coefficients.

Keywords: problems without initial conditions, fractional Marchaud derivatives, strongly continuous semigroups and cosine functions, well-posed problems.

В [6, с. 221] приводится решение задачи Коши с условиями

$$u(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0 \tag{1}$$

для дифференциального уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \left({}_0\mathbb{D}_x^{\nu}\right)^m u(x) = f(x), x \in (0,\infty) \tag{2}$$

где ${}_0\mathbb{D}_x^{\nu}$ производная по Капуто порядка $\nu \in (0,1)$, $f(x)-$сильно непрерывная на $(0,\infty)$ экспоненциального типа на $[0,\infty)$.

Приводится представление решения в виде

$$u(x) = \int_0^x G(x-\xi)f(\xi)d\xi = f * G(x), \tag{3}$$

где

$$G(x) = L^{-1}\left\{P^{-1}(\lambda^\nu)\right\}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{w-i\infty}^{w+i\infty} e^{\lambda x}\frac{dx}{\sum_{m=0}^n a_m\lambda^{\nu m}}. \tag{4}$$

В настоящей заметке решается более общая задача в следующей постановке.

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|.\|_E = \|.\|$ и A линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$ плотной в E.

Обозначим через $C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ банахово пространство вектор-функций $f(t)$, $t \in (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ со значениями в E и нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}}\|e^{-\mu t}f(t)\|, \mu \geqslant 0 \tag{5}$$

Введём дробно-дифференциальное выражение

$$L_n(\bar{a},\bar{\alpha})u(t) = \sum_{m=1}^n a_m(\frac{d}{dt})^{\alpha_m}u(t) \tag{6}$$

где

$$\bar{a} = (a_1,a_2\ldots,a_n), a_m \geqslant 0, \qquad \bar{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n), \alpha_i \in [0,1]$$

$$\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}}u(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_m)}\int_0^\infty (s)^{-(1+\alpha)}[u(t-s)-u(s)]ds \quad \text{— производная Маршо,} \tag{7}$$

$\Gamma(z)$-гамма функция Эйлера.

Для $f \in C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ рассмотрим уравнение

$$L_n(\bar{a},\bar{\alpha})u(t) = Au(t) + f(t). \tag{8}$$

Определение. Решением уравнения (8) будем называть вектор-функцию $u(t) \in D(A)$ при каждом t, для которой определены дробные производные $\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}}$, и удовлетворяющую уравнению (8).

Ставится задача о нахождении решения уравнения (8) удовлетворяющее условию

$$u \in C_{\mu[E,\mathbb{R}]} \tag{9}$$

Определение. Будем говорить, что задача (8)-(9) поставлена корректно, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для него выполняется оценка корректности

$$\|u\|_{C_\mu} \leqslant M\|f\|_{C_\mu}, \tag{10}$$

где константа $M \geqslant 0$ не зависит от f.

Основным результатом настоящей заметки является

Теорема. Если оператор A является генератором полугруппы $U(s,A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|U(s,A)\| \leqslant Me^{ws}, \qquad s \geqslant 0 \tag{11}$$

и выполняется условие

$$w < \sum_{m=1}^n a_m\mu^{\alpha_m}, \tag{12}$$

то задача (8)-(9) корректна и для ее решения выполняется оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{\|f\|_\mu}{\sum_{m=1}^{n} a_m \mu^{\alpha_m} - w}. \tag{13}$$

Замечание. Согласно [3, c. 368] формула

$$A^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha}[U(t,-A) - I]\varphi dt, \quad \alpha \in (0{,}1) \quad \text{— формула Балакришнана} \tag{14}$$

с оценкой

$$\|U(t,-A)\varphi\| \leqslant me^{-wt}\|\varphi\|, \quad w > 0,\, t \geqslant 0, \tag{15}$$

справедлива и для $w = 0$, так как в этом случае $U(t,-A)$ является равностепенной непрерывной полугруппой класса C_0.

Отметим, что если $\varphi = \varphi_\lambda$ — является собственным элементом оператора A, то есть $A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, $Re\lambda \geqslant 0$, то (14) имеет вид

$$A^\alpha \varphi_\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{(e^{-\lambda t} - 1)}{t^{1+\alpha}} dt \varphi_\lambda =$$

$$= -\frac{2}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{\frac{-\lambda}{2}t} . Sh\frac{\lambda}{2}t}{t^{1+\alpha}} dt\varphi_\lambda = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \tag{16}$$

Отсюда, в случае $A = \frac{d}{dx}$, $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{\lambda x}$, имеем дробную производную

$$(\frac{d}{dx})^\alpha (e^{\lambda x}) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}, \tag{17}$$

из которой следуют равенства

$$(\frac{d}{dx})^\alpha \cos wx = w^\alpha \cos(w + \frac{\alpha\pi}{2})x,$$

$$(\frac{d}{dx})^\alpha \sin wx = w^\alpha \sin(w + \frac{\alpha\pi}{2})x.$$

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ

Для доказательства заметим, что оператор, заданный выражением $L_\varphi = -\frac{d\varphi(t)}{dt}$ и областью определения

$$D(L) = \{\varphi : \varphi \in C_\mu, \frac{d\varphi}{dt} \in C_\mu\} \tag{18}$$

является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$U(s,-\frac{d}{dt})\varphi(t) = \varphi(t-s) \tag{19}$$

с оценкой

$$\|U(s,-\frac{d}{dt})\varphi\|_\mu \leqslant e^{-\mu s}\|\varphi\|_\mu. \tag{20}$$

и, следовательно, согласно утверждению К. Иосиды оператор L имеет дробную степень

$$L^\alpha \varphi = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\varphi(t), \quad \alpha \in [0{,}1], \quad \varphi \in C_\mu.$$

При этом оператор $-L^\alpha$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$U(s,-L^\alpha)\varphi = U(s,-\frac{d^\alpha}{dt^\alpha})\varphi(t) = \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi)U(\xi,-\frac{d}{dt})\varphi(t)d\xi =$$

$$= \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi)\varphi(t-\xi)d\xi \qquad (21)$$

где $h_{s,\alpha}(\xi) \geqslant 0$ функция Иосиды, являющаяся обратным преобразованием Лапласа функции $e^{-\mu^\alpha s}$, для которой справедлива оценка

$$\|U(s,-\frac{d^\alpha}{dt^\alpha})\varphi(t)\|_\mu \leqslant \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi)\|\varphi(t-\xi)\|d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi)e^{-\mu\xi}d\xi\|\varphi\|_\mu = e^{-\mu^\alpha s}\|\varphi\|_\mu. \qquad (22)$$

Записывая уравнение (8), с учетом (9), в операторной форме

$$Au + \sum_{m=1}^n A_m u = f, \qquad (23)$$

где

$$A_m = -a_m\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}}, \qquad f = -f(t)$$

и, учитывая, коммутируемость оператора A_m и A на множестве (9) заключаем, что к уравнению (23) применима теорема Да Прато и Ж. Грисворда [8] о корректности задачи (8) и представление решения в виде

$$u = -\int_0^\infty \prod_{m=1}^n U(s,A_m)U(s,A)f ds =$$

$$u = -\int_0^\infty U(s,A)\prod_{m=1}^n \int_0^\infty h_{\alpha_m,a_m s}(\xi_m)f(t-\xi_m)d\xi_m. \qquad (24)$$

Отсюда, пользуясь (22), получаем оценку корректности

$$\|u\|_\mu \leqslant M\int_0^\infty \prod_{k=1}^n e^{-\mu^{\alpha_k}a_k s + ws}ds.\|f\|_\mu =$$

$$= \frac{M\|f\|_\mu}{\sum_{k=1}^n \mu^{\alpha_k}a_k - w}.$$

2. h- ВЕСОВЫЕ C_0- ПОЛУГРУППЫ И КОСИНУС- ФУНКЦИИ

Пусть функция $h(x)$ задана на интервале $(a,b) \in \mathbb{R}$ такая, что $h'(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to b} h(x) = \infty$. Далее полугруппы и косинус-функции, определяемые через $h(x)$ будем называть h- весовыми.

В пространстве равномерно непрерывных и ограниченных функций $\varphi(x)$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_{x\in(a,b)}|\varphi(x)|$ рассмотрим операторное семейство

$$U_h^+(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x)+t)], \quad \geqslant 0. \qquad (25)$$

Как показано в [7] такое семейство является сильно непрерывной полугруппой операторов со свойствами

1. $U_h^+(0)\varphi(x) = \varphi(x)$,

2. $\|U_h^+(t)\varphi(x)\| = \|\varphi\|$,

3. $U_h^+(t+s)\varphi(x) = U_h(t)U_h(s)\varphi(x)$,

4. $\lim\limits_{t\to 0}\|U_h^+(t)\varphi(x) - \varphi(x)\| = 0$,

и производящим оператором

$$\frac{dU_h}{dt}\varphi(x)|_{t=0} = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)} = \mathbb{D}_h^+\varphi \tag{26}$$

с областью определения

$$D(\mathbb{D}_h) = \{\varphi \in C_{(a,b)}, \frac{d\varphi}{dh} \in C_{(a,b)}\}$$

Для функций $\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda h(x)}, \lambda \in \mathbb{C}$ комплексное, справедливы, легко проверенные равенства

$$\mathbb{D}_h^+\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi_\lambda(x) \tag{27}$$

$$U_h^+(t)\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda x}\varphi_\lambda(x).$$

Такие полугруппы будем обозначать $U_h^+(t,\mathbb{D}_h^+)$.

Аналогично рассматриваются полугруппы

$$U_h^-(t, -\mathbb{D}_h^-)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) - t)], \quad t \geqslant 0 \tag{28}$$

с производящим оператором $\mathbb{D}_h^-\varphi(x) = -\frac{d\varphi}{dh}$, и значениями на собственных функциях $\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda h(x)}$

$$U_h^-(t, -\mathbb{D}_h^-)e^{\lambda h(x)} = e^{-\lambda t}\varphi_\lambda(x) \tag{29}$$

Соотношения (25) и (28), в соответствии с [9, с. 175] позволяют ввести сильно непрерывную косинус-функцию $C(t,\mathbb{D}_h^2)$ соотношением

$$C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) = \frac{1}{2}[U_h^+(t,\mathbb{D}_h^+) + U_h^-(t,\mathbb{D}_h^-)]\varphi(x) \tag{30}$$

со свойствами

1. $\|C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi\| \leqslant \|\varphi_h\|$,

2. $C(0,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) = \varphi(x)$,

3. $C(t+s,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) + C(t-s,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) = 2C(t,\mathbb{D}_h^2)C(s,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x)$,

4. $\lim\limits_{t\to 0}\|C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi - \varphi\| = 0, \quad \varphi \in C_{(a,b)}$.

и производящим оператором

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x)|_{t=0} = \mathbb{D}_h^2\varphi(x) = \frac{d}{dh}(\frac{d}{dh})\varphi(x), \tag{31}$$

который, в соответствии с [9] с. 178, является и производящим оператором C_0- полугруппы

$$U(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}}C(\xi)\varphi d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}} [\varphi[h^{-1}(h(x)+\xi)] + \varphi[h^{-1}(h(x)-\xi)]] d\xi. \tag{32}$$

Применяя (30) и (32) к функциям $\varphi_\lambda(x)$, получаем соотношении

$$C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2}[U(t,\mathbb{D}_h^+)\varphi_\lambda(x) + U(t,\mathbb{D}_h^-)\varphi_\lambda(x)] =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})\varphi_\lambda(x) = ch\lambda t \varphi_\lambda(x), \tag{33}$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \varphi_\lambda(s) ds \varphi_\lambda(x) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-s)^2+(x+s)^2}{4t}} ch\lambda s ds \varphi_\lambda(s) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} ch\lambda s ds \varphi_\lambda(x) = e^{\lambda^2 t}\varphi_\lambda(x). \tag{34}$$

Для $\lambda = in$ в (34), имеем равенства

$$C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi_{in}(x) = e^{-n^2 t}\varphi_{in}(x). \tag{35}$$

3. ПРИМЕРЫ h-ВЕСОВЫХ C_0-ПОЛУГРУПП И КОФ

1. C_0- полугруппы переносов, КОФ и Вейерштрасса

$$(a,b) = (-\infty,\infty), \qquad h(x) = x$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^\pm)\varphi(x) = \varphi(x \pm t) - \text{Полугруппы переносов}$$

$$\mathbb{D}_h^\pm \varphi(x) = \pm\frac{d\varphi}{dx} \tag{36}$$

$$C(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] - \text{КОФ Даламбера.}$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}} [\varphi(x+\xi) + \varphi(x-\xi)] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi - \text{полугруппа Вейерштрасса.} \tag{37}$$

Если $\varphi_\lambda(x) = \cos\lambda x$, то

$$\mathbb{D}_h^2 \varphi_\lambda(x) = -\lambda^2 \varphi_\lambda(x) = -\lambda^2 \cos\lambda x,$$

$$U_h(t,\mathbb{D}_h^2)\varphi_\lambda(x) = e^{-\lambda^2 t}\varphi_\lambda(x) = e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x. \tag{38}$$

2. Полугруппы и КОФ Эйлера

$$(a,b) = (0,\infty), \qquad h(x) = \ln x$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^\pm)\varphi(x) = \varphi(xe^{\pm t}),$$

$$\mathbb{D}_h^\pm \varphi(x) = \pm x\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{d\varphi}{dh},$$

$$\mathbb{D}_h^2\varphi(x)=\mathbb{D}_a\varphi(x)=x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+x\frac{d\varphi}{dx}-\text{оператор Эйлера} \tag{39}$$

$$\varphi_\lambda(x)=x^\lambda$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^+)x^\lambda=(e^tx)^\lambda=e^{\lambda t}x^\lambda. \tag{40}$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^-)x^{-\lambda}=(e^{-t}x)^{-\lambda}=e^{-\lambda t}x^{-\lambda}.$$

Полагая

$$\frac{1}{2}(x^\lambda+x^{-\lambda})=\frac{1}{2}(e^{\lambda\ln x}+e^{-\lambda\ln x})=ch(\lambda\ln x),$$

получим

$$C(t,\mathbb{D}_h^2)ch\lambda x=C(t,\mathbb{D}_a)ch(\lambda x)=ch\lambda t.ch(\lambda\ln x) \tag{41}$$

Заметим, что если $\lambda=in$, $n\in\mathbb{N}=(1,2,\ldots)$, то

$$C(t,\mathbb{D}_a)\cos nx=C(t,\mathbb{D}_h^2)\cos nx=\cos nt\cos(n\ln x). \tag{42}$$

$$U(t,\mathbb{D}_a)\cos nx=e^{-n^2t}\cos nx. \tag{43}$$

Из (38) и (41) следует равенство

$$U(t,\mathbb{D}_h^2)\cos nx=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\cos n\xi d\xi.\cos(n\ln x)=$$

$$=e^{-n^2t}\cos(n\ln x) \tag{44}$$

3. Полугруппы и КОФ Чебышева

$$(a,b)=(-1,1),\qquad h(x)=-\arccos x$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^+)\varphi(x)=\varphi(-\cos(\arccos x-t)), \tag{45}$$

$$U(t,\mathbb{D}_h^-)\varphi(x)=\varphi(-\cos(\arccos x+t)), \tag{46}$$

$$\mathbb{D}_h^+\varphi(x)=-\frac{d\varphi}{d\arccos}=\sqrt{1-x^2}\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\mathbb{D}_h^-\varphi(x)=\frac{d\varphi}{d\arccos}=-\sqrt{1-x^2}\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\mathbb{D}_h^2\varphi(x)=\mathbb{D}_\tau\varphi(x)=(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}-x\frac{d\varphi}{dx}-\text{оператор Чебышева} \tag{47}$$

$$\varphi_n(x)=e^{-n\arccos x}=(e^{-\arccos x})^n=e^{(x+\sqrt{x^2-1})^{(-n)}}=$$

$$=(x+\sqrt{x^2-1})^{-n},$$

$$\varphi_{-n}(x)=e^{n\arccos x}=(x+\sqrt{x^2-1})^n,$$

$$\varphi_{-n}(x)+\varphi_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n.$$

Таким образом

$$\frac{\varphi_{in}(x)+\varphi_{-in}(x)}{2}=T_n(x)-\text{многочлены Чебышева первого рода.}$$

Отсюда (см. [10, с. 54]) имеем равенства

$$\mathbb{D}_h^2T_n(x)=\mathbb{D}_\tau T_n(x)=-n^2T_n(x), \tag{48}$$

$$U(t, \mathbb{D}_\tau)T_n(x) = e^{-n^2}T_n(x). \tag{49}$$

Таким образом приведённые примеры генераторов C_0-полугруппы и КОФ показывают широкую возможность в зависимости от веса $h(x)$ исследовать корректную разрешимость задач без начальных условий для уравнений с дробной производной вида (7) с переменными коэффициентами. Отметим, что такие задачи являются предметом исследований в работах [1]–[2] при изучении процессов сдробной волной, в пористых средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблат, Г. И. Промежуточные асимптотики математической физики / Г. И. Баренблат, Я. Б. Зельдович. — Успехи мат. наук. — 1971. — Т. XXVI, вып. 2(158). — С. 115–129.

2. Зельдович, Я. Б. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика / Я. Б. Зельдович, Д. Д. Соколов // — Успехи физ. наук. — 1985. — Т. 146, вып. 3. — С. 493–505.

3. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

4. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

5. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

6. Учайкин, В. В. Методы дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Логос, 2002. — 512 с.

7. Костин, В. А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // Доклады Академии Наук. — Т. 455, № 2.

8. Da Prato Giuseppe Sommes' D'Opáérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles / Giuseppe Da Prato, Pierre Grisvard // Journal de mathematiques pures et appliquees. — 1975. — serie 9, tome 54, fasc. 3. — P. 305—387.

9. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложений / Дж. Голдштейн. — Киев : Вища школа 1989. — 347 с.

10. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М. : Наука, Главная редакция физико–математической литературы издательства, 1979. — 416 с.

11. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

12. Зверева, М. Б. Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием / М. Б. Зверева, М. И. Каменский, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 88–98.

13. О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко, Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 91–98.

REFERENCES

1. Barenblat G.I., Zeldovich Ya.B. Intermediate asymptotics of mathematical physics. [Barenblat G.I., Zel'dovich YA.B. Promezhutochnye asimptotiki matematicheskoj fiziki]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. XXVI, iss. 2(158), pp. 115–129.

2. Zeldovich Ya.B., Sokolov D.D. Fractals, similarity, intermediate asymptotics. [Zel'dovich YA.B., Sokolov D.D. Fraktaly, podobie, promezhutochnaya asimptotika]. *Uspexi fizicheskix nauk — Physics-Uspekhi*, 1985, vol. 146, iss. 3, pp. 493–505.

3. Yoshida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

4. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives and some of their applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya]. Minsk, 1987, 687 p.

6. Uchaikin V.V. Fractional derivative methods. [Uchajkin V.V. Metody drobnyh proizvodnyh]. Ulyanovsk, 2002, 512 p.

7. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Elementary transformation semigroups and their generating equations. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Elementarnye polugruppy preobrazovanij i ih proizvodyashchie uravneniya]. *Doklady Akademii Nauk — Reports of the Academy of Sciences*, vol. 455, no. 2.

8. Da Prato Giuseppe, Pierre Grisvard Sommes' D'Opáérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. Journal de mathematiques pures et appliquees, 1975, serie 9, tome 54, fasc. 3, pp. 305–387.

9. Goldstein J. Semigroups of linear operators and their applications. [Goldstejn Dzh. Polugruppy linejnyh operatorov i ih prilozhenij]. Kiev, 1989, 347 p.

10. Suetin P.K. Classical orthogonal polynomials. [Suetin P.K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny]. Moscow, 1979, 416 p.

11. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

12. Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition. [Zvereva M.B., Kamenskij M.I., SHabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebanij struny s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88–98.

13. Golovko N.I., Golovanova F.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. About possibility of application of fourier method to variable mathematical model. [Golovko N.I., Golovaneva F.V., Zvereva M.B., SHabrov S.A. O vozmozhnosti primeneniya metoda Fur'e k raznoporyadkovoj matematicheskoj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 91–98.

Костин Владимир Алексеевич, доктор физико–математических наук, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра математического моделирования, профессор, Воронеж, Россия
E-mail: vkostin@mail.ru

Kostin Vladimir Alekseevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University, Faculty of Mathematics, Department of Mathematical Modeling, Professor, Voronezh, Russia
E-mail: vkostin@mail.ru

Алкади Хамса, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра математического моделирования, аспирант, Воронеж, Россия
E-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com

Alkadi Hamsa, PhD student at the Department of Mathematical Modeling, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com