УДК 517.982.22

ПОЧТИ СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ОПЕРАЦИЯ ВОЗВЕДЕНИЯ В ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ

Р. Е. Зволинский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.01.2022 г.

Аннотация. Ограниченная последовательность действительных чисел называется *почти сходящейся*, если все банаховы пределы принимают на ней постоянное значение. Доказывается необходимое и достаточное условие почти сходимости, а также инвариантность множества неотрицательных почти сходящихся к нулю последовательностей относительно операции возведения в положительную степень.

Ключевые слова: почти сходящиеся последовательности, банаховы пределы, пространство ограниченных последовательностей.

ALMOST CONVERGENT SEQUENCES AND THE OPERATION OF RAISING TO A POSITIVE POWER

R. E. Zvolinskii

Abstract. A bounded sequence of reals is called almost convergent if all Banach limits take the same value at it. The necessary and sufficient condition of almost convergence is proved, as well as the invariance of the set of non-negative sequences almost converging to zero with respect to the operation of raising to a positive power.

Keywords: almost convergent sequences, Banach limits, space of bounded sequences.

Через ℓ_∞ обозначим пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, и обычной полуупорядоченностью. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $x \geqslant 0$,
2. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$,
3. $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T – оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Последовательность $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$ называется почти сходящейся к $\lambda \in \mathbb{R}$, если $Bx = \lambda$ для любого банахова предела $B \in \mathfrak{B}$, где через $\mathfrak{B}$ мы обозначаем множество банаховых пределов; через ac – множество почти сходящихся последовательностей. Из свойств 1–3 вытекает, что $\|B\|_{\ell_\infty^*} = 1$, т. е. $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое подмножество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*. Поэтому $\|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} \leqslant 2$ для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Множество последовательностей, почти сходящихся к λ, обозначается через ac_λ. В работе [1, Теорема 1] Г. Лоренц доказал, что $x \in ac_\lambda$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda \qquad (1)$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$, а также установил [1, § 1, последний абзац], что пространство ac несепарабельно. Л. Сачестон [2] уточнил теорему Лоренца, показав, что

$$q(x) \leqslant Bx \leqslant p(x) \tag{2}$$

для любых $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \ p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Подробное описание свойств банаховых пределов и их приложений дано в обзоре [3].

Теорема 1. Последовательность $x \in \ell_\infty$ почти сходится к числу $\lambda \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in ac_\lambda$, тогда в силу (1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Полагая в (1) $m > n_\varepsilon$, приходим к (3).

Достаточность. Предположим противное, пусть выполняется (3), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняется

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k - \lambda \right| < \varepsilon,$$

но при этом $x \notin ac_\lambda$, т. е. существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $n_i, m_i \in \mathbb{N}$, что $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и при всех $i \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+n_i} x_k - \lambda \right| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность чисел $r_i \in \mathbb{N}$ такую, что $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{r_i}{n_i} = 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = \infty$. Т. к.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+r_i} x_k = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+n_i+1}^{m_i+n_i+r_i} x_k = 0,$$

то

$$\left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+r_i+1}^{m_i+r_i+n_i} x_k - \lambda \right| = \left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+n_i} x_k - \lambda - \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+r_i} x_k + \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+n_i+1}^{m_i+n_i+r_i} x_k \right| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+n_i} x_k - \lambda \right| - \left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+r_i} x_k - \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+n_i+1}^{m_i+n_i+r_i} x_k \right| \right| \geqslant \left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+n_i} x_k - \lambda \right| -$$
$$- \left| \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_i+r_i} x_k - \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_i+n_i+1}^{m_i+n_i+r_i} x_k \right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

для всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}$.

Это означает, что в (4) мы можем без ограничения общности предполагать, что $m_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Тогда (4) противоречит (3). Полученное противоречие доказывает достаточность. □

Заметим, что из существования двойного предела, вообще говоря, равномерная сходимость не вытекает [4, с. 154]. Так например, последовательность $u_{1n} = n$, $u_{mn} = 0$, $m \neq 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 2, 3, \ldots$, сходится: $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{mn} = 0$, однако эта последовательность, очевидно, не ограничена. Применение теоремы 1 иллюстрирует следующий

Пример 2. Пусть

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k-2^j} & \text{для} \quad 2^j < k \leqslant 2^{j+1},\ j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0 & \text{для} \quad k = 1, \end{cases}$$

т. е.

$$x = \left\{0,\ 1,\ 1, \frac{1}{2},\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8},\ \ldots\right\}.$$

Заметим, что $x \geqslant 0$, следовательно, $Bx \geqslant 0$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Воспользуемся формулой Эйлера для суммы первых n членов гармонического ряда, а именно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n,$$

где $\gamma = 0.5772\ldots$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и теоремой 1. Получаем

$$0 \leqslant \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k =$$

Разобьем сумму на несколько сумм, каждая из которых содержит только фрагменты гармонического ряда. Пусть $j \in \mathbb{N}$ такое, что $2^j < m+1$ и $2^{j+1} \geqslant m+1$, а $s \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{j+s} \leqslant m+n$ и $2^{j+s+1} > m+n$, тогда

$$= \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=m+1-2^j}^{2^j} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2^{j+2}} \frac{1}{k} + \ldots + \sum_{k=1}^{2^{j+s}} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+n-2^{j+s}} \frac{1}{k} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n,j\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2^j} \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{k} \right) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{k} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^j} \left(\ln 2^j + \gamma + \varepsilon_{2^j} \right) = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = 0,$$

следовательно, $x \in ac_0$.

Замечание. Очевидно, что

$$L = \left\{ \lim_{j\to\infty} x_{2^j+1}, \lim_{j\to\infty} x_{2^j+2}, \lim_{j\to\infty} x_{2^j+3}, \ldots, \lim_{j\to\infty} x_{2^{j+1}} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\} \subset [0,1]$$

есть множество всех частичных пределов последовательности x. Множество L не является плотным в $[0,1]$, поскольку существует такой $y_0 \in [0,1]$, $y_0 \notin L$, и такая окрестность $(y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0)$, что $(y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0) \cap L = \varnothing$. В качестве y_0 можно взять $2/3$, а $\varepsilon_0 = 1/12$.

Следующая теорема говорит о существовании собственного подмножества ac_0, инвариантного относительно операции возведения в положительную степень.

Теорема 3. Пусть $x \geqslant 0$, $x \in ac_0$ и $\alpha > 0$, тогда $x^\alpha \in ac_0$.

Доказательство. Случай $x = (0, 0, \ldots)$ тривиален и рассматриваться не будет. Пусть $x \in ac_0$, тогда в силу (1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $x \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k < \varepsilon. \tag{5}$$

В дальнейших рассуждениях мы также воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\mathrm{p}} \right)^{1/\mathrm{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{\mathrm{q}} \right)^{1/\mathrm{q}}, \tag{6}$$

где x, y – некоторые последовательности, $\mathrm{p} > 1$, $\mathrm{q} > 1$, $1/\mathrm{p} + 1/\mathrm{q} = 1$.

Рассмотрим 2 случая: 1) Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Воспользуемся неравенством (6), чтобы оценить сумму. Положим $\mathrm{p} = 1/\alpha > 1$ и $\mathrm{q} = 1/(1-\alpha) > 1$. Тогда

$$0 \leqslant \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k^\alpha = \sum_{k=m+1}^{m+n} |x_k^\alpha \cdot 1| \leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} |x_k^\alpha|^{1/\alpha} \right)^{\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} |1|^{1/(1-\alpha)} \right)^{1-\alpha} =$$
$$= \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right)^{\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} 1 \right)^{1-\alpha} = \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha-1}. \tag{7}$$

Применяя оценку (5) и неравенство (7), получаем

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k^\alpha \leqslant \frac{1}{n} \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \right)^{\alpha} < \varepsilon^\alpha.$$

Значит, $x^\alpha \in ac_0$.

2) Пусть $\alpha > 1$, случай $\alpha = 1$ тривиален. Рассмотрим последовательность $y = x/\|x\|_{\ell_\infty}$, где $0 \leqslant y_k \leqslant 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что

$$x^\alpha \in ac_0 \Leftrightarrow y^\alpha = x^\alpha / \|x\|_{\ell_\infty}^\alpha \in ac_0. \tag{8}$$

Тогда

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} y_k^\alpha \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} y_k = \frac{1}{n\|x\|_{\ell_\infty}} \sum_{k=m+1}^{n+m} x_k < \frac{\varepsilon}{\|x\|_{\ell_\infty}}.$$

Значит, $y^\alpha \in ac_0$. В силу (8) получаем, что и $x^\alpha \in ac_0$. $\square$

Следствие 1. Пусть $x \geqslant 0$ и $x \in ac_0$, тогда $f(x) \in ac_0$ для любой непрерывной на $\left[0, \|x\|_{\ell_\infty}\right]$ функции f.

По теореме Вейерштрасса любую непрерывную на $\left[0, \|x\|_{\ell_\infty}\right]$ функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать многочленами. Отсюда и из теоремы 3 вытекает справедливость искомого утверждения.

Теорема 3 выполняется не только для неотрицательных последовательностей $x \in ac_0$. Заметим, что любую ограниченную последовательность $x \in \ell_\infty$ можно представить в виде $x = x^+ + x^-$, где $x^+ \geqslant 0$ и $x^- \leqslant 0$.

Следствие 2. Если $x \in ac_0$, $x^+ \in ac_0$, $x^- \in ac_0$, то $x^\alpha \in ac_0$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}$ или $\alpha = n/m$, где $n \in \mathbb{N}$ и m нечетно.

Справедливость это утверждения непосредственно вытекает из равенства $x^\alpha = (x^+)^\alpha + (x^-)^\alpha$ и теоремы 3.

Теорема 3 не может быть распространена на все пространство ac_0. Данный факт иллюстрирует следующий

Пример 4. Пусть

$$x_k = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если} \quad 2^{2j} \leqslant k < 2^{2j+1}, \\ 0, & \text{если} \quad 2^{2j+1} \leqslant k < 2^{2j+2}, \end{cases}$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$, т. е.

$$x = \{-1,\ 0, 0,\ 1, -1, 1, -1,\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$$
$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1,\ 0, \ldots\}.$$

В силу (2) для последовательности x имеем

$$p(x) = q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n}+1}^{2^{2n}+n} x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n+1}+1}^{2^{2n+1}+n} x_k = 0.$$

Следовательно, $x \in ac_0$. В свою очередь, для последовательности x^{2i}, где $i \in \mathbb{N}$, получаем

$$p\left(x^{2i}\right) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k^{2i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n}+1}^{2^{2n}+n} x_k^{2i} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1,$$

$$q\left(x^{2i}\right) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k^{2i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n+1}+1}^{2^{2n+1}+n} x_k^{2i} = 0.$$

Отсюда видим, что $p\left(x^{2i}\right) \neq q\left(x^{2i}\right)$, следовательно, $x^{2i} \notin ac$.

Теорема 3 не может быть распространена на ac_λ, $\lambda > 0$.

Теорема 5. Пусть $\lambda > 0$, тогда существует такой $x \in ac_\lambda$, $x \geqslant 0$, что $x^\alpha \notin ac$ для любого $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Доказательство: Рассмотрим последовательность

$$x_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 2^{2j} \leqslant k < 2^{2j+1} \quad \text{и} \quad k - \text{чётное}, \\ 2\lambda, & \text{если} \quad 2^{2j} \leqslant k < 2^{2j+1} \quad \text{и} \quad k - \text{нечётное}, \\ \lambda, & \text{если} \quad 2^{2j+1} \leqslant k < 2^{2j+2}, \end{cases}$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots$, т. е.

$$x = \lambda \cdot \{2,\ 1, 1,\ 0, 2, 0, 2,\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,\ 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2,\ 1 \ldots\}.$$

В силу (2) для последовательности x имеем

$$p(x) = q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n}+1}^{2^{2n}+n} x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n+1}+1}^{2^{2n+1}+n} x_k = \lambda.$$

Следовательно, $x \in ac_\lambda$. В свою очередь, для последовательности x^α, где $\alpha > 1$, получаем

$$p(x^\alpha) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k^\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n}+1}^{2^{2n}+n} x_k^\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^\alpha}{n} \cdot \frac{2^\alpha n}{2} = \lambda^\alpha \cdot 2^{\alpha-1},$$

$$q(x^\alpha) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k^\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{2n+1}+1}^{2^{2n+1}+n} x_k^\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^\alpha}{n} \cdot n = \lambda^\alpha.$$

Отсюда видим, что $p(x^{\alpha}) \neq q(x^{\alpha})$, следовательно, $x^{\alpha} \notin ac$. Аналогичный результат мы получаем и при $\alpha \in (0,1)$. $\square$

Автор благодарен Н. Н. Авдеева и Е. М. Семенова за объективную критику и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lorentz, G. G. A contribution to the theory of divergent sequences / G. G. Lorentz // Acta mathematica. — 1948. — V. 80, № 1. — P. 167–190.

2. Sucheston, L. Banach limits / L. Sucheston // The American Mathematical Monthly. — 1967. — V. 74, № 3. — P. 308–311.

3. Семенов, Е. М. Геометрия банаховых пределов и их приложения / Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев // Успехи математических наук. — 2020. — Т. 75, № 4. — С. 153–194.

4. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2004. — 720 с.

REFERENCES

1. Lorentz G.G. A contribution to the theory of divergent sequences. Acta mathematica, 1948, vol. 80, no. 1, pp. 167–190.

2. Sucheston L. Banach limits. The American Mathematical Monthly, 1967, vol. 74, no. 3, pp. 308–311.

3. Semenov E.M., Sukochev F.A., Usachev A.S. Geometry of Banach limits and their applications. [Semenov E.M., Sukochev F.A., Usachev A.S. Geometriya banahovyh predelov i ih prilozheniya]. *Uspekhi matematicheskih nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2020, vol. 75, no. 4, pp. 153–194.

4. Kudryavtsev L.D. Course of mathematical analysis. V 3 t. T. 2. Rows. Differential and integral calculus of functions of several variables. [Kudryavcev L.D. Kurs matematicheskogo analiza: v 3 t. T. 2. Ryady. Differencial'noe i integral'noe ischislenie funkcij mnogih peremennyh]. Moscow, 2004, 720 p.

Зволинский Роман Евгеньевич, студент, кафедра теории функций и геометрии математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com

Zvolinskii Roman Evgen'evich, student, the Department of Geometry and Functional Theory of the Faculty of Mathematics of the Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com