УДК 517

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА ТРИКОМИ ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. В. Дзарахохов[1], Э. Л. Шишкина[2,3]

[1] — *Горский государственный аграрный университет;*
[2] — *Воронежский государственный университет;*
[3] — *Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ "БелГУ")*

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

Аннотация. В работе исследуется краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа с кратными характеристиками. Для рассматриваемой задачи, при дополнительных требованиях на граничные функции, доказаны теоремы единственности и существования регулярного решения.

Ключевые слова: Уравнение смешанного типа, уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, интегральные уравнения, дробная производная, дробный интеграл.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE TRICOMI TYPE PROBLEM FOR A MIXED THIRD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A. V. Dzarakhokhov, E. L. Shishkina

Abstract. The paper examines a boundary value problem for a third-order equation of a parabolic-hyperbolic type with multiple characteristics. For the problem under consideration, the theorems of uniqueness and existence of a regular solution with additional requirements for boundary functions are proved.

Keywords: Mixed type equation, third-order equation with multiple characteristics, integral equations, fractional derivative, fractional integral.

1. ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение смешанного типа — это уравнение, которое в одной части области принадлежит одному типу, а в другой — другому типу. Эти части разделены линией или поверхностью. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов современной теории уравнений в частных производных. Этот интерес объясняется как теоретической значимостью полученных результатов, так и их важными практическими приложениями в трансзвуковой газовой динамике, в магнитодинамических и гидродинамических течениях с переходом через скорость звука, в теории бесконечно малых изгибов поверхностей и других областях. Ф. Трикоми [1, 2] и С. Геллерстедт [3] первыми поставили и исследовали краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Они изучали задачи для уравнения смешанного типа с одной линией параболического вырождения, известные сейчас как "задача Трикоми" и "задача Геллерстедта". Результаты М. Чибрарио посвящены классификации линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа, включая свод теорем существования и единственности решений таких уравнений [4]. Ф. И. Франкль [5, 6] положил начало новому этапу в развитии теории уравнений смешанного типа, обнаружив важные приложения задачи Трикоми и других родственных задач трансзвуковой газовой динамики. И. Н. Векуа [7] открыл приложения уравнений смешанного типа к теории бесконечно малых изгибаний, а также к безмоментной теории оболочек знакопеременной кривизны. М. Н. Коган [8] показал, что в магнитогидродинамике существует несколько типов смешанных течений, описываемых уравнениями смешанного типа. М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе [9] исследовали как теоретическую составляющую смешанных уравнений, так и их приложение к аппроксимативной модели газовой динамики. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с запаздывающим аргументом рассматривалась Е. И. Моисеевым и А. Н. Зарубиным в [11]. Затем были решены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа, собранные в монографии [10, 12, 13, 14]. А. П. Солдатов в [15] дал обзор различных корректных краевых задач для уравнений смешанного типа и их приложений в трансзвуковой газовой динамике.

Мы рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + bu_x, & y > 0, \quad b \in R, \\ u_{yy} - (-y)^m u_{xx} + \frac{p}{y} u_y, & 0 \leqslant p < 1, \quad m > 0, \quad y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

В конечной односвязной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 — область, ограниченная отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h$ соответственно, расположенных в полуплоскости $y > 0$. Область Ω_2 ограничена характеристиками уравнения (1) при $y < 0$ вида:

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

и отрезком AB (см. Рис. 1).

Решение $u = u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω называется регулярным если $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_2)$, $u_{xxx}, u_y \in C(\Omega_1)$ и функция $v(x) = \lim\limits_{y\to 0+} u_y(x,y) = \lim\limits_{y \to 0-} (-y)^p u_y(x,y)$ при $x \to 0$ и $x \to 1$ может стремиться к бесконечности порядка меньше единицы.

Мы докажем существование и единственность решения следующей задачи.

Задача. Найти функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$;

2) $u(x,y)$ — регулярное решение (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) на линии $y = 0$ выполняются условия склеивания для уравнения (1) вида

$$\lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} (-y)^p u_y(x,y), \quad x \in [0,1]; \tag{2}$$

4) $u = u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_2(y), \quad u(1,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \qquad y < 0, \tag{4}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 заданные на $[0,1]$ непрерывные функции, ψ — дважды непрерывно дифференцируемая, заданная на $[0,1/2]$ функция.

Справедливы обычные условия согласования вида $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_2(0) = \psi'(0)$.

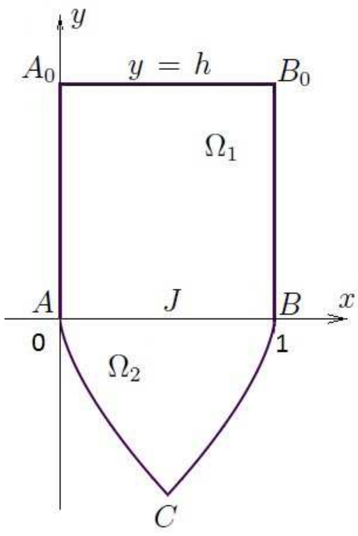

Рис. 1. *Область* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

2. ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Далее мы будем использовать некоторые методы дробного исчисления. Пусть $\varphi(x) \in L_1(a,b)$, тогда интеграл

$$(I_a +^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \quad x > a, \tag{5}$$

где $\alpha > 0$, называется дробным интегралом порядка α на отрезке $[a,b]$. Если $\alpha > 0$ и не является целым, $n = [\alpha] + 1$ то левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка α на отрезке $[a,b]$ функции $f(x) \in L_1(a,b)$ имеет вид:

$$(D^{\alpha}_{a+} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{6}$$

где $I^{n-\alpha}_{a+} f \in C^n(a,b)$.

Решение задачи

$$u_{yy} - y^m u_{xx} + \frac{p}{y} u_y = 0, \qquad m > 0, \qquad 0 \leqslant p < 1, \qquad y > 0,$$

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad \lim_{y \to 0+} y^p u_y = v(x)$$

единственно и имеет вид [16]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma^2(q)} \int\limits_0^1 \tau\left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right) t^{q-1}(1-t)^{q-1} dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2q) y^{1-p}}{(1-p)\Gamma^2(1-q)} \int\limits_0^1 v\left(x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right) t^{-q}(1-t)^{-q} dt, \tag{7}$$

где $0 < q = \frac{m+2p}{2(m+2)} < 1$.

Теорема 1. *Пусть* $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$,*тогда регулярное решение уравнения (1) при выполнении условий (2)–(4) и при* $2\varphi_3(0)\psi_2''(1) + b\varphi_3^2(0) + \varphi_2^2(0) \geqslant (\psi_2'(1))^2 + 2\varphi_1(0)\psi_1'(0) + b\varphi_1^2(0)$ *единственно в области* Ω.

Доказательство. Разделим доказательство на две части: в первой части докажем единственность решения задачи в области Ω_1, а во второй части — в Ω_2.

1) Найдем решение $u = u(x,y)$ уравнения

$$u_{xxx} - u_y + bu_x = 0, \qquad b = const, \tag{8}$$

которое будет регулярным в области Ω_1, и такое, что $u_{xx} \in C(\Omega_2 \cup AA_0 \cup BB_0)$, удовлетворяет начальным условиям вида

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{9}$$

и граничным условиям вида

$$u(0,y) = 0, \quad u_x(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h. \tag{10}$$

Предположим, что эта задача имеет нетривиальное решение $u = u(x,y) = v(x,y)e^{\mu x} \neq 0$, $v = v(x,y) \neq 0$, $\mu > 0$. В этом случае мы имеем, что функция $v(x,y)$ есть решение задачи

$$L_\mu v = v_{xxx} - v_y + bv_x - \mu v = 0,$$

$$v(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$v(0,y) = 0, \quad v_x(0,y) = 0, \quad v(1,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h.$$

Рассмотрим область

$$\Omega_{1\varepsilon} = \{(x,y) : \varepsilon < x < 1-\varepsilon, \varepsilon < y < h-\varepsilon, \varepsilon > 0\}.$$

Справедливо следующее равенство

$$\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} 2vL_\mu v dxdy = \int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} 2v(v_{xxx} - v_y + bv_x - muv)dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(2vv_{xx} - v_x^2 + bv^2) - \frac{\partial}{\partial y}(v^2)\right] dxdy - 2\mu \int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} v^2 dxdy = 0.$$

С учетом формулы Грина получаем

$$\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} 2vL_\mu v dxdy = \int\limits_{\partial\Omega_{1\varepsilon}} (2vv_{xx} - v_x^2 + bv^2)dy + v^2 dx - 2\mu \int\limits_{1\varepsilon} v^2 dxdy = 0,$$

где $\partial\Omega_{1\varepsilon}$ — граница области $\Omega_{1\varepsilon}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_{\Omega_1} 2vL_\mu v dxdy = -\int\limits_0^h (2v(0,y)v_{xx}(0,y) - v_x^2(0,y) + bv^2(0,y))dy +$$

$$+ \int\limits_0^h (2v(1,y)v_{xx}(1,y) - v_x^2(1,y) + bv^2(1,y))dy + \int\limits_0^1 v^2(x,0)dx - \int\limits_0^1 v^2(x,h)dx - 2\mu \int\limits_{\Omega_1} v^2 dxdy.$$

Поскольку $v(x,0) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $v(0,y) = 0$, $v_x(0,y) = 0$, $v(1,y) = 0$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, мы получим

$$\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} 2vL_\mu v dxdy = -\int\limits_0^h v_x^2(1,y)dy - \int\limits_0^1 v^2(x,h)dx - 2\mu \int\limits_{\Omega_1} v^2 dxdy < 0$$

если $v(x,y) \neq 0$ при $\mu > 0$. Но $\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} 2vL_\mu v dxdy = 0$, следовательно $v(x,y) \equiv 0$ везде в Ω_1и, поэтому, для однородной задачи (8)–(10) $v(x,y)e^{\mu x} = u(x,y) \equiv 0$ везде в Ω_1. Следовательно, решение $u(x,y)$ поставленной задачи единственно в Ω_1.

2) Пусть $u = u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,y) = \tau(x), \quad \lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} (-y)^p u_y(x,y) = v(x). \tag{11}$$

Покажем теперь, что в области Ω_2 при условиях (3) (при $y \to -0$) однородная задача Коши

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} + \frac{p}{y} u_y = 0 \tag{12}$$

имеет только тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$.

Переходя к пределу в формуле (1) при $y \to 0+$и принимая во внимание условия (3) и (11), получим фундаментальные соотношения между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, возникающие при переходе из параболической части Ω_1 области Ω через линию $y = 0$:

$$\tau'''(x) + b\tau'(x) = v(x), \tag{13}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau(1) = \varphi_3(0). \tag{14}$$

Для задачи (13)–(14) справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 \tau(x)v(x)dx \geqslant 0. \tag{15}$$

В самом деле,

$$\int\limits_0^1 \tau(x)v(x)dx = \int\limits_0^1 \tau(x)\left(\tau'''(x) + b\tau'(x)\right)dx = \left(\tau(x)\tau''(x) - \frac{1}{2}\left(\tau'(x)\right)^2 + \frac{b}{2}\tau^2(x)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \varphi_3(0)\psi_2''(1) - \frac{1}{2}(\psi_2'(1))^2 + \frac{b}{2}(\varphi_3(0))^2 - \varphi_1(0)\psi_1'(0) + \frac{1}{2}(\varphi_2(0))^2 - \frac{b}{2}(\varphi_1(0))^2 =$$

$$= \varphi_3(0)\psi_2''(1) + \frac{b}{2}\varphi_3^2(0) + \frac{1}{2}\varphi_2^2(0) - \left(\frac{1}{2}(\psi_2'(1))^2 + \varphi_1(0)\psi_1'(0) + \frac{b}{2}\varphi_1^2(0)\right) \geqslant 0$$

с учетом условия теоремы. Используя представление решения задачи Коши (7) при $y < 0$, принадлежащее $C(\overline{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega_2)$, получим

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma^2(q)} \int\limits_0^1 \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right) t^{q-1}(1-q)^{q-1}dx +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2q)(-y)^{1-p}}{(1-p)\Gamma^2(1-q)} \int\limits_0^1 v\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right) t^{-q}(1-t)^{-q}dt. \tag{16}$$

Пусть

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ \psi_2(x), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

С учетом условия (4), будем иметь

$$\psi(x) = \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma^2(q)} \int\limits_0^1 \tau(2xt) t^{q-1}(1-t)^{q-1} dt + \frac{\Gamma(2-2q)\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^{\frac{2-2p}{m+2}} x^{\frac{2-2p}{m+2}}}{(1-p)\Gamma^2(1-q)} \int\limits_0^1 \nu(2xt) t^{-q}(1-q)^{-q} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma^2(q)} \int\limits_0^1 \tau\,(2xt)\, t^{q-1}(1-t)^{q-1} dt + \frac{\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{\frac{2-2p}{m+2}} x^{1-2q}}{(1-p)\Gamma^2(1-q)} \int\limits_0^1 \nu\,(2xt)\, t^{-q}(1-t)^{-q} dt =$$

$$= \{2xt = z\} =$$

$$= \frac{\Gamma(2q)(2x)^{1-2q}}{\Gamma^2(q)} \int\limits_0^{2x} \tau(z) z^{q-1}(2x-z)^{q-1} dz +$$

$$+ \frac{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{\frac{2-2p}{m+2}}}{(1-p)\Gamma^2(1-q)} \int\limits_0^{2x} \nu(z) z^{-q}(2x-z)^{-q} dz.$$

Тогда

$$\frac{\Gamma(2q)x^1 - 2q}{\Gamma^2(q)} \int\limits_0^x \tau(z) z^{q-1}(x-z)^{q-1} dz =$$

$$= \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}{(1-p)\Gamma^2(1-q)} \int\limits_0^x \nu(z) z^{-q}(x-z)^{-q} dz.$$

Используя обозначения дробного интеграла Римана-Лиувилля (5), получим

$$I_{0+}^q x^{q-1}\tau(x) = \frac{\Gamma(q)x^{2q-1}}{\Gamma(2q)} \left[\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}{(1-p)\Gamma(1-q)} I_{0+}^{1-q} x^{-q} \nu\,(x)\right], \tag{17}$$

тогда,

$$\tau(x) = \frac{x^{1-q}\Gamma(q)}{\Gamma(2q)} \left[D_{0+}^q x^{2q-1}\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}{(1-p)\Gamma(1-q)} D_{0+}^q x^{2q-1} I_{0+}^{1-q} x^{-q} \nu\,(x)\right].$$

Можем записать

$$D_{0+}^q x^{2q-1} I_{0+}^{1-q} x^{-q} \nu\,(x) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} D_{0+}^q x^{2q-1} \int\limits_0^x \nu(z) z^{-q}(x-z)^{-q} dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-q)\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x t^{2q-1}(x-t)^{-q} dt \int\limits_0^t \nu(z) z^{-q}(t-z)^{-q} dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-q)\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \nu(z) z^{-q} dz \int\limits_z^x t^{2q-1}(t-z)^{-q}(x-t)^{-q} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}2^{2q-1}}{\Gamma(1-q)\Gamma\left(\frac{3}{2}-q\right)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x v\left(z\right) z^{q-1} (x-z)^{1-2q} {}_2F_1\left(1-2q{,}1-q;2-2q;1-\frac{x}{z}\right) dz =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}2^{2q-1}(1-2q)}{\Gamma(1-q)\Gamma\left(\frac{3}{2}-q\right)} \int\limits_0^x \nu\left(z\right) z^{q-1} (x-z)^{-2q} \left(\frac{x}{z}\right)^{q-1} dz =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}2^{2q}x^{q-1}}{\Gamma(1-q)\Gamma\left(\frac{1}{2}-q\right)} \int\limits_0^x \nu\left(z\right) (x-z)^{-2q} dz = \frac{\sqrt{\pi}2^{2q}\Gamma(1-2q)}{\Gamma(1-q)\Gamma\left(\frac{1}{2}-q\right)} x^{q-1} I_{0+}^{1-2q}\nu(x) =$$

$$= x^{q-1} I_{0+}^{1-2q} v(x).$$

Следовательно,

$$\tau(x) = \frac{x^{1-q}\Gamma(q)}{\Gamma(2q)} \left[D_{0+}^q x^{2q-1}\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}{(1-p)\Gamma(1-q)} x^{q-1} I_{0+}^{1-2q} v(x) \right] =$$

$$= \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(2q)} \left[x^{1-q} D_{0+}^q x^{2q-1}\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}{(1-p)\Gamma(1-q)} I_{0+}^{1-2q} v(x) \right].$$

Для $\psi \equiv 0$ имеем

$$\tau(x) = C(p{,}m) I_{0+}^{1-2q} v(x),$$

$$C(p{,}m) = -\frac{2^{2q-1}\Gamma(q)\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}{(1-p)\Gamma(2q)\Gamma(1-q)} < 0,$$

поскольку $0 \leqslant p < 1$ и $0 < q < 1$. Тогда

$$v(x) = \frac{1}{C(p{,}m)} D_{0+}^{1-2q} \tau(x).$$

По теореме 1.7.1 из [16] мы получим

$$\int\limits_0^1 \tau(x) D_{0+}^{1-2q} \tau(x) dx \geqslant 0,$$

тогда

$$\int\limits_0^1 \tau(x) v(x) dx = \frac{1}{C(p{,}m)} \int\limits_0^1 \tau(x) D_{0+}^{1-2q} \tau(x) dx \leqslant 0. \tag{18}$$

Следовательно, из (15) и (18), получим

$$\int\limits_0^1 \tau(x) v(x) dx = 0.$$

Это означает, что $\tau(x) \equiv 0$ и $v(x) \equiv 0$. В силу (16), получаем, что решение задачи

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} + \frac{p}{y} u_y = 0,$$

$$u(x{,}y)|_{AC} = 0$$

при дополнительных требованиях из условий доказательства теоремы тождественно равен нулю в Ω_2. Это означает, что решение рассматриваемой задачи в Ω_2 единственно.

3. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2)–(4) существует.*

Доказательство. Нам нужно показать разрешимость задачи (13)–(14), где функции τ и v связаны равенством (17). Тогда, используя функции τ и
v, решение рассматриваемой задачи в области Ω_1 может быть найдено как решение задачи

$$u_{xxx} - u_y + bu_x = 0,$$

$$u(x{,}0) = \tau(x),$$

$$u_x(0{,}y) = \varphi_1(y), \qquad u_x(0{,}y) = \varphi_2(y), \qquad u(1{,}y) = \varphi_3(y),$$

которая разрешима в в области Ω_2. В этом случае решение рассматриваемой нами задачи определяется как решение задачи Коши (7).

Итак, докажем, что функции τ и v существуют. Из (17) получаем

$$v(x) = x^q \frac{(1-p)\Gamma(1-q)}{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}} \left[D_{0+}^{1-q}\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma(q)} D_{0+}^{1-q} x^{1-2q} I_{0+}^{q} x^{q-1}\tau(x) \right].$$

Далее, исключая из (13) функцию $v(x)$ получаем краевую задачу для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) + b\tau'(x) = \rho(x).$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau(1) = \varphi_3(0),$$

где

$$\rho(x) = p(x) + E\int_0^x \frac{(\xi^{-\frac{\alpha}{3}}\tau(\xi))' d\xi}{(x-\xi)^{1+2\beta_1}}, \tag{19}$$

$$p(x) = \frac{(1-p)\Gamma(1-q)}{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}} x^q D_{0+}^{1-q}\psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$E = -x^q \frac{(1-p)\Gamma(1-q)}{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}} \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma(q)}.$$

Полагая $\tau(x) = h(x) + Ax^2 + Bx + C$ и принимая во внимание граничные условия (14) вместо (13)–(14) получаем задачу с однородными краевыми условиями относительно $h(x)$

$$h'''(x) + bh'(x) = \rho(x) + f(x), \tag{20}$$

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h(1) = 0, \tag{21}$$

где $f(x) = 2(\varphi_3(0) - \varphi_2(0) - \varphi_1(0) + \varphi_2(0)$.

Построим для задачи (20)-(21) функцию Грина, которая будет существенно зависеть от корней характеристического уравнения

$$k^3 - k = 0, \tag{22}$$

соответствующего однородному уравнению

$$h'''(x) - h'(x) = 0 \tag{23}$$

при $b = -1$. Обозначим через $D = 4 - 27\lambda^2$ дискриминант уравнения (22).

Пусть $D < 0$, т. е. $\lambda \in (-\infty; -2/(3\sqrt{3})) \cup (2/(3\sqrt{3}); \infty)$. В этом случае характеристическое уравнение (21) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$h(x) = c_1 \exp(\alpha_0 x) + \exp[(-\alpha_0 x)/2](c_2 \cos\gamma\, x + c_3 \sin\gamma\, x), \tag{24}$$

где

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{27}}}, \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{27}}}\right).$$

В силу граничных условий (21) для функции (24), получим систему

$$\begin{cases} h(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ h'(0) = \alpha_0 c_1 - \frac{\alpha_0}{2} c_2 + \gamma c_3 = 0, \\ h(1) = c_1 \exp\alpha_0 + c_2 \exp(-\frac{\alpha_0}{2})\cos\gamma + c_3 \exp(-\frac{\alpha_0}{2})\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

с определителем $\Delta(\lambda) = \gamma \exp\alpha_0 - \left(\gamma\cos\gamma + \frac{3}{2}\alpha_0 \sin\gamma\right)\exp\left(-\frac{\alpha_0}{2}\right)$. Пусть λ таково, что $\Delta(\lambda) \neq 0$. Будем искать функцию Грина ее в виде

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} a_1 \exp(a_0 x) + a_2 \exp(-\frac{a_0}{2}x)\cos\gamma x + \\ \quad + a_3 \exp(-\frac{a_0}{2}x)\sin\gamma x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ b_1 \exp(a_0 x) + b_2 \exp(-\frac{a_0}{2}x)\cos\gamma x + \\ \quad + b_3 \exp(-\frac{a_0}{2}x)\sin\gamma x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция Грина $G_0(x,\xi)$ непрерывна в точке $x = \xi$ вместе со своей первой производной по x, а ее вторая производная по x в этой точке терпит скачок, равный 1. Это дает:

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)\exp(a_0\xi) + (b_2 - a_2)\exp(-\frac{a_0}{2}\xi)\cos\gamma\xi + \\ \quad + (b_3 - a_3)\exp(-\frac{a_0}{2}\xi)\sin\gamma\xi = 0, \\ a_0(b_1 - a_1)\exp(a_0\xi) + (b_2 - a_2)\left(-\frac{a_0}{2}\cos\gamma\xi - \gamma\sin\gamma\xi\right)\exp\left(-\frac{a_0}{2}\xi\right) + \\ \quad + (b_3 - a_3)\left(\gamma\cos\gamma\xi - \frac{a_0}{2}\sin\gamma\xi\right)\exp\left(-\frac{a_0}{2}\xi\right) = 0, \\ a_0^2(b_1 - a_1)\exp(a_0\xi) + (b_2 - a_2)\left[\left(-\frac{a_0^2}{4} - \gamma^2\right)\cos\gamma\xi + \gamma a_0 \sin\gamma\xi\right] \times \\ \quad \times \exp\left(-\frac{a_0}{2}\xi\right) + (b_3 - a_3)\left[\left(\frac{a_0^2}{4} - \gamma^2\right)\sin\gamma\xi + \gamma a_0\cos\gamma\xi\right] \times \\ \quad \times \exp\left(-\frac{a_0}{2}\xi\right) = 1. \end{cases}$$

Учитывая однородные граничные условия, получим систему

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ \alpha_0 a_1 - \alpha_0 a_2/2 + \gamma a_3 = 0, \\ b_1 \exp(\alpha_0) + b_2 \exp(-\frac{\alpha_0}{2})\cos\gamma + b_3 \exp(-\frac{\alpha_0}{2})\sin\gamma = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Определителем системы (25) является определитель Вронского, который в силу линейной независимости частных решений отличен от нуля. Следовательно, разности $a_i - b_i$, $i = \overline{1,3}$ определяются однозначно. Учитывая это, из системы (25) находим значения неизвестных коэффициентов a_i, b_i, $i = \overline{1,3}$:

$$a_1 = -q_0(\xi)w_0(\xi)/k_0, \quad a_2 = q_0(\xi)w_0(\xi)/k_0, \quad a_3 = 3\alpha_0 q_0(\xi)w_0(\xi)/k_0,$$

$$b_1 = 4\exp(-\alpha_0\xi)/[4\gamma^2 + 9\alpha_0^2] - q_0(\xi)/k_0,$$
$$b_2 = \{q_0(\xi)w_1(\xi) - [4\gamma^2 + 9\alpha_0]w_2(\xi)\sin\gamma\xi\sin\gamma\}/k_0,$$
$$b_3 = \{(18\alpha_0^2 + 8\gamma)\cos\gamma\sin\gamma\xi w_0(\xi) - 4\gamma(3\alpha_0\cos\gamma\xi + 2\gamma\sin\gamma\xi)w_1(\xi)\}/k_0,$$

где $q_0(\xi) = 6\alpha_0\sin\gamma\xi - 4\gamma\cos\gamma\xi$, $w_0(\xi) = \exp\frac{\alpha_0(\xi-1)}{2}$, $w_1(\xi) = \exp\frac{\alpha_0(\xi+2)}{2}$, $w_2(\xi) = \exp\frac{\alpha_0(\xi+1)}{2}$, $k_0 = (4\gamma^2 + 9\alpha_0^2)[\exp(\alpha_0) - \exp(-\frac{\alpha_0}{2})\cos\gamma - \frac{3\alpha_0}{2}\exp(-\frac{\alpha_0}{2})\sin\gamma]$.

Подставляя найденные значения коэффициентов в $G_0(x,\xi)$, получаем явный вид функции Грина

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} [-q_0(\xi)w_0(\xi)/k_0]g_0(x), & 0 \leqslant x < \xi, \\ \big\{4\exp(-\alpha_0\xi)/[4\gamma^2 + 9\alpha_0^2] - q_0(\xi)/k_0\big\}\exp(\alpha_0 x) + \\ +\{q_0(\xi)w_1(\xi)/k_0[\sin\gamma\sin\gamma\xi w_0(\xi)]/g_0(1)\}\times \\ \times\exp(-\frac{\alpha_0}{2}x)\cos\gamma x + \{\frac{\cos\gamma\sin\gamma\xi w_0(\xi)}{g_0(1)} - \\ -2(3\alpha_0\cos\gamma\xi + 2\gamma\sin\gamma\xi)w_1(\xi)/k_0\}\times \\ \times\exp(-\frac{\alpha_0}{2}x)\sin\gamma x, & \xi < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где $g_0(x) = \exp(\alpha_0) - \exp\left(-\frac{\alpha_0}{2}x\right)\cos\gamma\, x - \left[3\alpha_0\exp\left(-\frac{\alpha_0}{2}x\right)\sin\gamma\, x\right]/2\gamma$.

Положим теперь $D = 0$. В этом случае все корни уравнения (22) действительны, причем два из них равны между собой, т. е. $\alpha_1 = 2/\sqrt{3}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -1/\sqrt{3}$. Общее решение уравнения (23) в этом случае имеет вид

$$h(x) = C_1\exp[(2x)/\sqrt{3}] + C_2\exp[(-x)/\sqrt{3}] + C_3 x\exp[(-x)/\sqrt{3}]. \tag{26}$$

Учитывая условиям (21), получаем систему, которая имеет только нулевое решение, т. е. $h(x) \equiv 0$.

Следуя схеме предыдущего случая, можно получить явный вид функции Грина

$$G_1(x,\xi) = \begin{cases} [q_1(\xi)g_1(x)]/g_1(1), & 0 \leqslant x < \xi, \\ \{[\exp(-2/\sqrt{3})]/3 - q_1(\xi)/[3q_1(1)]\}\exp(2/(\sqrt{3}x)) + \\ +\{[(\sqrt{3}\xi - 1)\exp(\xi/\sqrt{3})]/3 + \\ +q_1(\xi)/(3g_1(1))\}\exp(-\frac{x}{\sqrt{3}}) + \{q_1(\xi)/(3g_1(1)) - \\ -[\sqrt{3}\exp(-\xi/\sqrt{3})]/3\}x\exp(-\xi/\sqrt{3}), & \xi < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где

$$q_1(\xi) = [\sqrt{3}(1-\xi) + 1]\exp[(\xi-1)/\sqrt{3}] - \exp[2(1-\xi)/\sqrt{3}],$$
$$g_1(x) = (1+3x)\exp(-x/\sqrt{3}) - \exp(2x/\sqrt{3}).$$

Пусть, наконец, $D > 0$, т. е. $-(2/3\sqrt{3}) < \lambda < (2/3\sqrt{3})$. В этом случае уравнение (22) имеет три различных действительных корня и они не могут быть выражены через коэффициенты при помощи радикалов с действительными подкоренными выражениями. Поэтому этот случай решения уравнения (22) называется неприводимым. Здесь рассмотрим частный случай, когда $\lambda = 0$.

Удовлетворяя общее решение $h(x) = C_1 + C_2\exp x + C_3\exp(-x)$ уравнения (23) краевым условиям (21), получаем, что $h(x) \equiv 0$.

Функция Грина в этом случае имеет вид

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} \frac{2-\exp(1-\xi)-\exp(\xi-1)}{2(e+e^{-1}-2)}[\exp x + \exp(-x) - 2], & 0 \leqslant x < \xi, \\ \frac{\exp(1-\xi)+\exp(\xi-1)-2}{2(e+e^{-1}-2)} + \\ +\frac{2-2\exp(-\xi)-\exp(\xi-1)+\exp(-(\xi-1))}{2(e+e^{-1}-2)}\exp x + \\ +\frac{2-2\exp(\xi)-\exp(1-\xi)+\exp(\xi+1)}{2(e+e^{-1}-2)}\exp(-x) - 1, & \xi < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом нами построены функции Грина для трех возможных случаев дискриминанта D.

Следовательно, решение краевой задачи (20)-(21) эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$h(x) = \int_0^1 G_i(x,\xi)\rho(\xi)d\xi + n(x), \quad i = 0,1,2, \tag{27}$$

где $n(x) = \int_0^1 g_i(x,\xi)f(\xi)d\xi$, $i = 0{,}1{,}2$.

Подставляя значение $\rho(x)$ из (19) в (27), и поменяв порядок интегрирования, получим

$$h(x) = \mathrm{E}\int_0^1 \Lambda(x,\xi)(\xi^{-\frac{\alpha}{3}}\tau(\xi))'d\xi + r(x),$$

где $\Lambda(x,\xi) = \int_\xi^1 \frac{G_i(x,\xi_1)d\xi_1}{(\xi_1-\xi)^{1+2\beta_1}}$, $i = 0{,}1{,}2$, $r(x) = \int_0^1 G_i(x,\xi)(p(\xi) + f(\xi))d\xi$.

Переходя от $h(x)$ к $\tau(x)$, получим

$$\tau(x) = \mathrm{E}\int_0^1 \Lambda(x,\xi)(\xi^{-\frac{\alpha}{3}}\tau(\xi))'d\xi + m(x), \tag{28}$$

где $m(x) = r(x) + (\varphi_3(0) - \varphi_2(0) - \varphi_1(0))x^2 + \varphi_2(0)x + \varphi_1(0)$.

Умножая (28) на $x^{-\frac{\alpha}{3}}$, а затем дифференцируя полученное равенство по x будем иметь

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \overline{\Lambda}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \overline{m}(x), \tag{29}$$

где $\overline{\Lambda}(x,\xi) = (x^{-\frac{\alpha}{3}}\Lambda(x,\xi))'_x$, $\overline{m}(x) = (x^{-\frac{\alpha}{3}}m(x))'_x$, $\lambda = \mathrm{E}$.

Однозначная разрешимость интегрального уравнения (29) устанавливается методом последовательных приближений. После определения функции $\tau(x)$ из равенства

$$v(x) = x^q\frac{(1-p)\Gamma(1-q)}{2^{2q-1}\Gamma(2-2q)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-2q}}\left[D_{0+}^{1-q}\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma(2q)}{\Gamma(q)}D_{0+}^{1-q}x^{1-2q}I_{0+}^{q}x^{q-1}\tau(x)\right].$$

находим $v(x)$. Доказательство закончено.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего слагаемые с младшими производными для уравнения, отличного от уравнения в этой работе рассматривался в [17–19]. Нелокальная краевая задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения третьего порядка была рассмотрена в [20]. В [21] изучалась нелокальная краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, содержащих уравнения третьего порядка привлекает к себе внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложением. К задачам указанного типа приводят такие задачи как исследование отклонения изогнутой балки, в случае, когда трехслойная балка образована параллельными слоями разных материалов; изучение рассеивания электромагнитной волны, падающей на систему зарядов; построение моделей систем с обратной связью, содержащих электрогидравлические золотники и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трикоми, Ф. С. Все об уравнении $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ / Ф. С. Трикоми // Рендик. АСС. Линсей. — 1927. — № 6. — С. 567–571.

2. Трикоми, Ф. С. Линейные уравнения смешанного типа / Ф. С. Трикоми. — М. : Гостехиздат, 1947.

3. Геллерстедт, С. Сложные проблемы, связанные с уравнением $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ / С. Геллерстедт // Арк. Мат. Астр. Физ. — 1938. — Т. 26A, № 3. — С. 78–93.

4. Сибрарио, М. линейному уравнению к частичным производным второго порядка гиперболико-эллиптического смешанного типа / М. Сибрарио, К. Intorno // Энн. Скуола Норм. Супер. Pisa Cl. Sci. — 1934. — Т. 3, № 3–4. — С. 255–285.

5. Франкль, Ф. И. О задачах С.А.Чаплыгина для смешанных суб- и сверхзвуковых течений / Ф. И. Франкль // Известия Академии наук СССР. Математическая серия. — 1945. — Т. 9, № 2. — С. 121–142.

6. Франкль, Ф. И. Избранные труды по газовой динамике / Ф. И. Франкль. — М. : Наука, 1973. — 711 с.

7. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — Оксфорд–Лондон–Нью-Йорк–Париж : Пергамон пресс, 1962. — XXIX+668 с.

8. Коган, М. Н. О магнитогидродинамических потоках смешанного типа / М. Н. Коган // ПММ. — 1961. — Т. 25, № 1. — С. 132–137.

9. Лаврентьев, М. А. К задаче об уравнениях смешанного типа / М. А. Лаврентьев, А. В. Бицадзе // Докл. Акад. Наук СССР. — 1950. — Т. 70. — С. 373–376.

10. Бицадзе, А. В. Уравнения смешанного типа / А. В. Бицадзе // Итоги науки и техники. — 1959. — 174 с.

11. Моисеев, Е. М. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с запаздывающим аргументом / Е. И. Моисеев, А. Н. Зарубин // Дифференц. Уравнения. — 2001. — Т. 37, № 9. — С. 1212–1215.

12. Bers, L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics / L. Bers. — New York : Wiley, 1958. — 164 p.

13. Смирнов, М. М. Уравнения смешанного типа / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1970. — 296 с.

14. Моисеев, Е. И. Дифференциальные уравнения в частных производных смешанного типа со спектральными параметрами / Е. И. Моисеев. — М. : Изд-во МГУ, 1988. — 150 с.

15. Солдатов, А. П. К теории уравнений смешанного типа / А. П. Солдатов // Журнал математических наук. — 2005. — Т. 129. — С. 3670–3679.

16. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

17. Балкизов, Ж. А. Первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности / Ж. А. Балкизов // Уфимский математический журнал. — 2017. — Т. 9, № 2. — С. 25–39.

18. Балкизов, Ж. А. Смешанная задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с производными второго порядка в граничных условиях / Ж. А. Балкизов // Научные ведомости БелГУ. Серия : Математика. Физика. — 2017. — № 20(269). — С. 40–49.

19. Балкизов, Ж. А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с нелокальным условием по времени / Ж. А. Балкизов // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. — 2017. — № 1(85). — С. 8–16.

20. Дзарахохов, А. В. Нелокальная краевая задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения третьего порядка / А. В. Дзарахохов // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. — 2008. — С. 78–82.

21. Дзарахохов, А. В. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками / А. В. Дзарахохов // Владикавказский математический журнал. — 2005. — Т. 7, № 1. — С. 46–50.

REFERENCES

1. Tricomi F.C. Ancora sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$. [Trikomi F.S. Vse ob uravnenii $yz_{xx}+z_{yy}=0$]. *Rendik. ASS. Linsej — Rendic. Acc. Lincei*, 1927, no. 6, pp. 567–571.

2. Tricomi F.C. Linear Equations of Mixed Type. [Trikomi F.S. Linejnye uravneniya smeshannogo tipa]. Moscow: Gostekhizdat, 1947.

3. Gellerstedt S. Quelgues problemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. [Gellerstedt S. Slozhnye problemy, svyazannye s uravneniem $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$]. *Ark. Mat. Astr. Fiz — Ark. Mat. Astr. Fys*, 1938, vol. 26A, no. 3, pp. 78–93.

4. Cibrario, Maria, Intorno. Ad una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica. [Sibrario, Mariya, Intorno K linejnomu uravneniyu k chastichnym proizvodnym vtorogo poryadka giperboliko-ellipticheskogo smeshannogo tipa]. *Enn. Skuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1934, vol. (2) 3, no. 3–4, pp. 255–285.

5. Frankl F.I. On the problems of S.A. Chaplygin for mixed sub- and supersonic flows. [Frankl' F.I. O zadachakh S.A.Chaplygina dlya smeshannykh sub- i sverkhzvukovykh techeniy]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Matematicheskaya seriya — News of the USSR Academy of Sciences. Ser. math.*, 1945, vol. 9, no. 2. pp. 121–142.

6. Frankl F.I. Selected works on gas dynamics. [Frankl' F.I. Izbrannyye trudy po gazovoy dinamike]. M.: Nauka, 1973, 711 p.

7. Vekua I.N. Generalized Analytic Functions. [Vekua I.N. Obobshchennye analiticheskie funkcii]. Oxford/London/New York/Paris, Pergamon Press, 1962, 668 p.

8. Kogan M.N. On magnetohydrodynamic flows of mixed type. [Kogan M.N. O magnitogidrodinamicheskih potokah smeshannogo tipa]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1961, vol. 25, no. 1, pp. 132–137.

9. Lavrent'ev M.A., Bitsadze A.V. On the problem on mixed-type equations. [Lavrent'ev M.A., Bicadze A.V. K zadache ob uravneniyah smeshannogo tipa]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR — Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1950, vol. 70, pp. 373–376.

10. Bitsadze A.V. Equations of the mixed type. [Bicadze A.V. Uravneniya smeshannogo tipa]. Moscow, 1959, 174 p.

11. Moiseev E.I., Zarubin A.N. The Tricomi Problem for the Lavrent'ev-Bitsadze Equation with Retarded Argument. [Moiseev E.I., Zarubin A.N. Zadacha Trikomi dlya uravneniya Lavrent'eva-Bicadze s zapazdyvayushchim argumentom]. *Differencialnie uravneniya — Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 9, pp. 1212–1215.

12. Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Surv. Appl. Math., 3. Wiley, New York, 1958, 164 p.

13. Smirnov M.M. Mixed-type equations. [Smirnov M.M. Uravneniya smeshannogo tipa]. Moscow: Nauka, 1970, 296 p.

14. Moiseev E.I. Partial Differential Equations of Mixed Type with Spectral Parameters. [Moiseev E.I. Differencial'nye uravneniya v chastnyh proizvodnyh smeshannogo tipa so spektral'nymi parametrami]. Moscow, 1988, 150 p.

15. Soldatov A.P. On the Theory of Mixed-Type Equations. [Soldatov A.P. K teorii uravnenij smeshannogo tipa]. *Zhurnal matematicheskih nauk — Journal of Mathematical Science*, 2005,

vol. 129, pp. 3670–3679.

16. Nakhushev A.M. Fractional calculation and its application. [Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 p.

17. Balkizov Zh.A. The first boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third order with decay type and order in the sphere of its hyperbolicity. [Balkizov ZH.A. Pervaya kraevaya zadacha dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa tret'ego poryadka s vyrozhdeniem tipa i poryadka v oblasti ego giperbolichnosti]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 25–39.

18. Balkizov Zh.A. Mixed problem for a third-order parabolic-hyperbolic equation with second-order derivatives in boundary conditions. [Balkizov ZH.A. Smeshannaya zadacha dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa tret'ego poryadka s proizvodnymi vtorogo poryadka v granichnyh usloviyah]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika — Scientific Proceedings of BelSU. Series: Mathematics. Physics*, 2017, no. 20(269), pp. 40–49.

19. Balkizov J.A. Boundary value problem for a third-order equation with a non-local time condition. [Balkizov ZH.A. Kraevaya zadacha dlya uravneniya tret'ego poryadka s nelokal'nym usloviem po vremeni]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Seriya Matematika — Bulletin of Karaganda University. Mathematics series*, 2017, no. 1(85), pp. 8–16.

20. Dzarakhokhov A.V. A non-local boundary value problem of the Bitsadze-Samarsky type for a third-order equation. [Dzarahohov A.V. Nelokal'naya kraevaya zadacha tipa zadachi Bicadze-Samarskogo dlya uravneniya tret'ego poryadka]. *Issledovaniya po differencial'nym uravneniyam i matematicheskomu modelirovaniyu — Vladikavkaz Research on differential equations and mathematical modeling*, 2008, pp. 78–82.

21. Dzarakhokhov A.V. On a non-local boundary value problem for a mixed third-order equation with multiple characteristics. [Dzarahohov A.V. Ob odnoj nelokal'noj kraevoj zadache dlya smeshannogo uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi harakteristikami]. *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal — Vladikavkaz mathematical journal*, 2005, vol. 7, no. 1, pp. 46–50.

Дзарахохов Азамат Валерианович, старший преподаватель кафедры математики и физики, ФГБОУ ВО Горский ГАУ, Владикавказ, Российская Федерация
E-mail: Azambat79@mail.ru

Dzarakhokhov Azamat Valerianovich, senior lecturer of the Department of Mathematics and Physics, FSBEI HE «Gorsky State Agrarian University», Vladikavkaz, Russian Federation
E-mail: Azambat79@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна, д.ф.-м.н, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская федерация; доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Российская федерация
E-mail: ilina_dico@mail.ru

Shishkina Elina Leonidovna, professor of the department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation; professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod State National Research University (BelGU), Russian Federation
E-mail: ilina_dico@mail.ru