УДК 517.928.7

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. Бигириндавйи

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

Аннотация. В данной статье рассматривается нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими данными и многоточечными краевыми условиями. Для этой зависящей от большого параметра задачи обоснован метод усреднения Крылова-Боголюбова. Таким образом, для указанной задачи строится предельная многоточечная краевая задача и обосновывается предельный переход, т. е. доказывается асимптотическая близость решений исходной и усредненной задач в пространстве Гельдера на отрезке. Метод усреднения — один из важнейших асимптотических методов, используемых в теории возмущений. Теория метода усреднения зародилась в трудах создателей небесной механики: Лагранжа, Лапласса и Гаусса и развивалась затем в работах многочисленных исследователей. В настоящее время для систем обыкновенных дифференциальных уравнений метод усреднения разработан с большой полнотой: исследована задачи Коши на конечном временном отрезке, задачи о периодических, почти периодических и общих ограниченных на всей оси и полуоси решениях. Однако для многоточечных краевых задач метод усреднения изучен еще недостаточно.

Ключевые слова: нормальная система, бысто осциллирующие данные, многоточечная краевая задача, метод усреднения.

JUSTIFICATION OF THE AVERAGING METHOD FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPOINT BOUNDARY CONDITIONS

D. Bigirindavyi

Abstract. This article considers a normal system of ordinary differential equations with rapidly oscillating data and multipoint boundary conditions. For this problem dependent on a large parameter, the Krylov-Bogolyubov averaging method is justified. Thus, for the indicated problem, a limiting multipoint boundary value problem is constructed and the passage to the limit is substantiated, i.e., the asymptotic closeness of the solutions of the original and averaged problems in the H?lder space on a segment is proved. The averaging method is one of the most important asymptotic methods used in perturbation theory. The theory of the averaging method originated in the works of the creators of celestial mechanics: Lagrange, Laplass, and Gauss, and then developed in the works of numerous researchers. At present, for systems of ordinary differential equations, the averaging method has been developed with great completeness: the Cauchy problems on a finite time interval, the problems of periodic, almost periodic, and general solutions bounded on the entire axis and semiaxis, have been studied. However, for multipoint boundary value problems, the averaging method has not yet been sufficiently studied.

Keywords: normal system, rapidly oscillating data, multipoint boundary value problem, averaging method.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе речь идет о методе усреднения, который называют также методом Крылова–Боголюбова (см. [1], [2], [3]). Он является одним из важнейших асимптотических методов и в настоящее время разработан с большой полнотой. В теории метода усреднения для ОДУ (другие уравнения в данной работе не рассмотриваются) исследуются, в основном, задача Коши на отрезке и полуоси, а также задача о периодических, почти периодических и общих ограниченных решениях на оси. Многоточечные краевые задачи изучены в настоящее время недостаточно. Отметим относящиеся к этому направлению работы [4], [5], где метод усреднения обоснован для двухточечных краевых задач, и [6], где он обоснован для многоточечных краевых задач при произвольном числе точек $m \geqslant 2$. В основе исследований [4], [5] лежит классическая теорема о неявных функциях, которую в теории метода усреднения впервые, по–видимому, применил И. Б. Симоненко в работе [7]. В работе[6], в отличие от [4], [5], авторы использовали лемму Гронуолла–Беллмана. Отметим, что в работе[6], содержатся условия существования решения не только усредненной задачи (это обычное требование в теории метода усреднения), но и, как правило, существенно более сложной возмущенной задачи.

В данной работе используется подход работы [7], основанный на теореме о неявных функциях, что позволило избежать последнего жесткого предположения о разрешимости возмущенной задачи. Правда, этот подход потребовал усиления требований гладкости данных задачи по сравнению с [6]. Краткий вариант представленных здесь результатов, опубликован в работе [8]. В данной работе эти результаты изложены с доказательствами.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук В. Б. Левенштаму за внимание к работе.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $n,m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$, Ω — область пространства[1)] $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\Pi = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : x \in \Omega, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На множестве Π рассмотрим m-точечную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)x(t_k) = a(\omega) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\omega \gg 1$, $A_k(\omega)$ — квадратные матрицы порядка n, $0 = t_1 < t_2 ... < t_m = T$, $a(\omega)$ — n-мерный вектор. Все матрицы, векторы и вектор-функции в работе считаются вещественными. Пусть $f(x,t,\tau)$ вектор-функция, определенная на множестве Q со значениями в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая следующим условиям.

1. Функция $f(x,t,\tau)$ вместе с ее первыми частными производными по x непрерывны на множестве Q. Соответствующую матрицу Якоби будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$.

2. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на Q.

3. Для любых точек $(x,t_1,\tau), (x,t_2,\tau) \in Q$ выполняются неравенства

$$|f(x,t_2,\tau) - f(x,t_1,\tau)| \leqslant \gamma(|t_2 - t_1|),$$

[1)] В качестве Ω можно взять любую ограниченную область $\mathbb{R}^n$, содержащую строго внутри себя значения решения $\overset{o}{y}(t)$ усредненной задачи (см. условие 8)

$$\left\| \frac{\partial f(x,t_2,\tau)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,t_1,\tau)}{\partial x} \right\| \leqslant \gamma(|t_2 - t_1|),$$

где $\gamma(r)$, $r \geqslant 0$ — непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

В данной работе символами $|x|$ и $\|A\|$ обозначены нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и квадратной матрицы A порядка n, которые согласованы, то есть $|Ax| \leqslant \|A\||x|$. Можно, например, считать, что $|x| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$, где x_i и a_{ij} — компоненты вектора x и элементы матрицы A соответственно.

4. Существует вектор-функция $F(x,t)$, определенная на множестве Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, такая что равномерно относительно $(x,t) \in \Pi$ справедливо предельное равенство:

$$\langle f(x,t,\tau) \rangle \equiv \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x,t,\tau)\, \mathrm{d}\tau = F(x,t). \tag{2}$$

5. Будем считать, что наряду с равенством (2) справедливо равенство

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau) \rangle \equiv \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t). \tag{3}$$

6. Существует постоянный n-мерный вектор a_0, для которого справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\omega \to +\infty} |a(\omega) - a_0| = 0$.

7. Существуют квадратные матрицы B_k, порядка n, для которых справедливы предельные равенства $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \|A_k(\omega) - B_k\| = 0$.

Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} B_k y(t_k) = a_0 \end{cases} \tag{4}$$

8. Будем предполагать, что задача (4) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$, $t \in [0,T]$, которое вместе с некоторой $\rho(> 0)$–окрестностью лежит в Ω, то есть при каждом $t \in [0,T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ.

Символом $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$, обозначим матрицант[2] системы в вариациях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)x \tag{5}$$

9. Пусть справедливо соотношение:

$$\Delta = \det \left[\sum_{k=1}^{m} B_k \Phi(t_k) \right] \neq 0 \tag{6}$$

[2] Напомним, что матрицантом системы (5) называют её фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ решений нормированую в точке $t = 0$, то есть $\Phi(0) = E$

Далее символом $C_\mu([0,T])$, $\mu \in (0,1]$, будем обозначать известное пространство непрерывных вектор -функций $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(x \in C([0,T]))$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ и снабженных нормой;

$$||x||_{C_\mu([0,T])} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)| + \sup_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant T}\frac{|x(t_2)-x(t_1)|}{(t_2-t_1)^\mu} < \infty.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $\mu \in (0,1)$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что задача (1) при $\omega > \omega_0$ в некоторой $C_\mu([0,T])$-окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}(t)$ имеет единственное решение $x_\omega(t)$ и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\omega\to\infty}||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В задаче (1) сделаем замену переменных

$$x = u + \overset{o}{y}. \tag{7}$$

где $\overset{o}{y}$ решение (4). В результате придем к задаче

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)u + K(u,t,\omega t) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(\omega)u(t_k) = C(\omega), \omega \gg 1 \end{cases} \tag{8}$$

Здесь

$K(u,t,\tau) = f(u+\overset{o}{y},t,\tau) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u \equiv H(u,t,\tau) + \Psi(u,t)$,

$H(u,t,\tau) = f(u+\overset{o}{y},t,\tau) - F(u+\overset{o}{y},t)$,

$\Psi(u,t) = F(u+\overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u$,

$C(\omega) = a(\omega) - \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(\omega)\overset{o}{y}(t_k)$

Наряду с задачей (8) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)v + \Psi(v,t) \\ \sum\limits_{k=1}^{m} B_k v(t_k) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

которая, очевидно, имеет решение $v(t) = 0$.

Из условия (6) вытекает соотношение

$$\det\left[\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right] \neq 0 \tag{10}$$

в силу которого задача (8) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s+$$
$$+\Phi(t)\left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}\left[C(\omega)-\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right]\equiv$$
$$\equiv A(u,t,\omega)+\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s \equiv N_0(u,t,\omega), \quad (11)$$

Докажем этот факт, следуя [6]. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)u + K(u,t,\omega t) \\ \qquad\qquad u(0) = u_0, \omega \gg 1. \end{cases} \quad (12)$$

Она, как известно, эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \quad (13)$$

так что

$$u(t_k) = \Phi(t_k)u_0 + \int_0^{t_k} \Phi(t_k)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s. \quad (14)$$

Умножая равенство (14) на матрицу $A_k(\omega)$ и суммируя, получим соотношение

$$\sum_{k=1}^m A_k(\omega)u(t_k) = \left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]u_0 + \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s. \quad (15)$$

Отсюда, с учетом второго уравнения (8), следует равенство

$$\left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]u_0 + \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s = C(\omega), \quad (16)$$

так что

$$u_0 = \left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}\left[C(\omega)-\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right]. \quad (17)$$

Подставляя найденный вектор u_0 в формулу (13), получаем равенство (11). Таким образом, из (8) следует (11). Обратное утверждение устанавливается с помощью дифференцирования (11) по t. Итак установлена эквивалентность задачи (8) и равенства (11). Эквивалентность задачи (9) и интегрального уравнения

$$v(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\Psi(v(s),s)\mathrm{d}s-$$
$$-\Phi(t)\left[\sum_{k=1}^m B_k\Phi(t_k)\right]^{-1}\sum_{k=1}^m B_k\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)\Psi(v(s),s)\mathrm{d}s\equiv$$
$$\equiv B(v,t)+\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\Psi(v(s),s)\mathrm{d}s \quad (18)$$

после этого очевидна.

Пусть вектор–функции $x_1(t),x_2(t)\dots x_n(t)$ — линейно независимые решения системы (5), определенные на $[0,T]$ и составляющие матрицант $\Phi(t) = [x_1(t),x_2(t)\dots x_n(t)]$. Тогда определитель Вронского

$$W[x_1(t),x_2(t)\dots x_n(t)] = \det[x_1(t),x_2(t)\dots x_n(t)] = \det\Phi(t) \neq 0$$

для всех $t \in [0,T]$. Определим число $M > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\max_{t\in[0,T]} \|\Phi(t)\| \leqslant M. \tag{19}$$

Далее, определим матрицу

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{\det\Phi(s)}\Phi^*(s),$$

где $\Phi^*(s)$ — транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицанта $\Phi(t)$. Ясно, что матрица $\Phi^*(s)$ ограничена, а потому найдется число $M_1 > 0$, при котором

$$\max_{t,s\in[0,T]} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leqslant M_1. \tag{20}$$

Исходя из равенств (11) и (18), определим в какой–либо окрестности точки $(0,\infty)$ пространства $C_\mu([0,T]) \times [1,\infty]$ оператор $N : C_\mu([0,T]) \times [1,\infty] \to C_\mu([0,T])$, $0 < \mu < 1$, формулой:

$$[N(u,\omega)](t) = \begin{cases} u(t) - \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s - \Phi(t)\left[\sum\limits_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1} \\ \left[C(\omega) - \sum\limits_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right], \omega \neq \infty; \\ u(t) - \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)\Psi(u(s),s)\mathrm{d}s + \\ +\Phi(t)\left[\sum\limits_{k=1}^m B_k\Phi(t_k)\right]^{-1} \sum\limits_{k=1}^m B_k\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)\Psi(u(s),s)\mathrm{d}s, \omega = \infty, \end{cases} \tag{21}$$

Напомним, что в (21)

$$K(u,t,\tau) = \left[f(u + \overset{o}{y},t,\tau) - F(u + \overset{o}{y},t)\right] + F(u + \overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u, \tag{22}$$

$$\Psi(u,t) = F(u + \overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u \tag{23}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *(Основная) Оператор $N(u,\omega)$ определен в некоторой окрестности точки $(0,\infty)$, непрерывен и непрерывно дифференцируем в этой точке. При этом $N(0,\infty) = 0$, а производная Фреше $D_u N(0,\infty) = I$, где I — тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$.*

Из этой леммы следуют утверждения теоремы. Действительно, в силу леммы согласно теореме о неявных отображениях найдутся числа[3] $\omega_1 > 0$ и $\delta > 0$, такие что в окрестности $||u||_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta$ при $\omega > \omega_1$, существует единственное решение u_ω задачи $N(u,\omega) = 0$, и при этом $u_\omega \underset{\omega\to\infty}{\to} 0$ в $C_\mu([0,T])$.

[3] В данной работе через ω_1 мы обозначаем различные достаточные большие числа.

Доказательство леммы. Указанные в лемме равенства $N(0,\infty) = 0$ и $D_u N(0,\infty) = I$ очевидны. Это следует из представления (21) при $\omega = \infty$ и вытекающих из (23) равенств: $\Psi(0,t) = 0$, $D_u \Psi(0,t) = 0$. Очевидно значит и равенство $[D_u N(0,\infty)]^{-1} = I$.

Таким образом, нам остается доказать непрерывность оператора $N(u,\omega)$, а также существование и непрерывность его дифференциала Фреше $D_u N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$.

Сначала докажем непрерывность оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$.

Из простой оценки

$$\sup_{\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant 1, t\in[0,T], \omega\in[1,\infty]} \|\frac{\partial [N(u,\omega)](t)}{\partial t}\| \leqslant C_0 = const \tag{24}$$

и известного (см. [7]) интерполяционного неравенства

$$\|z\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \|z\|_{C([0,T])} + \left(2\|z\|_{C([0,T])}\right)^{1-\mu} \|z\|^\mu_{C_1([0,T])}, z \in C_1([0,T]) \tag{25}$$

следует, что достаточно доказать непрерывности оператора $N(u,\omega)$, как оператора действующего из пространства $C_\mu([0,T])$ в пространство $C([0,T])$.

Для доказательства последнего зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что существуют числа $0 < \delta_1 < 1$ и $\omega_1 > 0$, такие что при

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1, \omega > \omega_1 \tag{26}$$

выполняется оценка (мы учитываем, что $N(0,\infty) = 0$):

$$||N(u,\omega)||_{C([0,T])} < \varepsilon \tag{27}$$

Будем считать, что $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда остается доказать неравенство

$$||A(u,t,\omega) + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s||_{C([0,T])} < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{28}$$

когда u и ω удовлетворяют условию (26).

Сначала оценим $A(u,t,\omega)$. Нам нужно доказать, что найдутся числа δ_1 и ω_1, удовлетворяющие неравенству (26), при которых имеет место оценка

$$\|A(u,t,\omega)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{29}$$

Напомним, что $A(u,t,\omega)$ (см. (11)) имеет вид

$$A(u,t,\omega) = \\ = \Phi(t)\left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}\left[C(\omega) - \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right]. \tag{30}$$

Напомним еще в (30)

$$C(\omega) = a(\omega) - \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\overset{o}{y}(t_k) = a(\omega) - a_0 + a_0 - \sum_{k=1}^m B_k\overset{o}{y}(t_k) + \sum_{k=1}^m (B_k - A_k(\omega))\,\overset{o}{y}(t_k); \tag{31}$$

$$K(u(t),t,\tau) = \left[f(u(t) + \overset{o}{y},t,\tau) - F(u(t) + \overset{o}{y},t)\right] + F(u(t) + \overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u(t); \tag{32}$$

Далее, вектор-функция $\Psi(u,t)$, определяемая формулой (23), очевидно, является непрерывной, и в силу непрерывности матрица-функция $[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]$ справедливо соотношение

$$|F(u(t)+\overset{o}{y},t)-F(\overset{o}{y},t)-[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(t),t)]u(t)\| = o(\|u(t)|_{C_\mu([0,T])}), \|u(t)\|_{C_\mu([0,T])}\to 0, \tag{33}$$

которое выполняется равномерно относительно t.

Теперь обозначим через $g(z(s),s,\tau) = f(z(s),s,\tau) - F(z(s),s)$, где $z(s) = u(s)+\overset{o}{y}(s) \in \Omega$. Из (2) в силу равномерной непрерывности вектор-функции $f(z(s),s,\tau)$ на множестве Q следует равномерная непрерывность вектор-функция $g(z(s),s,\tau)$, то есть для любых точек $(z_1,s_1,\tau),(z_2,s_2,\tau)\in Q$ выполняется неравенство

$$|\,[g(z_2,s_2,\tau)-g(z_1,s_2,\tau)]+[g(z_2,s_2,\tau)-g(z_2,s_1,\tau)]\,| \leqslant \gamma(|z_2-z_1)|+|s_2-s_1|) \tag{34}$$

здесь $\gamma(r)$, $r\geqslant 0$ — непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0)=0$, следовательно в силу (31) – (34) найдется достаточно большое ω_1 и достаточно малое δ_1 такие, что при всех вектор-функциях u и числа ω, удовлетворяющих (26), выполняется оценка:

$$\|A(u,t,\omega)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{35}$$

Теперь оценим вектор-функцию

$$I(u,t,\omega) = \int_0^t \Phi(t,s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s$$

где $\Phi(t,s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s), 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$. Из (32) имеем:

$$|I(u,t,\omega)| = \left|\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left[f(u+\overset{o}{y},s,\omega s)-F(u+\overset{o}{y},s)\right]\mathrm{d}s\right| +$$
$$+\left|\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left\{F(u+\overset{o}{y},s)-F(\overset{o}{y},s)-\left[\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y}(s),s)\right]u\right\}\mathrm{d}s\right| \equiv M_1(t)+M_2(t).$$

Из (20) и (33) следует существование такого малого числа δ_2, что при $\|u\|_{C([0,T])}\leqslant\delta_2$ выполняется оценка

$$\|M_2(t)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{15} \tag{36}$$

Далее оценим вектор-функцию $M_1(t)$. Для краткости обозначим $u(t)+\overset{o}{y}(t) = z(t)\in\Omega$. Учтем, что вектор-функции $F\,[z(t),t]$ и $f\,[z(t),t,\tau]$ в силу условий теоремы равномерно ограничены, то есть существует такая постоянная $M_2>0$, что при всех $z\in\Omega, t\in[0,T], \tau\in[0,\infty)$ выполняются неравенства

$$|f\,[z,t,\tau]\,|\leqslant M_2 \tag{37}$$

$$|F\,[z,t]\,|\leqslant M_2 \tag{38}$$

а также, что $f(z,t,\tau)$ равномерно непрерывна по t на множестве Q, то есть для любых $(z,t_1,\tau),(z,t_2,\tau)\in Q$ выполняется неравенства

$$|f(z,t_2,\tau)-f(z,t_1,\tau)|\leqslant\gamma(|t_2-t_1|). \tag{39}$$

где $\gamma(r)$, $r\geqslant 0$ — непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0)=0$. Заметим, что в силу предельного равенства (2), вектор-функция $F\,[z,t]$ также равномерно непрерывна по t на множестве $\Omega\times[0,T]$, то есть для любых $(z,t_1),(z,t_2)\in\Omega\times[0,T]$ выполняются неравенства

$$|F(z,t_2)-F(z,t_1)|\leqslant\gamma(|t_2-t_1|). \tag{40}$$

где $\gamma(r)$, $r \geqslant 0$ — непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

Далее, по условию теоремы, матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t,\tau)$ равномерно ограничена, а потому вектор-функция $f(z,t,\tau)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица по z, следовательно существует такая постоянная $M_3 > 0$, которая не зависит от t,τ, z_1,z_2, что при всех $z_1,z_2 \in \Omega$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,+\infty)$ выполняется неравенство

$$|f(z_2,t,\tau) - f(z_1,t,\tau)| \leqslant M_3|z_2 - z_1|. \tag{41}$$

а из условий (2) и (41) следует выполнении условии Липшица и для вектор-функции $F(z,t)$

$$|F(z_2,t) - F(z_1,t)| \leqslant M_3|z_2 - z_1|. \tag{42}$$

В силу условий (37) и (38) (это вытекает из предположений теоремы) найдется такое значение $t_0 \in [0,T]$ при котором выполняется неравенство

$$|M_1(t)|_{C([0,t])} < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [0,t_0]. \tag{43}$$

Учитывая (43), рассмотрим лишь точки $t \in [t_0,T]$. Разобъём теперь интервал интегрирования $[t_0,t)$ на m равных частей: $[t_0,t) = \bigcup\limits_{i=1}^{m}[\tau_i,\tau_{i+1})$ и воспользуемся представлением:

$$\begin{aligned}
&M_1(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left\{f\left[z(s),s,\omega s\right] - F\left[z(s),s\right]\right\} \mathrm{d}s = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{\Phi(t)\Phi^{-1}(s)f\left[z(s),s,\omega s\right] - \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)f\left[z(\tau_i),\tau_i,\omega s)\right]\right\} \mathrm{d}s- \\
&- \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{\Phi(t)\Phi^{-1}(s)F\left[z(s),s\right] - \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)F\left[z(\tau_i),\tau_i\right]\right\} \mathrm{d}s+ \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\left\{f\left[z(\tau_i),\tau_i,\omega s\right] - F\left[z(\tau_i),\tau_i)\right]\right\} \mathrm{d}s \equiv A + B + C
\end{aligned}$$

Из соотношений (19), (20), (37), (39), (41) вытекает следующая оценка для A:

$$\begin{aligned}
|A| &\leqslant \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\||f\left[z(s),s,\omega s\right]|\|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\|\mathrm{d}s+ \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\||f\left[z(s),s,\omega s\right] - f\left[z(\tau_i),s,\omega s\right]|\mathrm{d}s+ \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\||f\left[z(\tau_i),s,\omega s\right] - f\left[z(\tau_i),\tau_i,\omega s\right]|\mathrm{d}s \leqslant \\
&\leqslant m \times \frac{T}{m} \times M \times M_2\|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\|+ \\
&+ m \times \frac{T}{m} \times M_1 \times M_3|z(s) - z(\tau_i)|+ \\
&+ m \times \frac{T}{m} \times M_1\gamma(|s - \tau_i|), t \in [t_0,T]
\end{aligned}$$

Здесь мы используем представление:

$$||\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)|| = ||\int_{s}^{\tau_i}(\Phi^{-1}(\theta))'\mathrm{d}\theta|| = ||\int_{s}^{\tau_i} -\frac{\partial F}{\partial x}(\overset{o}{y}(\theta),\theta)\Phi^{-1}(\theta)\mathrm{d}\theta||.$$

и равномерную непрерывность вектор-функции $z(t), t \in [0,T]$. Так как $z(t) \in C_\mu([0,T])$ то, имеет место оценка $|z(s) - z(\tau_i)| \leqslant M|s-\tau_i|^\mu \leqslant M(\frac{T}{m})^\mu$, $M = const$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, можно найти число m_0 столь большое, что при $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$|z(s) - z(\tau_i)| < \varepsilon.$$

Из проведенных рассуждений следует существование такого числа m_1, что при $m \geqslant m_1$ имеет место оценка:

$$|A| < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [t_0,T] \tag{44}$$

Далее, оценим слагаемое B.

Из соотношений (19), (20), (38), (40), (42) следует оценка:

$$\begin{aligned}
|B| \leqslant & \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\| |F[z(s),s]| \|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\| \mathrm{d}s + \\
& + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\| |F[z(s),s] - F[z(\tau_i),s]| \mathrm{d}s + \\
& + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\| |F[z(\tau_i),s] - F[z(\tau_i),\tau_i]| \mathrm{d}s \leqslant \\
& \leqslant m \times \frac{T}{m} \times M \times M_2 \|\Phi^{-1}(s) - \Phi^{-1}(\tau_i)\| + \\
& + m \times \frac{T}{m} \times M_1 \times M_3 |z(s) - z(\tau_i)| + \\
& + m \times \frac{T}{m} \times M_1 \gamma(|s-\tau_i|), t \in [t_0,T]
\end{aligned}$$

Отсюда следует существование числа $m_2 \geqslant m_1$, такого, что при $m \geqslant m_2$ выполняется неравенство

$$|B| < \frac{\varepsilon}{15}, t \in [t_0,T]. \tag{45}$$

При оценке выражения C воспользуемся следующим представлением

$$\begin{aligned}
\Theta_s = & \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) \left\{ f[z(\tau_i),\tau_i,\omega s] - F[z(\tau_i),\tau_i)] \right\} \mathrm{d}s = \\
& = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i) \left\{ \frac{1}{\omega} \int_{\omega\tau_i}^{\omega\tau_{i+1}} f[z(\tau_i),\tau_i,\omega s] \,\mathrm{d}s - (\tau_{i+1} - \tau_i) F[z(\tau_i),\tau_i)] \right\} = \\
& = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\tau_{i+1} \left\{ \frac{1}{\omega\tau_{i+1}} \int_0^{\omega\tau_{i+1}} f[z(\tau_i),\tau_i,\omega s] \,\mathrm{d}s - F[z(\tau_i),\tau_i)] \right\} + \\
& + \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau_i)\tau_i \left\{ F[z(\tau_i),\tau_i)] - \frac{1}{\omega\tau_i} \int_0^{\omega\tau_i} f[z(\tau_i),\tau_i,\omega s] \,\mathrm{d}s \right\}
\end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы равномерно относительно $(z,t) \in \Omega \times [0,T]$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N f(z,t,\tau)\mathrm{d}\tau = F(z,t).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется число N_0, такое что при $N > N_0(\varepsilon)$ оценка

$$\left| \frac{1}{N} \int_0^N f(z,t,\tau)\mathrm{d}\tau - F(z,t) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{30T}.$$

выполняется для всех $z \in \Omega$, $t \in [0,T]$.
После этого выберем $m_3 \geqslant m_2$ так , что для всех $m \geqslant m_3$ выполняется неравенство $\omega t_0 > N_0(\varepsilon)$. Тогда при $m = m_3$ для всех $t \in [t_0,T]$ выполняется оценка

$$|C| \leqslant \sum_{i=1}^{m_3} |\Theta_s| < \frac{\varepsilon}{15} \tag{46}$$

Из соотношений (36) – (43), (44) – (46) следует оценка

$$||I(u,t,\omega)||_{C([0,T])} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{47}$$

Теперь покажем ограниченность нормы вектор-функций

$$N(u,t,\omega) = A(u,t,\omega) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta_1$$

в $C^1([0,T])$. Для этого возьмем производную $N_0(u,t,\omega)$ по переменной t.

Напомним, что

$$A(u,t,\omega) = \Phi(t)\left[\sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}\left[C(\omega) - \sum_{k=1}^{m} A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right],$$

где $K(u,t,\tau)$ имеет вид (32). Очевидно, что

$$\frac{\partial A(u,t,\omega)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)A(u,t,\omega)$$

и в силу оценки (29) для $A(u,t,\omega)$ и ограниченности матрица-функции $\frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)$ (это вытекает из ограниченности вектор-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ и условии (3)) найдется такая постоянная $C_1 > 0$, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta_1$ и $\omega > 0$

$$\|\frac{\partial A(u,t,\omega)}{\partial t}\| \leqslant C_1. \tag{48}$$

Далее, положим

$$\varphi(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s$$

По теореме о дифференцировании по параметру интеграла с переменными пределами интегрирования [9], мы получим

$$\varphi'(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t)K(u(t),t,\omega t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial y}(\overset{o}{y},t)\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s + K(u(t),t,\omega t)$$

так как $\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I$ — тождественный оператор.

Таким образом, в силу условий теоремы, неравенств (37), (48) и (47) найдутся такое число $C_2 > 0$ что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta_1$ и $\omega > 0$

$$\left\|\frac{\partial A(u,t,\omega)}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\right)\right\| \leqslant C_2. \tag{49}$$

Из оценок (48), (49) следует неравенство (24). Очевидно, оценка типа (24) имеет место и для $\frac{\partial N(u,\infty)}{\partial t}$.

Следовательно, мы установили, что нормы

$$N(u,t,\omega) = A(u,t,\omega) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s, \|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta_1, \omega \gg 1$$

равномерно малы в $C([0,T])$ и равномерно ограничены в $C_1([0,T])$. Следовательно в силу оценки (25), нормы этих вектор-функций равномерно малы в $C_\mu([0,T])$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие δ_0 и ω_0, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta_0$ и $\omega > \omega_0$

$$||N(u,\omega)||_{C_\mu([0,T])} \leqslant ||u||_{C_\mu([0,T])} + ||A(u,t,\omega)||_{C_\mu([0,T])} + ||I(u,t,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что оператор $N(u,\omega)$ является непрерывным в точке $(0,\infty)$ в пространстве $C_\mu([0,T])$.

Теперь докажем непрерывность дифференциала Фреше оператора $N(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Для начала докажем существование дифференциала Фреше оператора $N(u,\omega)$ по u.

С учетом определения оператора $N(u,\omega)$ в окрестности точки $(0,\infty)$, покажем, что оператор $N(u,\omega)$ имеет производную Фреше, определяемую формулой

$$D_u N(u,\omega)h(t) = h(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s +$$
$$+ \Phi(t)\left[\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1} \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s, \quad (50)$$

где K_u — матрица Якоби.

По условию теоремы, вектор-функция $K(u,t,\tau)$ и его производная $K_u(u,t,\tau)$ по u непрерывны, более этого $K_u(u,t,\tau)$ равномерно ограничена в $\Omega \times [0,T] \times [0,\infty)$. Формула (50) теперь следует, по существу, из классической теоремы о дифференцировании под знаком интеграла [10]. Однако мы приведем независимое подробное ее доказательство. При этом ограничимся рассмотрением скалярного случая, так что пусть K и u-скалярные. В общем случае вместо теоремы о конечных приращениях нужно использовать соответствующий ее интегральный аналог.

Для любой функции $h \in C_\mu[0,T]$ имеем

$$N(u+h,\omega) - N(u,\omega) =$$
$$= h(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\left[K(u(s)+h(s),s,\omega s) - K(u(s),s,\omega s)\right]\mathrm{d}s - H(t)C(\omega)h(s) +$$
$$+ H(t)\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)\left[K(u(s)+h(s),s,\omega s) - K(u(s),s,\omega s)\right]\mathrm{d}s,$$

где $H(t) = \Phi(t)\left[\sum\limits_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\right]^{-1}$.

Далее, по теореме о конечных приращениях Лагранжа имеем

$$K(u(s)+h(s),s,\tau) - K(u(s),s,\tau) = K_u(u(s)+\theta(s)h(s),s,\tau)h(s),$$

где $\theta(s) \in [0,1]$. По условию теоремы матрица-функция K_u равномерно непрерывна на множестве $\Omega \times [0,T] \times [0,\infty)$ а потому

$$K_u(u(s)+\theta h(s),s,\tau)h(s) = K_u(u(s),s,\tau)h(s) + o(x(s),\theta(s)h(s),s)h(s).$$

Здесь $o(x(s),\theta(s)h(s),s) \to 0$ равномерно при $\|h\|_{C_\mu([0,T])} \to 0$. Следовательно

$$K(u(s)+h(s),s,\tau) - K(u(s),s,\tau) = K_u(u(s),s,\tau)h(s) + o(u(s),\theta h(s),s).$$

Поэтому получаем

$$N(u+h,\omega) - N(u,\omega) = h(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s+$$

$$+ H(t)\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)h(s)\mathrm{d}s+$$

$$+\delta_1(u,h)+\delta_2(u,h) - H(t)C(\omega)h(s) = D_u(u,\omega)h + \delta_1(u,h)+\delta_2(u,h) - H(t)C(\omega)h(s),$$

где

$$[\delta_1(u,h)](t) = -\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}s,$$

$$[\delta_2(u,h)](t) = H(t)\sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k}\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}s.$$

Теперь докажем, что остатки $\delta_1(u,h)$ и $\delta_2(u,h)$ обладает свойствам:

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\gamma(u,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0,$$

где $\gamma = \delta_1,\delta_2$. Для этого оценим δ_1 в $C_\mu([0,T])$

$$\|\delta_1(u,h)(t)\|_{C_\mu([0,T])} = \sup_{t\in[0,T]}\left|\int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}s\right| +$$

$$+\sup_{0\leqslant t<t_1\leqslant T}\frac{1}{|t-t_1|^\mu}\left|\int\limits_{t_1}^t |\Phi(t)-\Phi(t_1)|\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}s\right| +$$

$$+\sup_{0\leqslant t<t_1\leqslant T}\frac{1}{|t-t_1|^\mu}\left|\int\limits_t^{t_1}\Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)o(u(s),\theta h(s),s)h(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t,s\in[0,T]}|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)||o(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|(T+1) + \sup_{s\in[0,T]}L_1|\Psi^{-1}(s)||0(u(s),\theta h(s),s)||h(s)| \leqslant$$

$$\leqslant L_2|o(u(s),\theta h(s),s)||h(s)|,$$

$L_1, L_2 = \mathrm{const} > 0$. Из последней оценки, мы получим

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\delta_1(u,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\|h\|_{C_\mu([0,T])}\to 0}\frac{\|\delta_2(u,h)\|_{C_\mu([0,T])}}{\|h\|_{C_\mu([0,T])}} = 0.$$

Далее, из представлений (31), получим $H(t)C(\omega)h(s) = o(h)$, $\|h\|_{C_\mu([0,T])} \to 0$. Поэтому по определению производной Фреше, оператор $N(u,\omega)$ дифференцируем по Фреше в точке

$u(t) \in C_\mu([0,T])$ и равенство (50) установлено. Тогда производная Фреше $D_uN(u,\omega)$ в фиксированной точке (u_0,ω_0) есть линейный оператор, действующий определенный из $C_\mu([0,T])$ в $C_\mu([0,T])$.

Теперь докажем непрерывность производной Фреше $D_uN(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Для этого рассмотрим

$$D_uN(u,\omega)(t) = I - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s+$$

$$+ H(t)\ \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)K_u(u(s),s,\omega s)\mathrm{d}s$$

$$D_uN(u,\infty)(t) = I - \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\Psi_u(u(s),s)\mathrm{d}s+$$

$$+ H(t)\ \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)\Psi_u(u(s),s)\mathrm{d}s$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $\omega_1 > 0$ такие, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ и $\omega > \omega_1$ выполняется

$$\|D_uN(u,\omega) - D_uN(0,\infty)\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} < \varepsilon.$$

Рассмотрим

$$\|D_uN(u,\omega) - D_uN(0,\infty)\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)\left[K_u(u(s),s,\omega s) - \Psi_u(u(s),s)\right]\mathrm{d}s \right\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])} +$$

$$+ \left\| H(t)\ \sum_{k=1}^m A_k(\omega)\Phi(t_k)\int_0^{t_k} \Phi^{-1}(s)\left[K_u(u(s),s,\omega s) - \Psi_u(u,s)\right]\mathrm{d}s \right\|_{C_\mu([0,T])\to C_\mu([0,T])}.$$

Заметим, что непрерывность оператора $D_uN(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$ доказывается аналогично непрерывности оператора $N(u,\omega)$ в этой же точке. Мы не будем останавливаться на этом доказательстве. Лемма 1 доказана. $\square$

Заметим, что при больших ω вектор–функция $x_\omega(t)$, которая выражается через $u_\omega(t)$ по формуле (7) является единственным решением задачи (1) в некоторой $C_\mu([0,T])$-окрестности вектор-функции $\overset{o}{y}$. Более того, из леммы 1 следует существование единственного решения $u_\omega \underset{\omega\to\infty}{\to} 0$ уравнения (8) на временном участке $t \in [0,T]$. Следовательно, согласно формуле (7), равномерно относительно $t \in [0,T]$, имеет место следующее предельное равенство $\lim\limits_{\omega\to\infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов, Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике / Н. Н. Боголюбов. — Киев : Изд-во Академии наук УССР. — 1945.

2. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Физматлит. — 1974.

3. Митропольский, Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. — Киев : Наукова думка. — 1971.

4. Левенштам, В. Б. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями / В. Б. Левенштам, П. Е. Шубин // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, вып. 1. — С. 94–108.

5. Бигириндавйи, Д. Обоснование принципа усреднения для системы быстро осциллирующих ОДУ с краевыми условиями / Д. Бигириндавйи, В. Б. Левенштам // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2020. — № 1. — С. 31–37.

6. Константинов, М. М. О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам / М. М. Константинов, Д. Д. Байнов // BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de la Roumanie. — 1974. — Т. 18 (66), № 3/4. — С. 307–310.

7. Симоненко, И. Б. Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений / И. Б. Симоненко // Матем. сб. — 1970. — Т. 81 (123), № 1. — С. 53–61.

8. Bigirindavyi, D. Justification of the averaging method for differential equations with multipoint boundary value problems / D. Bigirindavyi, V. B. Levenshtam // Operator Theory and Harmonic Analysis, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 357, 2021.

9. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Издательство. Лань, 2016. — 800 с.

10. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 2 / В. И. Смирнов. — СПб., 1974.

REFERENCES

1. Bogolyubov N.N. On some statistical methods in mathematical physics. [Bogolyubov N.N. O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike]. Moscow, 1945, 137 p.

2. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy YU.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. [Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy YU.A. Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy]. Moscow: Fizmatlit, 1974, 410 p.

3. Mitropol'skiy YU.A. Averaging method in nonlinear mechanics. [Mitropol'skiy YU.A. Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike]. Kiev, Naukova dumka, 1971, 440 p.

4. Levenshtam V.B., Shubin P.Ye. Justification of the averaging method for differential equations with large rapidly oscillating terms and boundary conditions. [Levenshtam V.B., Shubin P.Ye. Obosnovaniye metoda usredneniya dlya differentsial'nykh uravneniy s bol'shimi bystro ostsilliruyushchimi slagayemymi i krayevymi usloviyami]. *Matem. zametki — Mathematical Notes*, ,. 2016, vol. 100, no. 1, pp. 94–104

5. Bigirindavyi. D., Levenshtam V.B. The averaging principle for a system of rapidly oscillating ode with boundary conditions. [Bigirindavyi. D., Levenshtam V.B. Obosnovaniye printsipa usredneniya dlya sistemy bystro ostsilliruyushchikh ODU s krayevymi usloviyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 31–37.

6. Konstantinov M.M., Bainov D.D. On the application of the averaging method to some multipoint boundary value problems. [Konstantinov M.M., Bainov D.D. O primenenii metoda usredneniya k nekotorym mnogotochechnym krayevym zadacham]. *Mathematical Bulletin of the Society of Mathematical Sciences of the Socialist Republic of Romania — Mathematical Bulletin of the Society of Mathematical Sciences of the Socialist Republic of Romania*, 1974, vol. 18(66), no. 3/4, p. 307–310.

7. Simonenko I.B. Justification of the averaging method for abstract parabolic equations. [Simonenko I.B. Obosnovaniye metoda osredneniya dlya abstraktnykh parabolicheskikh uravneniy]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1970, vol. 81(123), no. 1, pp. 53–61.

8. Bigirindavyi D., Levenshtam V.B. Justification of the averaging method for differential equations with multipoint boundary value problems. Operator Theory and Harmonic Analysis, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 357, 2021.

9. Fikhtengolts G.M. Differential and Integral Calculus Course. V. 2. [Fikhtengolts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 2]. 2016, 800 p.

10. Smirnov V.I. Higher mathematics course. V. 2. [Smirnov V.I. Kurs vysshey matematiki. T. 2]. SPb, 1974.

Бигириндавйи Д., Аспирант, кафедра алгебры и дискретной математики, Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: bigirindavyidaniel@gmail.com

Bigirindavyi D., Postgraduate student, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: bigirindavyidaniel@gmail.com