УДК 517.934

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ОПИСЫВАЕМА НЕЛИНЕЙНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. Т. Алиева

Бакинский государственный университет,
институт систем управления НАН Азербайджана

Поступила в редакцию 23.11.2021 г.

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления объектом, описываемый системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка. При предположении открытости области управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: допустимое управления; оптимальное управление; открытое множество, разностное уравнение дробного порядка; дробный оператор, дробная сумма, аналог уравнения Эйлера.

ON THE OPTIMALITY OF THE FIRST AND SECOND ORDERS IN A PROBLEM OF CONTROL OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

S. T. Aliyeva

Abstract. The problem of optimal control of an object, described by a system of nonlinear difference equations of fractional order, is considered. Under the assumption that the control area is open, a necessary condition of the first and second orders is established.

Keywords: admissible control; optimal control; open set, fractional difference equation; fractional operator, fractional sum, analogue of the Euler equation.

ВВЕДЕНИЕ

Дробное исчисление играет важную роль во многих областях науки и техники. Дробное исчисление приобрело важность за последние три десятилетия из-за его применимости в различных областях науки и техники. Понятия дробного исчисления могут быть восходит к работам Эйлера, но идея использования дробной разницы появилась относительно недавно (см. например [1–7]).

Дробное исчисление также находит применение в задачах оптимального управления, принцип математической теории управления заключается в определении состояния и управления динамической системой в течение определенного периода для оптимизации данной цели [1].

Наличие в уравнениях дробной конечной разности интерпретируется как отражение свойства памяти процесса. В настоящее время разработке и развитию качественной теория дифференциальных уравнений дробного порядка и, соответствующих, им разностных уравнений дробного порядка уделяется большое внимание [2–8]. Исходя из теоритических и практический приложений разработка качественный теории задач оптимального управления описываемые различными разностными уравнениями дробного порядка также является актуальной. Отметим что, теория необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления описываемые разными разностными уравнениями дробного порядка очень мало разработана.

В предлагаемый работе изучается одна задача оптимального управления описываемая системой разностных уравнений дробного порядка [9, 11]. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [15, 16] и выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЕ

Приведем некоторые понятия и определения, которые в дальнейшем будут использованы.

Следующие определения, являясь стандартными ([2–5, 14]) служат основой для определение разностей дробного порядка.

Пусть N множество натуральных чисел вместе с нулем. Для $a \in Z$ введем следующие обозначения: $N_a^+ = \{, a, a+1, a+2, \ldots\}$, $\sigma(t) = t+1$, $\rho(t) = t-1$.

Определение 1. Дробная сумма порядка α определяется следующим образом

$$\Delta^{-\alpha} u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+\alpha-1}{j} u(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j+\alpha-1}{n-j} u(j),$$

а дробный оператор порядка α определяется следующим образом

$$\Delta^{\alpha} u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+\alpha-1}{j} \Delta u(n-j) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-j-\alpha-1}{n-j} u(j) - \binom{n-\alpha-1}{n-1} u(0).$$

Здесь биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Пусть для любых $x, y \in R$, $x^{(y)} = \dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ — гамма функция.

Заметим, что дробную сумму и дробный оператор порядка α можно определить еще следующим образом.

Пусть a произвольное действительное и $b = k + a$, здесь $k \in N$, $k \geqslant 2$; $T = \{a, a+1, \ldots, b\}$, $T^k = \{a, a+1, \ldots, b-1\}$, а Ŧ множество функций определенных на T.

Определение 2. Пусть $f \in$ Ŧ. Для него левые и правые дробные суммы порядка $\alpha > 0$ определяются соответственно следующим образом

$${}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s),$$

$$
{}_t\Delta_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{s=t+a}^{b} (s-\sigma(t))^{(\alpha-1)} f(s).
$$

Определение 3. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\mu = 1-\alpha$ тогда для функции $f \in \mp$ левые и правые дробные суммы порядка α определяются следующим образом:

$$
{}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t) = \Delta \left({}_a\Delta_t^{-\mu} f(t) \right),
$$

$$
{}_t\Delta_b^{-\alpha} f(t) = -\left({}_t\Delta_b^{-\mu} f(t) \right).
$$

Опишем некоторые известные свойства дробной суммы и дробной разности:
1. $\Delta^{\alpha}\Delta^{\beta} f(t) = \Delta^{\alpha+\beta} f(t)$;
2. $\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0)$;
3. $\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha} f(t) = f(t) - f(0)$;
4. $\Delta^{\alpha} f(0) = 0$ и $\Delta^{\alpha} f(1) - f(0) = \Delta f(1)$.

Имеет место (см. например [2])

Теорема 1. (о дробной суммировании по частям). Пусть f и g неотрицательные функции с действительными значениями, определенными на T^k и T соответственно. Если $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\mu = 1-\alpha$, то

$$
\sum_{t=a}^{b-1} f(t)\, {}_a\Delta_t^{\alpha} g(t) = f(b-1)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{t=a}^{b-2} {}_t\Delta_b^{\alpha} f(t) g^{\sigma}(t) +
$$
$$
+ \frac{\mu}{\Gamma(\mu+1)} g(a) \left(\sum_{t=a}^{b-1} (t+\mu-\alpha)^{(\mu-1)} f(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{b-1} (t+\mu-\sigma(\alpha))^{(\mu-1)} f(t) \right).
$$

Рассмотрим следующую систему линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка

$$
\Delta^{\alpha} y(t+1) = A(t)y(t) + g(t) \tag{1}
$$

с начальными условиями

$$
y(t) = y_0. \tag{2}
$$

Здесь $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ — n-мерный вектор столбец, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)'$ заданный n-мерный вектор, $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})'$ — заданный постоянный вектор столбец, t_0, t_1 — заданные числа,

$$
A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}
$$

— заданная $n \times n$-дискретная матричная функция.

Задача (1)–(2) является дискретным аналогом задачи Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Имеет место.

Теорема 2. Решение $y(t)$ системы линейных, неоднородных разностных уравнений дробного порядка (1)–(2) допускает представление

$$
y(t) = y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} \left[1 + R_{\alpha}(t-1,j)A(j)\right] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j) f(j) \prod_{k=j+1}^{t-1} \left[1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)\right].
$$

Здесь $R_{\alpha}(t,j) = \binom{t-i+\alpha-1}{t-j}$.

Доказательство. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\mu = \alpha - 1$, применяя $\Delta^{-\alpha}$ обеим сторонам уравнения (1) имеем

$$\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha}(t+1)\right) = \Delta^{-\alpha}\left(A(t)y(t) + g(t)\right). \tag{3}$$

Теперь рассмотрим левую сторону уравнения (3):

$$\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha}(t+1)\right).$$

Учитывая свойства операторов дробной суммы и дробной разности проведем следующие преобразования

$$\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha} y(t)\right) = \Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{1-\mu} y(t+1)\right) = \Delta^{-\alpha}\Delta^{-\mu}\left(\Delta y(t+1)\right) =$$

$$= \Delta^{-1}\left(\Delta y(t+1)\right) = \sum_{j=t_0}^{t}\left(y(t+1) - y(t)\right) = y(t+1) - y(t_0).$$

Преобразуем теперь правую сторону уравнения (3). Имеем

$$\Delta^{(} - \alpha)\left(A(t)y(t) + g(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=t_0}^{t}\left(t - \rho(j)\right)^{(\alpha-1)}\left(A(j)y(j) + g(j)\right) =$$

$$= \sum_{j=t_0}^{t}\binom{t-j+\alpha-1}{t-j}\left(A(j)y(j) + g(j)\right) = \sum_{j=t_0}^{t} R_{\alpha}(t,j)\left(A(j)y(j) + g(j)\right).$$

Здесь

$$R_{\alpha}(t,j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

Таким образом, получили, что

$$y(t+1) = y(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t} R_{\alpha}(t,j)\left(A(j)y(j) + g(j)\right)$$

или

$$y(t) = y(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)\left(A(j)y(j) + g(j)\right).$$

Из последней формулы получим, что

$$y(t) = y_0\prod_{j=t_0}^{t-1}\left[\left[1 + R_{\alpha}(t-1,j)A(j)\right] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)f(j) \times \prod_{k=j+1}^{t-1}\left[1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)\right]\right]. \tag{4}$$

Теорема доказана.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1)), \tag{5}$$

при следующих ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^{r}, t \in T = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\}, \tag{6}$$

$$\Delta^{\alpha}x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), t \in T, \tag{7}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{8}$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор фазовых переменных, $u(t)$ — r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий, U заданное непустое ограниченное открытое множество, числа t_0, t_1 и постоянный вектор x_0 — заданы, $f(t, x, u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, $\varphi(x)$ заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $\Delta^{\alpha}x(t)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ — дробный оператор порядка α [2–8, 14].

Управляющую функцию назовем допустимым управлением. если оно удовлетворяет ограничению (6).

Предполагается что, при каждом заданном допустимом управлении дискретный аналог задачи Коши, т. е. задача (1)–(2) имеет единственное решение.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (6)–(8) называется оптимальным управлением, а пара $(u(t), x(t))$ — оптимальным процессом.

3. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Построим формулу приращения критерия качества.

Пусть $(u(t), x(t))$ фиксирована, а $(\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ — произвольный допустимый процесс.

Учитывая введенные обозначения получаем, что $\Delta x(t)$ (приращение траектории $x(t)$), соответствующее $\Delta u(t)$ (приращению управления $u(t)$) удовлетворять системе уравнений

$$\Delta^{\alpha}(\Delta x(t+1)) = f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)), \tag{9}$$

с начальным условием

$$\Delta x(t_0) = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, ясно что, приращение функционала $S(u)$, отвечающее приращению $\Delta u(t)$ управления, имеет следующий вид:

$$S(u) = S(\overline{u}) - S(u) = S(u + \Delta u(t)) - S(u) = \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)). \tag{11}$$

Через $\psi(t)$ обозначим пока неизвестную n-мерную вектор-столбец и положим

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u).$$

Здесь и в дальнейшем штрих для векторов означает операцию скалярного произведения. Функцию $H(t, x, u, \psi)$ назовём функцией Гамильтона-Понтрягина для рассматриваемой задачи оптимального управления (5)–(8).

Умножая обе части соотношения (9) слева скалярно на $\psi(t)$. а затем, суммируя обе части полученного тождества по t от t_0 до $t_1 - 1$ и принимая во внимание выражение функции Гамильтона-Понтрягина, получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t+1)) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\left[f(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) - f(t,x(t),u(t))\right] =$$

$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t),\psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]. \tag{12}$$

С учетом этого тождества приращение (10) функционала может быть представлено в виде

$$\Delta S(u) = \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t+1)) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), \psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]. \quad (13)$$

Теперь займемся преобразованием левой части слагаемой формулы (12). С этой целью рассмотрим выражение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t+1)).$$

Сделав в нем замену переменных $t+1=s$ и учитывая начальное условие получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t+1)) = \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \psi'(t-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t)) = \\ = \psi'(t_1-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t_1)) - \psi'(t_0-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t_0)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t)) = \\ = \psi'(t_1-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t)). \quad (14)$$

Далее с учетом теоремы о дробном суммирование по частям приведенной выше, имеем

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta^{\alpha}(\Delta x(t)) = \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1)\Delta x(t_0) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi(t-1)\Delta x(t) + \frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta x(t_0) \times \\ \times \left(\sum_{t=t_0}^{t_1-1} (t+\mu-t_0)^{(\mu-1)}\psi(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{t_1-1} (t+\mu-\sigma(t_0))^{(\mu-1)}\Delta x(t)\right) = \\ = \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}_{\rho}(t_1)\psi(t-1)\Delta x(t). \quad (15)$$

С учетом тождества (11) из (9) получим

$$\Delta S(u) = \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}_{\rho}(t_1)\psi(t-1)\Delta x(t) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t),\psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]. \quad (16)$$

С помощью полученного разложения (16) будет доказано необходимое условие оптимальности первого порядка.

В дальнейшем будут использованы обозначения типа

$$H_x[t] \equiv H_x(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)), H_{xx}[t] \equiv H_{xx}(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)),$$

$$H_u[t] \equiv H_u(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)),\, f_x[t] \equiv f_x(t,x(t),y(t),u(t)),$$
$$f_y[t] \equiv f_y(t,x(t),y(t),u(t)), f_u[t] \equiv f_u(t,x(t),y(t),u(t)).$$

При сделанных предположениях формулу приращения из (16) используя формулу Тейлора, функционала $S(u)$, соответствующий допустимым управлениям $\overline{u}(t)$ и $u(t)$ можно представит в виде:

$$\begin{aligned}\Delta S(u) = \varphi_x(x(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + \\ + \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi'(t-1)\Delta x(t) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H'_x[t]\Delta x(t) + H'_u[t]\Delta u(t)] - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \\ + 2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] + \\ + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \quad (17)\end{aligned}$$

Теперь предположим, что $\psi(t)$ является решением следующей системы линейных однородных дробного порядка разностных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi'(t-1) = H_x[t],\ t = t_1, t_1-2, \ldots, t_0, \\ \psi(t_1-1) = \varphi_x(x(t_1)). \end{cases} \quad (18)$$

Систему (18) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче (5)–(8).

При выполнении соотношений (14) формула приращения (13) примет следующий вид

$$\begin{aligned}\Delta S(u) = \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t]\Delta u(t) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \\ + 2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] + \\ + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \quad (19)\end{aligned}$$

Поскольку по предложения множество U открытое, то специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определит по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon\delta u(t). \quad (20)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)$ произвольная r-мерная вектор функция со значениями из R^r.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение оптимальной траектории $x(t)$, отвечающей специальному приращению управления $u(t)$, определяемое формулой (20).

С учетом оценок из [4, 9] получаем, что

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \leqslant L_3\varepsilon,\ t \in T \cup t_1, L_3 = \text{const} > 0. \quad (21)$$

Учитывая оценку (22), легко доказывается, что для $\Delta x_\varepsilon(t)$ справедливо следующее разложение

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon; t), \tag{22}$$

где $\delta x(t)$, n-мерная вектор функция, являющаяся решением уравнения

$$\Delta^\alpha x(t+1) = f_x[t]\delta x(t) + f_u[t]\delta u(t), \tag{23}$$

с начальным условием

$$\delta x(t_0) = 0. \tag{24}$$

Принимая во внимание (20)–(24), из формулы приращения (19), получим

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u) &= S(u+\varepsilon\delta u) - S(u) = \\
&= -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\varepsilon\delta u(t) + \frac{1}{2}(\varepsilon\delta x(t_1) + o(\varepsilon;t_1))\varphi_{xx}(x(t_1))(\varepsilon\delta x(t_1) + o(\varepsilon;t_1)) - \\
&- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[(\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon;t))H_{xx}[t](\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon;t)) + 2\varepsilon\delta u(t)'H_{ux}[t](\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon;t)) + \\
&+ \varepsilon^2\delta u(t)'(t)H_{uu}[t]\delta u(t)] + o(\varepsilon^2) = -\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\delta u(t) + \varepsilon^2/2\delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\delta x(t_1) - \\
&- \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) + 2\varepsilon\delta u(t)'H_{ux}[t]\delta x'(t) + \\
&+ \delta u(t)'(t)H_{uu}[t]\delta u(t)] + o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{25}$$

4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Доказанное специальное разложения второго порядка (25) критерия качества позволяет получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Из классического вариационного исчисления известно если имеет место разложение

$$S(u+\varepsilon\delta u) - S(u) = \varepsilon A_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}A_2 + o(\varepsilon^2), \tag{26}$$

где A_1 и A_2 независимые от ε числа, то A_1 и A_2 называются, соответственно, первой и второй вариациями функционала $S(u)$ в точке u и обозначаются следующим образом:

$$A_1 = \delta^1 S(u,\delta u),$$
$$A_2 = \delta^2 S(u,\delta u).$$

По этому определения и разложения (25) вытекает, что первая и вторая вариации функционала $S(u)$ имеют соответственно, следующий вид:

$$\delta^1 S(u,\delta u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\delta u(t), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u,\delta u) &= \delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\delta x(t_1) - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\delta x'(t)H_{xx}[t]\delta x(t) + 2\varepsilon\delta u(t)'H_{ux}[t]\delta x'(t) + \delta u(t)'(t)H_{uu}[t]\delta u(t)] + o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{28}$$

Из классического вариационного исчисления известно, что если функционал $S(u)$ в точке $u = u(t)$ получает свое минимальное значение, то для любого $\delta u(t)$ его первая вариация равна нулю:

$$\delta^1 S(u,\delta u) = 0, \tag{29}$$

а вторая вариация неотрицательна:

$$\delta^2 S(u,\delta u) \geqslant 0. \tag{30}$$

Отсюда следует, что (в силу (29), (30)) вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для любого $\delta u(t) \in R^r$, $t \in R$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\delta u(t) = 0, \tag{31}$$

$$\delta^2 S(u,\delta u) = \delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\delta x'(t) H_{xx}[t]\delta x(t) + 2\varepsilon \delta u(t)' H_{ux}[t]\delta x'(t) + \\ + \delta u(t)'(t) H_{uu}[t]\delta u(t)] \geqslant 0. \tag{32}$$

Как видно тождество (31) и неравенство (32) есть неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Но они позволяет получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности первого и второго порядков. С этой целью, используя произвольность $\delta u(t)$, определим его следующим образом:

$$\delta u(t) = \begin{cases} v, & t = \theta \in T, \\ 0, & t \neq \theta \in T, \end{cases} \tag{33}$$

где $\theta \in T$, $v \in R^r$.

С учетом (33) из (31) получим

$$\sum t = {t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\delta u(t) = H_u'[\theta]v = 0$$

для всех

$$H_u'[\theta]v = 0, \quad \forall v \in R^r, t = \theta \in T.$$

Из последнего соотношения, в силу произвольности вектора v, следует тождество

$$H_u'[\theta] = 0. \tag{34}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Если в рассматриваемой задаче множество U открыто, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы соотношение (34) выполнялось для любого $\theta \in T$.

Соотношение (34) являются аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи оптимального управления. Как видно уравнение Эйлера (34) конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности.

А неравенство (32) есть эффективно непроверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка.

Займемся этим вопросом. Как известно $\delta x(t)$ является решением задачи (23)–(24). Поскольку рассматривается задача с нулевым начальным условием, по теорема 2 $\delta x(t)$ можно представить в следующем виде

$$\delta x(t) = \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,j) f_u[j]\delta u(j) \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1,k) f_x[k]]. \tag{35}$$

Используя формулу (35), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (32). Ясно что,

$$\delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\delta x'(t_1) = \\ = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1,\tau) f_u[\tau]\delta u(\tau) \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]]\varphi_{xx}(x(t_1))\times \\ \times R_\alpha(t-1,s)f_u[s]\delta u(s)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]].$$

Неравенство (32) можно преобразовать к виду

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1,\tau) f_u[\tau]\delta u(\tau) \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]]\varphi_{xx}(x(t_1))\times \\ \times R_\alpha(t-1,s)f_u[s]\delta u(s)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]] - \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1,\tau) f_u[\tau]\delta u(\tau)\times \\ \times \prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,\tau)f_x[\tau]]H_{xx}[t]\times[1+R_\alpha(t-1,s)f_x[s]]R_\alpha(t-1,s)f_u[s]\delta u(s)+ \\ +2\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}[\delta u'(t)H_{xu}[t]\prod_{k=\tau+1}^{t-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]]\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\delta u(\tau)+ \\ +\delta u(t)'(t)H_{uu}[t]\delta u(t)] \geqslant 0. \quad (36)$$

Пусть $M(\tau, s)$ — $(n\times n)$ матричная функция, определяемая формулой

$$M(\tau,s) = -R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]]\varphi_{xx}(x(t_1))\times \\ \times R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]]+ \\ +R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}[1+R_\alpha(t-1,\tau)f_x[\tau]]H_{xx}[t][1+R_\alpha(t-1,s)f_x[s]]. \quad (37)$$

Учитывая формулу (37), неравенство (36) записывается в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(\delta u(\tau))f'_u[\tau]M(\tau,s)f_u[s](\delta u(s)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}(\delta u(t))'H_{uu}[t]\delta u(t)\leqslant 0. \quad (38)$$

Теорема 4. (Необходимое условия оптимальности второго порядка) Для оптимальности классической экстремали в задаче (5)–(10) необходимо, чтобы неравенство (38) выполнялось для всех $\delta u(t)\in U$, $t\in T$, где $M(\tau, s)$ определяется по формуле (37).

Необходимое условие оптимальности является довольно общим. Из него, используя произвольность вариаций $\delta u(t)$, управляющих функций $u(t)$, можно получить ряд более легко проверяемых условий оптимальности и, в частности, исследовать особые в классическом смысле [17] управления.

Непосредственным следствием теоремы 4 является.

Следствие. Для оптимальности классической экстремали в рассматриваемой задаче необходимости неравенство

$$v'[f_u'[\theta]M(\theta,\theta)f_u[\theta] + H_u u[\theta]]v \leqslant 0$$

выполнялось для всех $v \in R^r$, $\theta \in T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Silva, C. J. Optimal control for a tuberculosis model with reinfection and post-exposure interventions / C. J. Silva, D. F. M. Torres // Math. Biosci. — 2013. — V. 244, № 2. — P. 154–164.

2. Miller, K. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations / K. Miller, B. Ross. — New York : Wiley, 1993. — 366 p.

3. Podlubny, I. Fractional differential equations / I. Podlubny. — San Diego : Acad. Press, 1999. — 340 p.

4. Jagan Mohan, J. Fractional Order Difference Equations / J. Jagan Mohan and G. V. S. R. Deekshitulu // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations. — V. 2012. — Article ID 780619. — 11 p.

5. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

6. Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam, 2006.

7. Samko, S. G. Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of their Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — Minsk, 1987.

8. Christopher, G. Discrete fractional calculus / G. Christopher, A. C. Piterson. — NE, 2015.

9. Алиева, С. Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка / С. Т. Алиева // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника. — 2021. — № 54. — С. 4–11.

10. Розоноэр, Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I / Л. И. Розоноэр // Автоматика и телемеханика. — 1959. — Т. 20, вып. 10. — С. 1320–1334.

11. Алиева, С. Т. Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка / С. Т. Алиева, К. Б. Мансимов // Вестник Пермского Университета, Мат., Мех. и Информатика. — 2021. — Вып. 1(52). — С. 9–15.

12. Пропой, А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М. : Наука, 1973. — 258 с.

13. Мансимов, К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. — Баку : Изд-во Бакинского государственного университета, 2013. — 151 с.

14. Chen, F. Existence results for nonlinear fractional order difference equation / F. Chen, X. Luo, Y. Zhou // Advances in Difference Equations. — 2011. — Article ID 713201. — 12 p.

15. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1979. — 429 с.

16. Методы оптимизации / Р. Габасов и др. — Минск : Четыре четверти, 2011. — 472 с.

17. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

REFERENCES

1. Silva C.J., Torres D.F.M. Optimal control for a tuberculosis model with reinfection and post-exposure interventions, Math. Biosci. 2013, vol. 244, no. 2, pp. 154–164.

2. Miller K., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley, 1993, 366 p.

3. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999, 340 p.

4. Jagan Mohan J., Deekshitulu G.V.S.R. Fractional Order Difference Equations. Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations, vol, 2012, Article ID 780619, 11 p.

5. Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application. [Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie]. Moscow, 2003, 272 p.

6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Amsterdam, 2006.

7. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of their Applications, Minsk, 1987.

8. Christopher Goodric, Allan C. Piterson. Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska. NE, 2015.

9. Alieva S.T. Pontryagin's maximum principle for nonlinear difference equations of fractional order. [Alieva S.T. Princip maksimuma Pontryagina dlya nelinejnyh raznostnyh uravnenij drobnogo poryadka]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika — Bulletin of Tomsk State University. Management, computer technology*, 2021, no. 54, p. 4–11.

10. Rosonoer L.I. The LS Pontryagin maximum principle in the theory of optimal systems. I. [Rozonoer L.I. Princip maksimuma L.S. Pontryagina v teorii optimal'nyh sistem. I]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and telemechanics*, 1959, vol. 20, iss. 10, pp. 1320–1334.

11. Alieva S.T., Mansimov K.B. An analogue of the linearized maximum principle for the optimal control problem for nonlinear difference equations of fractional order. [Alieva S.T., Mansimov K.B. Analog linearizovannogo principa maksimuma dlya zadachi optimal'nogo upravleniya nelinejnymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka]. *Vestnik Permskogo universiteta, Mat., Mekh. i Informatika — Perm University Bulletin, Mat., Mekh. i Informatika*, 2021, iss. 1 (52), pp. 9–15.

12. Propoj A.I. Elements of the theory of optimal discrete processes. [Propoj A.I. Elementy teorii optimal'nyh diskretnyh processov]. Moscow: Nauka, 1973, 258 p.

13. Mansimov K.B. Discrete systems. [Mansimov K.B. Diskretnye sistemy]. Baku, 2013, 151 p.

14. Chen F., Luo X., Zhou Y. Existence results for nonlinear fractional order difference equation. Advances in Difference Equations, 2011, Article ID 713201, 12 p.

15. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control. [Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie]. Moscow: Nauka, 1979, 429 p.

16. Gabasov R., Kirillova F.M. et. at. Optimization methods. [Gabasov R., Kirillova F.M. i dr. Metody optimizacii]. Minsk: Four quarters, 2011, 472 p.

17. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

Алиева Саадат Тофик кызы, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Математической кибернетики, Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
E-mail: saadata@mail.ru

Alieva Saadat Tofik kizi, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
E-mail: saadata@mail.ru