

УДК 539.2

САМООРГАНИЗАЦИЯ МАЛЫХ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ В РАМКАХ МОДЕЛИ ЕФИМОВА

Г. А. Мельников, Н. М. Игнатенко, А. С. Громков

Юго-Западный государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2022 г.

Аннотация. В модели твёрдых сфер рассмотрен эффект Ефимова в случае присутствия во взаимном расположении трёх частиц “золотой” пропорции. Показано, что в этом случае возможно формирование связанного состояния частиц в хаотичной системе вещества, представляющее собой дискообразный кластер. В экваториальной плоскости такого кластера формируется планарная система с характерным “магическим” числом частиц. В структуре дискообразного кластера возможно образование тороидальной квантово-размерной области.

Ключевые слова: самоорганизация, модель, эффект Ефимова, “золотая” пропорция, кластер, квантово-размерная область.

SELF-ORGANIZATION OF SMALL CLUSTER SYSTEMS IN THE FRAMEWORK OF THE EFIMOV MODEL

G. A. Melnikov, N. M. Ignatenko, A. S. Gromkov

Abstract. In the model of hard spheres, the Efimov effect is considered in the case of the presence of three particles of the "golden" proportion in the mutual arrangement. It is shown that in this case it is possible to form a bound state of particles in a chaotic system of matter, which is a disk-shaped cluster. In the equatorial plane of such a cluster, a planar system with a characteristic "magic" number of particles is formed. In the structure of a disk-shaped cluster, the formation of a toroidal quantum-size region is possible.

Keywords: self-organization, model, Efimov effect, “golden” proportion, cluster, quantum-dimensional region.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследования процессов самоорганизации в конденсированных средах и кластерных системах являются одним из приоритетных направлений в физике конденсированного состояния. Условно можно обозначить три важных направления таких исследований – это исследования законов синергетики (Г. Хакен [1]), теория неравновесной термодинамики, принципы которой сформулированы И. Р. Пригожиным [2] и Ю. Л. Климонтовичем [3], теория катастроф (Р. Том [4]). Самоорганизация частиц в кластерные системы наблюдается в кристаллических структурах (самосборка) [5], в биологических веществах [6], в жидкостях (в том числе квантовых), газах и плазме [7], полимерах [8].

© Мельников Г. А., Игнатенко Н. М., Громков А. С., 2022

В рамках теории Ефимова процесс самоорганизации частиц в среде с хаотичным движением частиц в кластерную систему начинается со случайно возникшей в результате флуктуаций ситуации, когда две частицы находятся на расстоянии, равном расстоянию минимума потенциальной энергии взаимодействия между двумя частицами, однако энергии связи недостаточно для образования связанного их состояния. В этом случае, появление третьей частицы на расстоянии, превышающем расстояние между тесной парой частиц, приводит к возникновению эффекта Ефимова [9–11].

1. ФОРМАЛИЗМ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ЭФИМОВА

Основой описания трёхчастичной системы частиц (трёхчастичного кластера) является уравнение Шрёдингера, записанного для такой системы, при этом Гамильтониан системы записывается в стандартном виде [9–12]:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_3^2 + V(r_{12}) + V(r_{13}) + V(r_{23}). \quad (1)$$

Скорняков и Тер-Мартirosян решили задачу трёх тел для сил нулевого радиуса действия, которое вошло в мировую литературу под именем уравнения Скорнякова–Тер-Мартirosяна (1956 г.) [12]:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{3}{4}\nabla_R^2 - \nabla_r^2 + k^2\right) \Psi(\vec{R}_k, \vec{r}_{ij}) = \\ & = 4\pi (F_1(R_1)\delta^3(r_{23}) + F_2(R_2)\delta^3(r_{13}) + F_3(R_3)\delta^3(r_{12})), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Psi(\vec{R}_k, \vec{r}_{ij}) \rightarrow_{r_{ij} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{a_{ij}}\right) F_k(\vec{R}_k). \quad (3)$$

Уравнение (2) было обобщено Л. Д. Фаддеевым для потенциалов конечного радиуса [13–15]. Расширение модели (2), оставляющее взаимодействие между частицами точечным, приводит к волновым функциям рассеяния, удовлетворяющим при всех $k > 0$ равенству [16,17]:

$$\frac{d}{dr} \ln [r\Psi(k)] \downarrow_{r>0} = k \operatorname{ctg} \delta(k). \quad (4)$$

Приближённые методы исследования свойств систем из нескольких частиц в рамках квантовой теории рассеяния позволили получить систему уравнений типа уравнений Фаддеева [13–15], фундаментальное решение которых было выполнено Ефимовым для трёхчастичной системы путем использования для координат частиц соотношений Якоби [9–11].

В гиперсферических координатах уравнение Шрёдингера записывается в виде:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + V_n(R) - k^2\right) \sqrt{R} F_n(R) = 0, \quad (5)$$

$$V_n(R) = \frac{s_n^2 - 1/4}{R^2}, \quad (6)$$

где $V_n(R)$ — гиперрадиальный потенциал Ефимова, R — гиперрадиус.

Решения уравнения (5) с потенциалом (6) являются действительными, однако, как показали расчеты, при значении параметра $s_n = s_0 \approx \pm 1.00624i$ решение становится мнимым. В этом случае потенциал (6) становится отталкивающим и трактуется как центробежный барьер для свободного движения трёхчастичной системы, при этом R_0 приводит к эффективному притяжению трёх тел [16].

В теории Ефимова можно выделить несколько важных выводов.

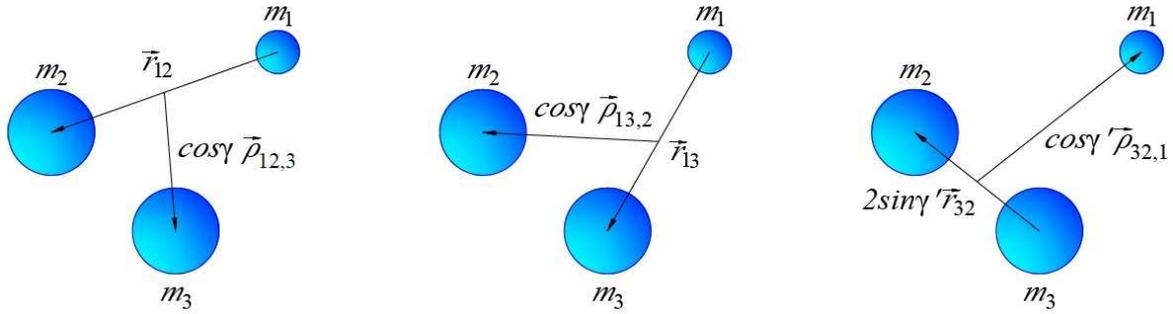


Рис. 1. Три набора координат Якоби для двух идентичных частиц плюс одна частица меньшей массы [11].

1. Эффект Ефимова проявляется наиболее чётко, если третья частица в системе оказывается меньше двух остальных по массе и размерам (рисунок 1).

2. В конфигурационном пространстве положение трёх частиц описывается парами приведенных координат Якоби (x_α, y_α) , где $\alpha = 1, 2, 3$, причём они образуют циклическую перестановку индексов $(1, 2, 3)$. Набор координат α описывает разбиение трех частиц на пару частиц-димер (β, γ) и отдельную частицу α [17]:

$$\begin{aligned} \vec{x}_\alpha &= \left[\frac{2m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} (\vec{r}_\beta - \vec{r}_\gamma), \\ \vec{y}_\alpha &= \left[\frac{2m_\alpha (m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\vec{r}_\alpha - \frac{m_\beta \vec{r}_\beta + m_\gamma \vec{r}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Полная волновая функция в этом случае представляется в виде суммы компонент функций Фаддеева [13–15].

3. В системе трёх частиц, взаимодействующих с силами малого радиуса r_0 , с длиной рассеяния a , т.е. эффективным размером частицы с точки зрения её столкновения с другой частицей, возникают специфические уровни энергии, не зависящие от радиуса действия сил и их радиальной формы. Их назвали “уровнями Ефимова”. Число этих уровней N определяется формулой [9–11]:

$$N \approx \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{a}{r_0} \right). \quad (8)$$

Для отношения соседних энергетических уровней Ефимова, получено следующее выражение:

$$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \exp(2\pi). \quad (9)$$

При нулевом радиусе действия сил $r_0 \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, в согласии с результатом, получаемым с помощью уравнений Скорнякова–Тер-Мартиросяна, все уровни представлялись наблюдаемыми и имели физический смысл. Теоретическим результатом в квантовой физике нескольких тел является предсказание Ефимова универсального набора связанных тримерных состояний, возникающих для трёх идентичных бозонов с резонансным взаимодействием двух тел.

В работе [18] сообщается об экспериментальном наблюдении Ефимовского резонанса в ультрахолодном газе атомов цезия. Резонанс возникает в диапазоне больших отрицательных длин двухчастичного рассеяния, возникающего в результате взаимодействия трёх свободных атомов с тримером Ефимова. Экспериментально наблюдали его сигнатуру как гигантскую трехчастичную рекомбинационную потерю при изменении силы двухчастичного взаимодействия. Обнаружен минимум потерь на рекомбинацию для положительных длин рассеяния,

что указывает на деструктивную интерференцию путей распада. В то время как резонансы Фешбаха предоставили ключ к управлению квантово-механическими взаимодействиями на уровне двух тел, резонансы Ефимова соединяют ультрахолодную материю с миром квантовых явлений нескольких тел [18].

3. В разрезе предлагаемой работы интересно отметить, что эффект Ефимова для системы трёх квантовых частиц при квантово-механическом описании из полного гамильтониана можно выделить энергию движения центра масс так, что трехчастичные “связанные состояния” становятся собственными векторами, при этом на решетке “выделению центра масс” системы отвечает реализация гамильтониана как “расслоенного оператора”, т.е. “прямого интеграла семейства операторов” $H(K)$, зависящих от полного квазиимпульса $K \in T^3$, где T^3 трёхмерный тор [19, 20]. Другими словами, в пространстве трёхчастичной системы формируется квантово-размерная область в виде сферы определенного радиуса [21, 22]. Набор таких сфер в экваториальной плоскости кластера трансформируется в трёхмерный тор. В случае захвата в тороидальную квантово-размерную область заряженной частицы, эта область становится “квантовой точкой” с излучением электромагнитной волны определённой длины волны [21, 22, 36].

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ФАКТОР И “ЗОЛОТАЯ” ПРОПОРЦИЯ В ЭФФЕКТЕ ЕФИМОВА

В относительном расположении трёх частиц формируется равнобедренный треугольник, соотношения между сторонами которого определяются случайным образом, однако в результате флуктуаций в хаотичной системе частиц возможно возникновение ситуации, когда соотношения между сторонами треугольника подчиняются “золотому” правилу. В этом случае диаметр взаимодействующих частиц σ и расстояние до третьей возмущающей частицы L_1 определится на основе свойств “золотого” треугольника формулой (рисунок 2):

$$L_1 = \frac{\sigma}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad (10)$$

где θ — “золотой” угол.

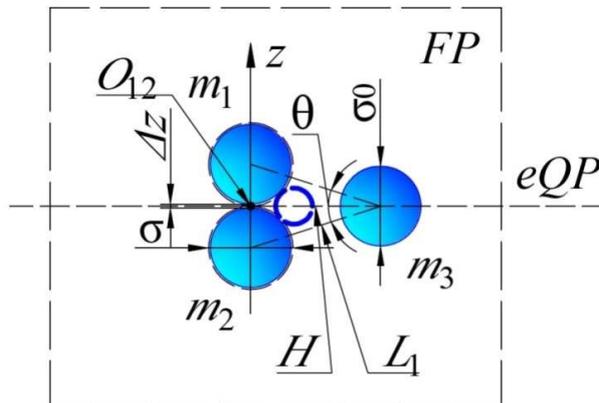


Рис. 2. Эффект Ефимова в трёхчастичном кластере с взаимным расположением частиц по правилу “золотого” треугольника в модели твёрдых сфер.

При значении угла в 36° , который считается “золотым”, согласно формуле (10), получим [23]:

$$L_1 = \Phi \sigma, \quad (11)$$

где $\Phi = \frac{1}{\varphi} = 1.6180339\dots$ — “золотая” пропорция (“золотое” сечение).

Обозначим плоскость, содержащую центр масс димера O_{12} , центр масс третьей частицы O_3 и перпендикулярную вертикальной оси симметрии димера, как *экваториальную плоскость формирующегося кластера* eQP . В экваториальной плоскости центр масс димера и двух рядом стоящих частиц образуется “золотой” треугольник, причём на расстоянии H в этой плоскости согласно формуле (12) осуществляется плотная упаковка целого числа частиц, количество которых определяется величиной “золотого” угла:

$$N_1 = \frac{360^\circ}{\theta}. \quad (12)$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений параметров “золотых” треугольников в экваториальной плоскости формирующегося кластера. Анализ таблицы 1 позволяет сделать вывод: “золотой” угол – это угол при вершине в равнобедренном трёхчастичном треугольнике Ефимова, под которым наблюдается диаметр третьей частицы из центра масс димера. Формулы (10)–(12) определяют условия формирования трёхчастичного кластера в экваториальной плоскости дискообразного кластера, а так же условия возникновения “золотого” треугольника Ефимова.

Таблица 1. Тригонометрические функции “золотых” углов.

θ	$N_1, (12)$	$2 \sin(\theta/2)$	L_1/σ
72°	5	1.17557...	0.85065...
36°	10	0.61803...	$\Phi = 1.618033\dots$
18°	20	0.31287...	$2\Phi = 3.23607\dots$
12°	30	0.20906...	$3\Phi = 4.85410\dots$
9°	40	0.15692...	$4\Phi = 6.47213\dots$
6°	60	0.10462...	$6\Phi = 9.70820\dots$
3°	120	0.052354...	$12\Phi = 19.4164\dots$
2°	180	0.034905...	$18\Phi = 29.1246\dots$
1°	360	0.017453...	$35\Phi = 56.6312\dots, 57.2967$

Максимальное расстояние, при котором происходит захват третьей частицы в трёхчастичную систему, определяется при “золотом” угле в 1° , что равносильно расстоянию от центра масс димера до центра масс третьей частицы равного:

$$H = L_{cap} = 57.2938\dots \cdot \sigma, \quad (13)$$

где σ — диаметр частиц в трёхчастичной системе.

Эффективный диаметр частиц многоатомных органических жидкостей (например, аренов) может быть рассчитан по методике, предложенной авторами работ [24, 36].

Моделирование ближнего порядка в жидкостях с помощью ЭВМ в модели абсолютно твёрдых сфер показало [25], что в структуре первого максимума радиальной функции распределения наблюдаются линейные цепочки из твёрдых сфер. Было обнаружено наличие практически прямых линий атомов длиной до шести атомов, причём направление такой линии может быть любым. Подобные линии были названы коллинеациями (collineations), которые играют важную роль в процессах переноса в жидкостях, перемещаясь как целое [25].

В работе [26] показано на основе интегрального уравнения Борна–Грина–Ивона (BGY) при изучении структуры и термодинамики жидкости, возможно формирование димеров твёрдых сфер. Исходя из уравнения BGY, получена функция распределения пар молекул димера в жидкости. Подробные результаты представлены для димеров с длинами связей $L = 0.6\sigma$ и 1.0σ (где σ — диаметр узла твёрдой сферы). Эти результаты, которые включают функцию

распределения узлов, а также уравнения состояния сравниваются с аналитическими результатами и результатами, полученными методами Монте-Карло.

Для атомов He^3 в случае основного состояния система этих атомов He^3 образует равносторонний треугольник, в случае возбужденного состояния один из атомов находится достаточно далеко от двух других, причем именно эта конфигурация соответствует условиям возникновения эффекта Ефимова в трёхчастичной системе [27].

Предложенная модель предсказывает свойства трёхчастичной системы для He^4 , диаметр атома для которого в модели абсолютно твёрдой сферы составляет 2.10 \AA , следовательно, согласно формуле (13) захват третьей частицы димером He^4 произойдет на расстоянии приблизительно в 120 \AA , что коррелирует с длиной рассеяния в модели Ефимова ($L = 104 \text{ \AA}$ [28]).

Присутствие “золотого” сечения в структуре кластера предполагает определённый закон взаимодействия между частицами. Действительно, воспользуемся общим степенным потенциалом Г. Ми (Mie) [29]:

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{\varepsilon_0}{n-m} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{n-m}} \left[\left(\frac{\sigma}{r_{ij}}\right)^n - \left(\frac{\sigma}{r_{ij}}\right)^m \right], \quad (14)$$

$$C_{ij} = \frac{n}{(n-m)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}, \quad \sigma_0 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}} R_1. \quad (15)$$

Сравнивая соотношения (2) и (15) получим формулу, устанавливающую взаимосвязь показателей степени в потенциале взаимодействия с “золотой” пропорцией для “золотого” угла в 36° :

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{n-m}} = \Phi, \quad (16)$$

которая позволяет определить показатели степеней в потенциале (14) Г. Ми. Такими значениями могут быть $m = 2, n = 3$, тогда потенциал (14) примет вид:

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{9}{4} \varepsilon_0 \left[\left(\frac{\sigma_0}{r_{ij}}\right)^3 - \left(\frac{\sigma_0}{r_{ij}}\right)^2 \right]. \quad (17)$$

Особенность потенциала (17) заключается в том, что в трёхчастичной системе Ефимова возникающее слабое “затравочное” взаимодействие сопровождается возникновением более сильного взаимодействия, пропорционального R^{-2} . В этом случае в многочастичной системе возникает иерархия взаимодействий, когда слабые взаимодействия приводят к более сильным [27].

Уравнению (16) также удовлетворяют значения показателей степени равные $m = 1, n = 2$, тогда потенциал (14) запишется так:

$$\varphi(r_{ij}) = 4\varepsilon_0 \left[\left(\frac{\sigma_0}{r_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{r_{ij}}\right) \right]. \quad (18)$$

Потенциал (18) является разновидностью известного потенциала Кратцера (Kratzer-potential) [30].

Если взаимодействие между частицами описывается потенциалом Кратцера в виде:

$$V(r) = -2D_e \left(\frac{\sigma_0}{r} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{r^2} \right), \quad (19)$$

то в этом случае уравнение Шредингера допускает точное решение и позволяет получить формулу для собственных значений энергии колебательно-вращательных движений:

$$E_{nl} = -\frac{2m}{\hbar^2} D_e^2 \sigma_0^2 \left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m D_e}{\hbar^2} \sigma_0^2} \right]^{-2}. \quad (20)$$

Приняв модель кластера как многоатомную крупную молекулу, спектроскопические характеристики такого кластера будут определяться как для многоатомной молекулы, в частности, частоты основных колебательно-вращательных движений частиц в кластере в модели твёрдых шаров будет описываться уравнением Данхэма (20) [31].

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проявление эффекта Ефимова в неупорядоченной системе взаимодействующих частиц, в случае присутствия в трёхчастичной системе “золотой” пропорции, приводит к формированию дискообразных кластеров, диаметр которых определяется диаметром взаимодействующих частиц, “золотым” сечением и параметром рассеяния в модели Ефимова. Условно в процессе формирования дискообразных кластеров в хаотичных средах можно выделить несколько этапов.

I этап: образование “зародыща” кластера в виде связанного состояния трех частиц на основе эффекта Ефимова и “золотой” пропорции, причем получившийся равнобедренный треугольник в вершинах с взаимодействующими частицами (центрами масс частиц вещества) и “золотым” углом при одной из вершин треугольника становится первичным элементом дальнейшего строительства дискообразного кластера.

II этап: самоорганизация подобных фигур (равнобедренных “золотых” треугольников) в экваториальной плоскости eQP , имеющих одну общую вершину в центре масс димера (рисунок 2). В результате этого процесса образуется кластер, ядром которого является димер (связанное состояние двух частиц), центр масс которого лежит в экваториальной плоскости и является геометрическим центром для равноудаленных периферийных частиц кластера. В зависимости от величины “золотого” угла в равнобедренном треугольнике число частиц на периферийном круге однозначно связано с величиной “золотого” угла и является строго определенным.

В экваториальной плоскости дискообразного кластера формируется планарная система с геометрическим центром в центре масс димера (рисунок 3).

Существование дискообразных (планарных) кластеров подтверждено экспериментальными исследованиями плоских кластеров на кристаллической подложке. Обнаружены магические числа в двумерных кластерах (в частности для кластеров Ag), выращенных на квантовых подложках Рь [32].

Поверхностные магические кластеры (SMC) — это кластеры, демонстрирующие повышенную стабильность при определенных размерах на определенной поверхности. За счет образования SMC можно вырастить ансамбль наноструктур [33].

В работе [34] представлены масс-спектры для кластеров натрия из N атомов ($N = 4...100$), полученных в результате сверхзвукового расширения с газом-носителем аргоном. Спектры показывают большие пики или ступеньки при $N = 8, 20, 40, 58$ и 92 — считаются магическими числами для исследуемых кластеров. Их можно понять в терминах модели одноэлектронной оболочки, в которой независимые делокализованные атомные $3s$ -электроны связаны в сферически-симметричной потенциальной яме.

III этап: в результате самоорганизации элементов ефимовских тримеров в экваториальной плоскости формируется дискообразный кластер, центром которого является димерное образование (вернее центр масс димерного образования) (рисунок 2).

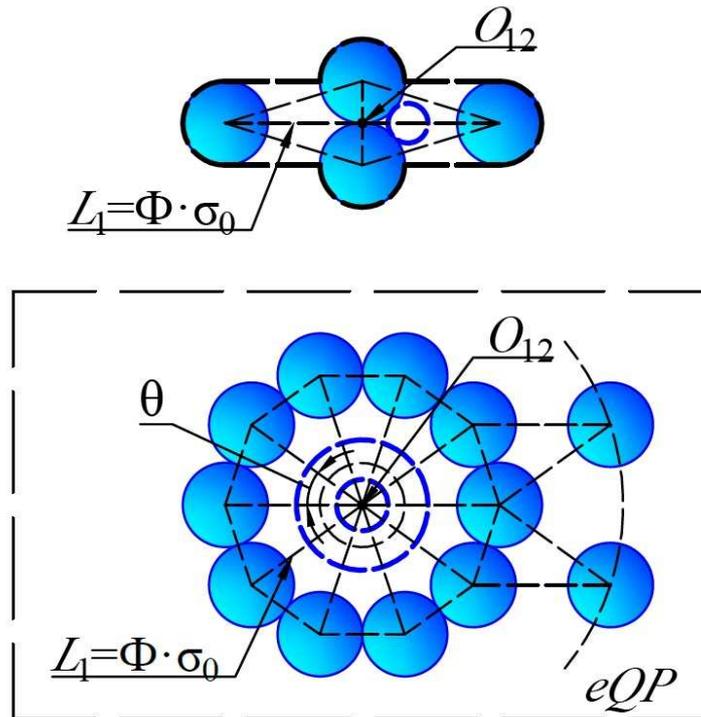


Рис. 3. Формирование дискообразного кластера абсолютно твёрдых сфер на основе “золотого” правила.

IV этап: в структуре дискообразного кластера в результате взаимодействия силовых полей димерного образования и периферийных частиц кластера образуется квантово-размерная область в виде тора с центром в центре масс димера (рисунок 4).

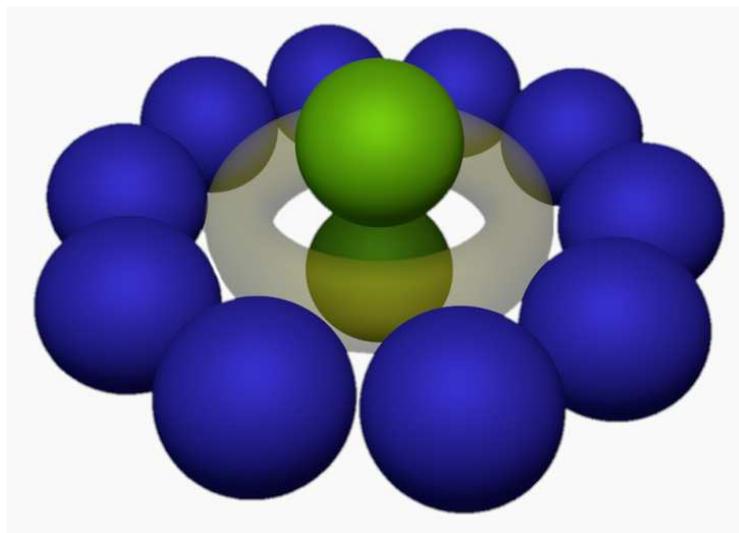


Рис. 4. Торoidalная квантово-размерная область в структуре дискообразного кластера.

Параметры квантово-размерной области в виде тора в структуре дискообразного кластера

вычисляются по формулам:

$$R_{Tor} = \left(\frac{m_0}{2m + m_0} \right) \frac{\sigma}{2} ctg \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (21)$$

В случае, когда частицы составляющие “золотой” треугольник в системе Ефимова имеют одинаковую массу m , формула (21) примет вид:

$$R_{Tor} = \frac{\sigma}{6} ctg \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (22)$$

малый радиус тора будет:

$$r_{Tor} = \varphi \frac{\sigma}{2}, \quad (23)$$

тогда, с учётом формул (22) и (21), объём тора определится формулой:

$$V_{Tor} = \frac{(\pi\varphi)^2}{12} \sigma^3 \cdot ctg \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0.3137\sigma^3 ctg \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (24)$$

Тор получается из прямоугольника отождествлением точек на противоположных сторонах, очевидно, справедливо обратное утверждение, поэтому движение заряженной частицы в объеме тора можно трактовать как движение этой частицы в плоской потенциальной яме шириной $l = 2\pi r_{Tor}$ и конечной глубины $h = 2\pi R_{Tor}$.

Такое формальное математическое преобразование позволяет применить хорошо разработанную квантовую теорию движения заряженной частицы в потенциальной яме конечной глубины, в частности, для расчёта энергетического спектра частицы.

Развитие квантовой теории тора имеет долгую историю [35], начиная с 1920-х годов, когда Нордстрём, Калуца и Кляйн пытались ввести четвёртое пространственное измерение конечного размера в форме тора, так чтобы уравнения Эйнштейна и Максвелла были бы унифицированы. Многие разработки были выполнены с учётом космологических проблем в связи с физикой элементарных частиц, что привело к появлению методов, в которых размерные эффекты играют важную роль. В обзоре [35], рассмотрены основы квантовой теории поля на торе и представлены в унифицированном виде, чтобы рассмотреть приложения в физике элементарных частиц и физике конденсированного состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Присутствие в ефимовском трёхчастичном треугольнике “золотой” пропорции приводит к формированию, путем самоорганизации, дискообразных кластеров, число частиц в которых в модели твёрдых сфер определяется величиной “золотого” угла в экваториальной плоскости дискообразного кластера, причём в экваториальной плоскости формируется планарный кластер.

В хаотично движущихся системе взаимодействующих частиц всегда существует вероятность проявления эффекта Ефимова, результатом которого является образование в системе связанного состояния трёх частиц. Взаимодействие между частицами в структуре кластера в случае применения степенного потенциала может быть описано потенциалом Кратцера, тогда частоты основных колебательно-вращательных движений в кластере описывается уравнением Датхэма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хакен, Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. — М. : Мир, 1985. — 419 с.

2. Пригожин, И. Р. Введение в термодинамику необратимых процессов / И. Р. Пригожин. — Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 160 с.
3. Климонтович, Ю. Л. Введение в физику открытых систем / Ю. Л. Климонтович. — М. : Янус-К, 2002. — 284 с.
4. Манин, Ю. И. Математика как метафора / Ю. И. Манин. — М. : МЦНМО, 2010. — 424 с.
5. Илюшин, Г. Д. Моделирование процессов самоорганизации в кристаллообразующих системах / Г. Д. Илюшин. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 376 с.
6. Исаева, В. В. Самоорганизация биологических систем / В. В. Исаева // Известия РАН. Серия Биологическая. — 2012. — № 2. — С. 144–153.
7. Гончаров, А. В. Процессы роста кластеров в кластерной плазме / А. В. Гончаров // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2008. — Т. 6. — URL: <https://chemphys.edu.ru/media/published/2008-01-25-001.pdf>.
8. Новиков, Д. В. Самоорганизация кластеров фаз в однородно неупорядоченных полимерных композиционных материалах / Д. В. Новиков // Физика твердого тела. — 2018. — Т. 60, № 9. — С. 1829–1833.
9. Ефимов, В. И. Слабосвязанные состояния трёх резонансно взаимодействующих частиц / В. И. Ефимов // Ядерная Физика. — 1970. — Т. 12, № 5. — С. 1080–1090.
10. Efimov, V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system / V. Efimov // Physics Letters B. — 1970. — V. 33(8). — P. 563–564.
11. Naidon, P. Efimov physics: a review / P. Naidon, S. Endo // Reports on Progress in Physics. — 2017. — V. 80, № 5. — P. 056001.
12. Скорняков, Г. В. Задача трех тел при короткодействующих силах / Г. В. Скорняков, К. А. Тер-Мартиросян // ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31, № 5. — С. 775–790.
13. Фаддеев, Л. Д. Теория рассеяния для системы из трех частиц / Л. Д. Фаддеев // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 39, № 5. — С. 1459–1467.
14. Минлос, Р. А. Замечание о задаче трех частиц с точечным взаимодействием / Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 41, № 6(12). — С. 1850–1851.
15. Меркурьев, С. П. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц / С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. — М. : Наука, 1985. — 400 с.
16. Макаров, К. А. Точечные взаимодействия в задаче трех квантовых частиц с внутренней структурой / К. А. Макаров, В. В. Мележик, А. К. Мотовилов // ТМФ. — 1995. — Т. 102, № 2. — С. 258–282.
17. Коробицин, А. А. Кластеры инертных газов / А. А. Коробицин, Е. А. Колганова // Известия РАН. Серия физическая. — 2017. — Т. 81, № 10. — С. 1354–1361.
18. Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms / Т. Kraemer et al. // Nature. — 2006. — V. 440. — P. 315–318.
19. Лакаев, С. Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц / С. Н. Лакаев // Функц. анализ и его прил. — 1993. — Т. 27(3). — С. 15–28.
20. Лакаев, С. Н. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц / С. Н. Лакаев // ТМФ. — 1991. — Т. 89, № 1. — С. 94–104.
21. Melnikov, G. A. Quantum dots in the structure of quasicrystalline systems / G. A. Melnikov, N. M. Ignatenko, A. S. Gromkov // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1347. — P. 012031.
22. Wandering Quantum Dots (WQDs) in the Structure of Disordered Condensed Matter / G. A. Melnikov, V. V. Suchilkin, N. M. Ignatenko, P. A. Krasnykh // 2020 7th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE). — 2020. — P. 998–1003.
23. The Fibonacci Association. — URL: <http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/>. The Fibonacci Quarterly. — URL: <http://www.fq.math.ca/>.
24. Мельников, Г. А. Моделирование димерных образований в конденсированных средах /

- Г. А. Мельников, В. Н. Вервейко, А. Н. Ларионов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 42–51.
25. Bernal, J. D. The structure of simple liquids / J. D. Bernal // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1964. — V. 280. — P. 299–322.
26. Mark, P. A site-site Born–Green–Yvon equation for hard sphere dimmers / P. Mark, J. Taylor, E. G. Lipson // J. Chem. Phys. — 1994. — V. 100. — P. 518–527.
27. Позднеев, С. А. Многочастичная теория возникновения резонансного взаимодействия, приводящего к новому типу химической связи / С. А. Позднеев // Краткие сообщения по физике. ФИАН. — 2003. — № 5. — С. 3–19.
28. Determination of the Bond Length and Binding Energy of the Helium Dimer by Diffraction from a Transmission Grating / R. E. Grisenti et. al. // Phys. Rev. Lett. — 2000. — V. 85(11). — P. 2284–2287.
29. Mie, G. Zur Kinetischen Theorie der einatomigen Körper / G. Mie // Annalen der Physik. — 1903. — V. 316(8). — P. 657–697.
30. Kratzer, A. Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe / A. Kratzer // Zeitschrift für Physik. — 1920. — V. 3(5). — P. 289–307.
31. Dunham, J. L. The Energy Levels of a Rotating Vibrator / J. L. Dunham // Phys. Rev. — 1932. — V. 41(6). — P. 721–731.
32. Magic Numbers of Atoms in Surface-Supported Planar Clusters / Y.-P. Chiu et. al. // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 97(16). — P. 165504.
33. Random and ordered arrays of surface magic clusters / Y. L. Wang et. al. // International Reviews in Physical Chemistry. — 2008. — V. 27(2). — P. 317–360.
34. Electronic Shell Structure and Abundances of Sodium Clusters / W. D. Knight et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1984. — V. 52(24). — P. 2141–2143.
35. Quantum field theory on toroidal topology: algebraic structure and applications / F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, A. E. Santana // Physics Reports. — 2014. — V. 539(3). — P. 135–224.
36. Прогнозирование ИК-спектров кластерных систем / Г. А. Мельников и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 52–58.

REFERENCES

1. Haken H. Synergetics: hierarchies of instabilities in self-organizing systems and devices. [Khaken G. Синергетика: иерархии неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах]. Moscow, 1985, 419 p.
2. Prigozhin I.R. Introduction to the thermodynamics of irreversible processes. [Prigozhin I.R. Введение в термодинамику необратимых процессов]. Izhevsk, 2001, 160 p.
3. Klimontovich Yu.L. Introduction to the physics of open systems. [Klimontovich Yu.L. Введение в физику открытых систем]. Moscow, 2002, 284 p.
4. Manin Yu.I. Mathematics as a metaphor. [Manin Yu.I. Математика как метафора]. Moscow, 2010, 424 p.
5. Ilyushin G.D. Modeling of self-organization processes in crystal-forming systems. [Ilyushin G.D. Моделирование процессов самоорганизации в кристаллообразующих системах]. Moscow, 2003, 376 p.
6. Isayeva V.V. Self-organization of biological systems. [Isaeva V.V. Самоорганизация биологических систем]. *Izvestiya RAN. Seriya biologicheskaya — Biology Bulletin*, 2012, no. 2, pp. 144–153.
7. Goncharov A.V. Processes of cluster growth in cluster plasma. [Goncharov A.V. Процессы роста кластеров в кластерной плазме]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoi dinamike — Physical and Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2008, vol. 6. URL:

<https://chemphys.edu.ru/media/published/2008-01-25-001.pdf>.

8. Novikov D.V. Self-organization of phase clusters in uniformly disordered polymer composite materials. [Novikov D.V. Samoorganizatsiya klasterov faz v odnorodno neuporyadochennykh polimernykh kompozitsionnykh materialakh]. *Fizika tverdogo tela — Physics of the Solid State*, 2018, vol. 60, no. 9, pp. 1829-1833.

9. Efimov V.I. Loosely coupled states of three resonantly interacting particles. [Efimov V.I. Slabosvyazannye sostoyaniya trekh rezonansno vzaimodeistvuyushchikh chastits]. *Yadernaya Fizika — Physics of Atomic Nuclei*, 1970, vol. 12, no. 5, pp. 1080-1090.

10. Efimov V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Physics Letters B*, 1970, vol. 33(8), pp. 563-564.

11. Naidon P., Endo S. Efimov physics: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, no. 5, p. 056001. : 10.1088/1361-6633/aa50e8.

12. Skorniyakov G.V., Ter-Martirosyan K.A. The problem of three bodies with short-acting forces. [Skorniyakov G.V., Ter-Martirosyan K.A. Zadacha trekh tel pri korotkodeistvuyushchikh silakh]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1956, vol. 31, no. 5, pp. 775-790.

13. Faddeev L.D. Scattering theory for a system of three particles. [Faddeev L.D. Teoriya rasseyaniya dlya sistemy iz trekh chastits]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1960, vol. 39, no. 5, pp. 1459-1467.

14. Minlos R.A., Faddeev L.D. A remark on the problem of three particles with point interaction. [Minlos R.A., Faddeev L.D. Zamechanie o zadache trekh chastits s tochechnym vzaimodeistviem]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1961, vol. 41, no. 6(12), pp. 1850-1851.

15. Merkur'yev S.P., Faddeev L.D. Quantum scattering theory for systems of several particles. [Merkur'yev S.P., Faddeev L.D. Kvantovaya teoriya rasseyaniya dlya sistem neskol'kikh chastits]. Moscow, 1985, 400 p.

16. Makarov K.A., Melezhik V.V., Motovilov A.K. Point interactions in the problem of three quantum particles with an internal structure. [Makarov K.A., Melezhik V.V., Motovilov A.K. Tochechnye vzaimodeistviya v zadache trekh kvantovykh chastits s vnutrennei strukturoi]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 1995, vol. 102, no. 2, pp. 258-282.

17. Korobitsin A.A., Kolganova E.A. Clusters of inert gases. [Korobitsin A.A., Kolganova E.A. Klasteriy inertnykh gazov]. *Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya — Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2017, vol. 81, no. 10, pp. 1354-1361.

18. Kraemer T., Mark M., Waldburger P., Danzl J. G., Chin C., Engeser B., Lange A. D., Pilch K., Jaakkola A., Nägerl H.-C., Grimm R. Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms. *Nature*, 2006, vol. 440, pp. 315-318.

19. Lakaev S.N. On the Efimov effect in a system of three identical quantum particles. [Lakaev S.N. Ob effekte Efimova v sisteme trekh odinakovykh kvantovykh chastits]. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya — Functional Analysis and Its Applications*, 1993, vol. 27(3), pp. 15-28.

20. Lakaev S.N. On the infinite number of three-particle bound states of a system of three quantum lattice particles. [Lakaev S.N. O beskonechnom chisle trekhchastichnykh svyazannykh sostoyanii sistemy trekh kvantovykh reshetchatykh chastits]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 1991, vol. 89, no. 1, pp. 94-104.

21. Melnikov G.A., Ignatenko N.M., Gromkov A.S. Quantum dots in the structure of quasicrystalline systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1347, p. 012031.

22. Melnikov G.A., Suchilkin V.V., Ignatenko N.M., Krasnykh P.A. Wandering Quantum Dots (WQDs) in the Structure of Disordered Condensed Matter. 2020 7th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE), 2020, pp. 998-1003.

23. The Fibonacci Association. URL: <http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/>. The Fibonacci Quarterly. URL: <http://www.fq.math.ca/>.
24. Melnikov G.A., Verveiko V.N., Larionov A.N. Modeling of dimeric formations in condensed media. [Mel'nikov G.A., Verveiko V.N., Larionov A.N. Modelirovanie dimernykh obrazovaniy v kondensirovannykh sredakh]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 42–51.
25. Bernal J.D. The structure of simple liquids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1964, vol. 280, pp. 299–322.
26. Mark P., Taylor J., Lipson E.G. A site–site Born–Green–Yvon equation for hard sphere dimmers. *J. Chem. Phys.*, 1994, vol. 100, pp. 518–527.
27. Pozdneev S.A. Multiparticle theory of the occurrence of resonant interaction leading to a new type of chemical bond. [Pozdneev S.A. Mnogochastichnaya teoriya vozniknoveniya rezonansnogo vzaimodeystviya, privodyashchego k novomu tipu khimicheskoi svyazi]. *Kratkie soobshcheniya po fizike. FIAN — Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, 2003, no. 5, pp. 3–19.
28. Grisenti R.E., Schollkopf W., Toennies J.P., Hegerfeldt G.C., Kohler T., Stoll M. Determination of the Bond Length and Binding Energy of the Helium Dimer by Diffraction from a Transmission Grating. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85(11), pp. 2284–2287.
29. Mie G. Zur Kinetischen Theorie der einatomigen Körper. *Annalen der Physik*, 1903, vol. 316(8), pp. 657–697.
30. Kratzer A. Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe. *Zeitschrift für Physik*, 1920, vol. 3(5), pp. 289–307.
31. Dunham J.L. The Energy Levels of a Rotating Vibrator. *Phys. Rev.*, 1932, vol. 41(6), pp. 721–731.
32. Chiu Y.-P., Huang L.-W., Wei C.-M., Hang C.-S., Tsong T.-T. Magic Numbers of Atoms in Surface-Supported Planar Clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97(16), p. 165504.
33. Wang Y.L., Saranin A.A., Zotov A.V., Lai M.Y., Chang H.H. Random and ordered arrays of surface magic clusters. *International Reviews in Physical Chemistry*, 2008, vol. 27(2), pp. 317–360.
34. Knight W.D., Clemenger Keith, de Heer Walt A., Saunders Winston A., Chou M.Y., Cohen Marvin L. Electronic Shell Structure and Abundances of Sodium Clusters. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, vol. 52(24), pp. 2141–2143.
35. Khanna F.C., Malbouisson A.P.C., Malbouisson J.M.C., Santana A.E. Quantum field theory on toroidal topology: algebraic structure and applications. *Physics Reports*, 2014, vol. 539(3), pp. 135–224.
36. Melnikov G.A., Melikhov Yu.F., Larionov A.N., Verveiko V.N., Verveiko M.V. Forecasting of IR spectra of cluster systems. [Mel'nikov G.A., Melikhov Yu.F., Larionov A.N., Verveiko V.N., Verveiko M.V. Prognozirovaniya IK–spektrov klasternykh sistem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 52–58.

Мельников Геннадий Александрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, кафедра нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-западный государственный университет, Курск, Российская Федерация
E-mail: melnikovga@mail.ru

Melnikov Gennady Aleksandrovich, Senior Researcher of the Departments of nanotechnology, microelectronics, general and applied physics of Southwest State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: melnikovga@mail.ru

Игнатенко Николай Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-западный государственный университет, Курск, Российская Федерация
E-mail: inmkstu@bk.ru

Ignatenko Nikolay Mikhailovich, Professor of the Departments of nanotechnology, microelectronics, general and applied physics of Southwest State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: inmkstu@bk.ru

Громков Андрей Сергеевич, аспирант, кафедра нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики, Юго-западный государственный университет, Курск, Российская Федерация
E-mail: andrei_gromkov@mail.ru

Gromkov Andrey Sergeevich, Post-Graduate Student of the Departments of nanotechnology, microelectronics, general and applied physics of Southwest State University, Kursk, Russian Federation
E-mail: andrei_gromkov@mail.ru