УДК 517.926.4

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

С. А. Шабров, Д. А. Ткаченко, Н. А. Белов, А. Г. Ильченко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 21.12.2021 г.

Аннотация. В работе доказан аналог теоремы Штурма для дифференциальных уравнений четвертого порядка с негладкими решениями, которые имеют важное значение при анализе качественных свойств решений. При анализе решений уравнения, мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении уравнений не только второго порядка, но и более высокого порядка, в частности, построена точная параллель классической теории качественной теории вплоть до осцилляционных теорем.

Ключевые слова: однородное уравнение, дифференциальное уравнение, поточечный подход, теоремы о перемежаемости нулей.

ANALOGUE OF STURM'S THEOREM FOR FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MEASURE DERIVATIVES

S. A. Shabrov, D. A. Tkachenko, N. A. Belov, A. G. Ilchenko

Abstract. The paper proves analog of Sturm's theorem for fourth-order differential equations with nonsmooth solutions, which are important in the analysis of the qualitative properties of solutions. In the analysis of solutions to the equation, we use the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokorny and which has shown its effectiveness in studying equations not only of the second order, but also of a higher order, in particular, an exact parallel is constructed to the classical theory of qualitative theory up to oscillation theorems.

Keywords: homogeneous equation, differential equation, pointwise approach, zero intermittency theorems.

Интенсивное изучение граничных задач с производными Радона–Никодима началось после выхода работы Ю. В. Покорного [1]: была построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [2], [3], [4], [5], [6], [7], получен ряд результатов о нелинейных краевых задач с производными Радона–Никодима [8], [9], граничных задачах четвертого и более высокого порядков [10], [11], [12], [13], [14]. Эффективность использования производных по мере объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно.

Данная работа является продолжением работы [15] в которой доказаны теоремы о перемежаемости нулей решений дифференциальных уравнений второго порядка.

В работе рассматриваются следующие уравнения:

$$\left(p_1 u''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(r_1 u'_x\right)'_\sigma + q_1 u = 0, \tag{1}$$

$$\left(p_2 v''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(r_2 v'_x\right)'_{\sigma} + q_2 v = 0, \tag{2}$$

причем

$$p_1(x) \geqslant p_2(x) > 0,\, r_1(x) \geqslant r_2(x) \geqslant 0,\, q_1(x) \geqslant q_2(x) \geqslant 0. \tag{3}$$

Функции $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ строго возрастают на $[0;\ell]$, причем $\mu(x)$ является σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. Мы будем также предполагать, что x — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Каждое из уравнений определено на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$. В этом множестве каждая точка ξ разрыва функции $\sigma(x)$, порождающая меру σ, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi_-, \xi, \xi_+\}$. Строится $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ следующим образом.

На $[0;\ell]$ вводим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. В случае, когда множество $S(\sigma)$ точек разрыва не является пустым, метрическое пространство $([0;\ell],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0;\ell]}_\sigma$.

Решение (1) (и (2)) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$; производная $u'_x(x)$ которых — μ–абсолютно непрерывна; $u''_{x\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x$ — σ—абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Уравнение (1), как впрочем и (2), в точках ξ разрыва функции $\sigma(x)$ понимается как равенство

$$\Delta\left(p_1 u''_{x\mu}\right)'_x(\xi) - \Delta\left(r_1 u'_x\right)(\xi) + q_1(\xi)u(\xi) = 0, \tag{4}$$

где $\Delta\psi(x) = \psi(\xi+0) - \psi(x-0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Введем понятия нуля решения уравнения

$$Lu \equiv \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_{\sigma} + qu = 0, \tag{5}$$

и кратности нуля.

Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ однородного уравнения, кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0-0)\cdot u'_x(x_0+0) > 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0-0) \times$ $\times\, u'_x(x_0+0) \leqslant 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) \neq 0$; кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0-0) = u'_x(x_0+0) = 0$, $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0-0)\times\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0+0) > 0$. В случае, когда последнее неравенство нарушается (при этом остальные должны выполняться), то мы будем говорить, что кратность нуля выше трех.

Если x_0 не принадлежит множеству $S(\sigma)$, т. е. является точкой непрерывности самого решения и всех ее производных до третьего порядка включительно, то введенное определение совпадает с классическим. Если x_0 принадлежит разности множеств $S(\sigma)$ и $S(\mu)$ ($x_0 \in S(\sigma)\backslash S(\mu)$), то определение нуля кратности 1 и 2 снова совпадает с классическим.

Заметим, что нули кратности больше, чем 3 могут быть только у тривиального решения. В самом деле, если x_0 — нуль кратности больше, чем 3 некоторого нетривиального решения $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$, то $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0-0) = u'_x(x_0+0) = 0$, $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = 0$ и $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0+0)\cdot\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0-0) \leqslant 0$. Если одна из третьих производных $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0-0)$ или $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0+0)$ обращается в нуль, то $u(x)$ тождественный нуль в силу теоремы единственности (см., например, [16]). Поэтому, можно считать $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0-0)\cdot\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0+0) < 0$. Последнее означает, что $x_0 \in S(\sigma)$, следовательно, справедливо равенство

$$\Delta\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0) - \Delta\left(ru'_x\right)(x_0) + q(x_0)u(x_0) = 0.$$

Но $\Delta(ru'_x)(x_0) = (ru'_x)(x_0+0) - (ru'_x)(x_0-0) = 0$ и $u(x_0) = 0$, и тогда $\Delta\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0) = 0$, или $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0+0) = \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0-0)$. Последнее равенство противоречит предположению о противоположности знаков левой и правой производных.

Следующая лемма устанавливают конечность нулей любого нетривиального решения.

Лемма 1. *У любого нетривиального решения однородного уравнения $Lu = 0$ конечное число нулей на $[0;\ell]$.*

Доказательство. Пусть у нетривиального решения $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$ бесконечное число различных нулей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0;\ell]$. Переходя если необходимо к подпоследовательности, можно считать $\{x_n\}$ сходящейся, причем монотонно. Рассмотрим случай $x_n \to x_0 + 0$. (Случай $x_n \to x_0 - 0$ рассматривается аналогично.)

В силу непрерывности $u(x)$ имеем $u(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n)$. Из обобщенной теоремы Ролля следует существование последовательности $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ такой, что

1) $x_n^{(1)}$ заключена между x_n и x_{n+1};

2) $u'_x(x_n^{(1)} - 0) \cdot u'_x(x_n^{(1)} + 0) \leqslant 0$.

Из первого заключаем, что $x_n^{(1)} \to x_0 + 0$, из второго — $u'_x(x_0 + 0) \times u'_x(x_0 + 0) \leqslant 0$, следовательно, $u'_x(x_0 + 0) = 0$.

На каждом множестве $I_n = \{x \in \overline{[0;\ell]}_S \mid x_{n+1}^{(1)} \leqslant x \leqslant x_n^{(1)}\}$ производная $u'_x(x)$ μ-непрерывна, следовательно, достигает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках, причем по крайней мере одна из них является внутренней точкой I_n. Обозначим эту точку через $x_n^{(2)}$, если обе из них являются внутренними, то любую из них. Как нетрудно видеть, $u''_{x\mu}(x)$ в точке $x_n^{(2)}$ меняет знак, и, в силу непрерывности $\left(pu''_{x\mu}\right)(x)$, заключаем, что $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_n^{(2)}) = 0$. Тогда, последовательность $x_n^{(2)}$ сходится к x_0+0, и $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0+0) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(pu''_{x\mu}\right)(x_n^{(2)}) = 0$. Аналогично устанавливается существование последовательности $x_n^{(3)}$ такой, что $x_n^{(3)}$ лежит между $x_n^{(2)}$ и $x_{n+1}^{(2)}$, и $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x)$ меняет знак в точке $x_n^{(3)}$, т. е. $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_n^{(3)}-0)\cdot\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_n^{(3)}+0) \leqslant 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве, получим, в силу существования предела справа у производной $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x)$, равенство $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0 + 0) = 0$. Тогда, $u(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $Lu = 0$ и нулевым начальным условиям $u(x_0 + 0) = u'_x(x_0 + 0) = \left(pu''_{x\mu}\right)(x_0 + 0) = \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x_0 + 0) = 0$, следовательно, $u(x) \equiv 0$, что противоречит предположению о нетривиальности $u(x)$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $u(x) \in E$ и отлична от константы на любом подотрезке $[\alpha;\beta]$; $u(x)$ имеет два нуля кратности 2 (или более). Тогда существует точка в которой $u''_{x\mu}(x)$ равна нулю.*

Доказательство. Если у $u(x)$ хотя бы один нуль кратности 3, то утверждение леммы следует из определения нуля кратности 3.

Пусть τ_1 и τ_2 — нули $u(x)$ кратности 2. Предположим, что утверждение леммы неверно: $u''_{x\mu}(x) \neq 0$ для всех $x \in [0;\ell]$. Так как $\left(pu''_{x\mu}\right)(x)$ непрерывна на $[0;\ell]$ (более того, она абсолютно непрерывна), то $\left(pu''_{x\mu}\right)(x)$ сохраняет знак на всем $[0;\ell]$. Так как $p(x) > 0$, то этим же свойством обладает и $u''_{x\mu}(x)$. Пусть для определенности $u''_{x\mu}(x) > 0$. Тогда $u'_x(x)$ возрастает на $\overline{[0;\ell]}_S$, отсюда вытекают неравенства

$$u'_x(\tau_1 - 0) \leqslant u'_x(\tau_1 + 0) < u'_x(\tau_2 - 0) \leqslant u'_x(\tau_2 + 0). \tag{6}$$

По условию τ_1 и τ_2 — нули кратности 2, т. е. $u'_x(\tau_1 - 0) \cdot u'_x(\tau_1 + 0) \leqslant 0$ и $u'_x(\tau_2-0)\cdot u'_x(\tau_2+0) \leqslant 0$. Предположим, что $u'_x(\tau_1 - 0) < 0$. Тогда $u'_x(\tau_1 + 0) \geqslant 0$, и как следствие (6), $u'_x(\tau_2 - 0) > 0$ и $u'_x(\tau_2 + 0) > 0$. Отсюда вытекает, что τ_2 — нуль кратности 1, что противоречит условию.

Если же $u'_x(\tau_2 + 0) \geqslant 0$, то из (6) опять находим, что $u'_x(\tau_2 - 0) > 0$ и $u'_x(\tau_2 + 0) > 0$, т. е. τ_2 — нуль кратности 1. Лемма доказана. □

Основным результатом работы является теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u(x_1) = u'_x(x_1{+}0) = u(x_2) = u'_x(x_2{-}0) = 0$, $x_1 < x_2$. Пусть также выполнено условие согласования: $\left(p_2 v''_{x\mu}\right)'_x(x) \cdot v'_x(x) < 0$ для всякой $x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma \backslash S(\sigma)$. Тогда для любого решения $v(x)$ уравнения (2) существует точка $x_0 \in (x_1,x_2)$, такая, что $v(x_0) = 0$ или $v'_x(x_0 - 0) \cdot v'_x(x_0 + 0) \leqslant 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует решение уравнения (2) $v(x)$ такое, что $v(x) \neq 0$ для любого $x \in [x_1,x_2]$ и $v'_x(x-0) \cdot v'_x(x+0) > 0$ для любых $x \in (x_1,x_2)$.

Рассмотрим следующее выражение:

$$I_1 = \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{u}{v}\left(\left(p_1 u''_{x\mu}\right)'_x v - r_1 u'_x v - \left(p_2 v''_{x\mu}\right)'_x u + r_2 v'_x u\right)\right]. \tag{7}$$

Если $x \notin S(\sigma)$, то, после несложных преобразований, имеем

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{d}{d\sigma}&\left[(p_1 u''_{x\mu})'_x u - r_1 u'_x u - (p_2 v''_{x\mu})'_x \frac{u^2}{v} + r_2 v'_x \frac{u^2}{v}\right] = \\ &= (p_1 u''_{x\mu})''_{x\sigma} u + (p_1 u''_{x\mu})'_x u'_x x'_\sigma - (r_1 u'_x)'_\sigma u - r_1 {u'_x}^2 x'_\sigma - (p_2 v''_{x\mu})''_{x\sigma} \frac{u^2}{v} - \\ &- (p_2 v''_{x\mu})'_x \frac{2u u'_x x'_\sigma v - u^2 v'_x x'_\sigma}{v^2} + (r_2 v'_x)'_\sigma \frac{u^2}{v} + r_2 v'_x \frac{2u u'_x x'_\sigma v - u^2 v'_x x'_\sigma}{v^2} = \\ &= -\left(q_1 - q_2\right) u^2 - \left(r_1 - r_2\right) u'_x x'_\sigma - r_2 x'_\sigma \left(\frac{u v'_x}{v} - u'_x\right)^2 + \left(p_1 u''_{x\mu}\right)'_x u'_x x'_\sigma - \\ &- \left(p_2 v''_{x\mu}\right)'_x \frac{2u u'_x - u^2 v'_x}{v^2} x'_\sigma. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\xi \in S(\sigma)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta I_1(\xi) = &(p_1 u''_{x\mu})'_x(\xi+0) u(\xi+0) - r_1 u'(\xi+0) u(\xi+0) - \\ &- (p_2 v''_{x\mu})'_x(\xi+0) \frac{u^2(\xi+0)}{v(\xi+0)} + (r_2 v'_x)(\xi+0) \frac{u^2(\xi+0)}{v(\xi+0)} - \\ &- (p_1 u''_{x\mu})'_x(\xi-0) u(\xi-0) + r_1 u'(\xi-0) u(\xi-0) + (p_2 v''_{x\mu})'_x(\xi-0) \frac{u^2(\xi-0)}{v(\xi-0)} - \\ &- (r_2 v'_x)(\xi-0) \frac{u^2(\xi-0)}{v(\xi-0)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как u и v непрерывны, то последнее выражение может быть переписано следующим образом:

$$\Delta I_1(\xi) = u(\xi)\Delta(p_1 u''_{x\mu})'_x(\xi) - u(\xi)(\Delta r_1 u'_x)(\xi) - \frac{u^2(\xi)}{v(\xi)}\Delta(p_2 v''_{x\mu})'_x(\xi) + \frac{u^2(\xi)}{v(\xi)}\Delta(r_2 v'_x)(\xi), \tag{10}$$

или, так как u является решением уравнения (1), а v — решением уравнения (2), то

$$\Delta I_1(\xi) = -q_1(\xi)u^2(\xi) + q_2(\xi)u^2(\xi) = u^2(\xi)(q_2(\xi) - q_1(\xi)). \tag{11}$$

Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{d}{d\sigma}\left(p_1 u''_{x\mu} u'_x - \frac{{u'_x}^2}{v'_x} p_2 v''_{x\mu}\right) = (p_1 u''_{x\mu})'_x x'_\sigma u'_x + p_1 {u''_{x\mu}}^2 \mu'_\sigma - \\ - (p_2 v''_{x\mu})'_x x'_\sigma \frac{{u'_x}^2}{v'_x} - p_2 v''_{x\mu} \frac{2u'_x u''_{x\mu} \mu'_\sigma v'_x - {u'_x}^2 v''_{x\mu} \mu'_\sigma}{{v'_x}^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Если $\xi \in S(\sigma)$, то

$$\Delta I_2(\xi) = (p_1 u''_{x\mu})(\xi+0)u'_x(\xi+0) - \frac{{u'_x}^2(\xi+0)}{v'_x(\xi+0)}(p_2 v''_{x\mu})(\xi+0) - \\ - (p_1 u''_{x\mu})(\xi-0)u'_x(\xi-0) + \frac{{u'_x}^2(\xi-0)}{v'_x(\xi-0)}(p_2 v''_{x\mu})(\xi-0), \quad (13)$$

а так как $\left(p_1 u''_{x\mu}\right)(x)$ и $\left(p_2 v''_{x\mu}\right)(x)$ непрерывны, имеем:

$$\Delta I_2(\xi) = p_1 u''_{x\mu}(\xi)\Delta u'_x(\xi) - p_2 v''_{x\mu}(\xi)\left(\frac{{u'_x}^2(\xi+0)}{v'_x(\xi+0)} - \frac{{u'_x}^2(\xi-0)}{v'_x(\xi-0)}\right) = \\ = p_1 {u''_{x\mu}}^2(\xi) - p_2 {u''_{x\mu}}^2(\xi) + p_2 {u''_{x\mu}}^2(\xi) - p_2 v''_{x\mu}(\xi)\left(\frac{{u'_x}^2(\xi+0)}{v'_x(\xi+0)} - \frac{{u'_x}^2(\xi-0)}{v'_x(\xi-0)}\right) = \\ = (p_1 - p_2)u''^2_{x\mu}(\xi) + p_2\left[u''^2_{x\mu}(\xi) - v''_{x\mu}(\xi)\left(\frac{{u'_x}^2(\xi+0)}{v'_x(\xi+0)} - \frac{{u'_x}^2(\xi-0)}{v'_x(\xi-0)}\right)\right], \quad (14)$$

или, после несложных преобразований,

$$\Delta I_2(\xi) = \\ = (p_1 - p_2)u''^2_{x\mu}(\xi) + p_2\left[\frac{1}{v'_x(\xi+0)v'(\xi-0)}(u'_x(\xi+0)v'_x(\xi-0) - u'_x(\xi-0)v'_x(\xi+0))^2\right], \quad (15)$$

Рассмотрим теперь разность $I_2 - I_1$. Имеем

$$I_2 - I_1 = (q_1 - q_2)u^2 + (r_1 - r_2)u'^2_\sigma + (p_1 - p_2){u''_{x\mu}}^2\mu'_\sigma + p_2 x'_\sigma\left(\frac{uv'_x}{v} - u'_x\right)^2 - \\ - (p_2 v''_{x\mu})'_x v'_x \frac{1}{v^2 v'^2_x}\left(\frac{u'_x}{v'_x} - \frac{u}{v}\right)^2 + r_2\left(\frac{uv'_x}{v} - u'_x\right)^2. \quad (16)$$

Левая часть последнего равенства неотрицательна на (x_1, x_2). Интегрируя (16) по мере σ по интервалу (x_1, x_2), будем иметь

$$\left(p_1 u''_{x\mu}u'_x - \frac{{u'_x}^2}{v'_x}p_2 v''_{x\mu}\right)\Bigg|_{x_1+0}^{x_2-0} - \frac{u}{v}\left(\left(p_1 u''_{x\mu}\right)'_x v - r_1 u'_x v - \left(p_2 v''_{x\mu}\right)'_x u + r_2 v'_x u\right)\Bigg|_{x_1+0}^{x_2-0} = \\ = \int\limits_{x_1+0}^{x_2-0}\Bigg[(q_1 - q_2)u^2 + (r_1 - r_2)u'^2_\sigma + (p_1 - p_2){u''_{x\mu}}^2\mu'_\sigma + p_2 x'_\sigma\left(\frac{uv'_x}{v} - u'_x\right)^2 - \\ - (p_2 v''_{x\mu})'_x v'_x \frac{1}{v^2 v'^2_x}\left(\frac{u'_x}{v'_x} - \frac{u}{v}\right)^2 + r_2\left(\frac{uv'_x}{v} - u'_x\right)^2\Bigg]d\sigma. \quad (17)$$

Но левая часть (17), по условию, равна нулю, а правая — сумма неотрицательных. Тогда, равенство (17) возможно только, если $\dfrac{uv'_x}{v} - u'_x \equiv 0$, или $v \equiv Cu$ при некотором C. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

9. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

10. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

11. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, М. Меач // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

12. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

13. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023

14. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

15. Аналоги теорем Штурма для дифференциальных уравнений второго порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Д. А. Крохина, Н. А. Белов, А. Г. Ильченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 4. — С. 96–102.

16. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.

Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

3. Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev B.L. et al. Differential equations for geometric graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Phizmatlit, 2004, 272 p.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

9. Davydova M.B., Shabrov S.A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

10. Shabrov S.A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

11. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

12. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State*

University. Series: Physics. Mathematics, 2019, no. 2, pp. 65–69.

13. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

14. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012044.

15. Shabrov S.A., Krokhina D.A., Belov N.A., Ilchenko A.G. Analogues of Sturm's theorems for second-order differential equations with derivatives in measure. [Shabrov S.A., Krohina D.A., Belov N.A., Il'chenko A.G. Analogi teorem SHturma dlya differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 96–102.

16. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Ткаченко Дарья Алексеевна, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: dkroxina@mail.ru

Tkachenko Daria Alekseevna, student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dkroxina@mail.ru

Белов Никита Андреевич, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: alzacc@yandex.ru

Belov Nikita Andreevich, student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: alzacc@yandex.ru

Ильченко Антон Геннадиевич, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: mathantonvsu@gmail.com

Ilchenko Anton Gennadievich, student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mathantonvsu@gmail.com