

# МОДЕЛЬНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ГИБКИМ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

З. Хатиф Аббас

*Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 26.06.2020 г.

**Аннотация.** Изучено управление гибким обратным маятником на основе метода сингулярных возмущений. Исследована система кинематики и динамики гибкого перевернутого маятника. Разработана модель системы гибкого перевернутого маятника на основе дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений с определенными геометрическими ограничениями. С целью уменьшения сложности модели произведено “разбиение” связанной динамики системы на составные части — медленную и быструю подсистемы — с помощью метода сингулярных возмущений. Для каждой из подсистем разработан соответствующий алгоритм управления. Репрессор, использующий принцип управления со скользящим режимом, разработан как часть более сложного механизма управления медленной подсистемы. Для быстрой подсистемы предложен простой алгоритм управления с обратной связью. За счет проведенных операций, в отличие от традиционных, разработанная модель является значительно более простой: граничные условия содержат только граничную информацию, что упрощает проектирование систем управления. На основе такой “составной” модели предложена методика граничного управления, которая позволяет одновременно отслеживать траекторию конечного эффектора и подавлять вибрацию. Получены результаты моделирования, которые доказывают эффективность методики граничного управления. Также моделирование продемонстрировало, что разработанная стратегия управления показывает высокие результаты в системе с помехами.

**Ключевые слова:** гибкий обратный маятник, управление, сингулярные возмущения, метод, механические системы, математическая модель.

## THE MODEL SUPPORT OF THE FLEXIBLE INVERTED PENDULUM MANAGEMENT BASED AT THE SINGULAR INDIGNATIONS METHOD

Z. Hatif Abbas

**Abstract.** The management of a flexible inverse pendulum based on the method of singular indignations is studied. The system of kinematics and dynamics of a flexible inverted pendulum is investigated. A model of a flexible inverted pendulum system based on partial differential equations and ordinary differential equations with certain geometric constraints is developed. In order to reduce the complexity of the model, the “coupled” system dynamics was divided into its constituent parts – the slow and fast subsystems – using the method of singular perturbations. An appropriate control algorithm has been developed for each of the subsystems. A repressor using the sliding control principle is designed as part of a more sophisticated control mechanism for the slow subsystem. For a fast subsystem, a simple feedback control algorithm is proposed. Due to the operations performed, unlike traditional ones, the developed model is much simpler: the boundary conditions contain only boundary information, which simplifies the design of control systems. Based on such a “composite” model, a boundary control technique is proposed that allows you to simultaneously track the trajectory of the end effector and suppress

vibration. Simulation results are obtained that prove the effectiveness of the boundary control technique. Simulation also demonstrated that the developed control strategy shows high results in a system with interference.

**Keywords:** flexible inverted pendulum, control, singular indignations, method, mechanical systems, mathematical model.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время с развитием технологий проектирования механических систем (например — в аэрокосмической промышленности) все чаще стали использоваться облегченные материалы, которые позволяют добиваться значительного увеличения скорости и экономии энергии. Однако использование таких материалов зачастую приводит к возникновению неконтролируемых вибраций, которые, в свою очередь, могут оказать весьма негативное влияние на желаемые динамические режимы соответствующих механических систем. Для повышения надежности и управляемости систем необходимы соответствующие инструменты, позволяющие нейтрализовать вибрации или, как минимум, ограничить их в интервале допустимых значений.

За последние годы вопросу управления гибкого маятника было посвящено несколько фундаментальных работ [1–6]. К примеру, были представлены модельные уравнения и разработана система управления гибким маятником (“flexible inverted pendulum system”, FIPS) на основе классического метода частотного анализа [2]. Для разработки модели системы гибкого маятника использовался метод Лагранжа и разработан регулятор на основе линейного метода анализа в пространстве состояний [3]. Также была предложена модель, являющаяся аппроксимацией гибкого маятника [4].

Метод сингулярных возмущений традиционно использовался для моделирования процессов, протекающих в различных масштабах времени. В его рамках возникновение быстрых и медленных движений объяснялось следствием воздействия внешних факторов. Этот метод позволяет упростить модель (если пренебречь быстрыми движениями), при этом рассмотрение быстрых движений в пограничном слое, рассчитанных в отдельных временных масштабах, может улучшить аппроксимацию модели [5].

В большинстве разработанных методов управления использование метода сингулярных возмущений приводило к редукции модели, т. е. к игнорированию высоких частот системы [6]. В результате были разработаны методы множественных временных шкал для различных алгоритмов управления, например — алгоритмов обратной связи, обратной связи по состоянию и др.

Метод сингулярных возмущений оказался полезным для анализа систем с обратной связью с высоким коэффициентом усиления, управления динамическими сетями, а также для линейных и нелинейных динамических систем. Сингулярные возмущения и временные шкалы в теории управления и ее прикладных аспектах также были предметом серьезных исследований [6, 7].

Многие исследователи разработали стратегии управления для гибких манипуляторов на основе динамической модели уравнений в частных производных, которая была получена без какого-либо усечения, что позволяет ей точно представлять состояния, изменяющиеся в пространстве-времени.

В известных исследованиях [7, 8] для регулирования связи вдоль желаемой траектории был разработан связанный алгоритм управления в скользящем режиме. Была рассмотрена граничная управляющая сила (“boundary control force”) на свободном конце маятникового стержня и исследована равномерность и устойчивость системы управления. Однако, до настоящего времени модели управления FIPS являлись неоптимальными — за счет их высокой

сложности проектирование систем управления также оставалось сложным. На настоящий момент времени обращают на себя внимание предложения простых совмещенных систем управления, основанных на динамических моделях, которые состоят из дифференциальных уравнений в частных производных (PDE) и обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE) с определенными геометрическими ограничениями. Тем не менее, при современном уровне техники этот подход не проработан до конца. Решение данного аспекта проблемы управления гибким обратным маятником детерминирует актуальность настоящего исследования.

Целью настоящего исследования является реализация управления гибким обратным маятником с помощью метода сингулярных возмущений.

Научная новизна заключается в том, что в отношении системы обратного гибкого маятника: 1) разработана новая модель на основе комплекса дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений с определенными геометрическими ограничениями; 2) достигнуто уменьшение сложности модели с помощью метода сингулярных возмущений, в составе системы обратного гибкого маятника выделены медленная и быстрая подсистемы; 3) разработан репрессор, использующий принцип управления со скользящим режимом, как часть более сложного механизма управления медленной подсистемы; 4) предложен простой алгоритм управления с обратной связью для быстрой подсистемы; 5) за счет упрощения модели достигнуто упрощение проектирования систем управления.

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Модель системы гибкого перевернутого маятника. В настоящем исследовании рассматривается гибкий обратный маятник с грузом в верхней точке, в предположении того, что его плотность относительно мала. В рассматриваемой системе, в отличие от классической модели, учитываются вибрационные составляющие. Рассматривается FIPS, который движется только в вертикальной плоскости. Конфигурация этого устройства показана на рис. 1.

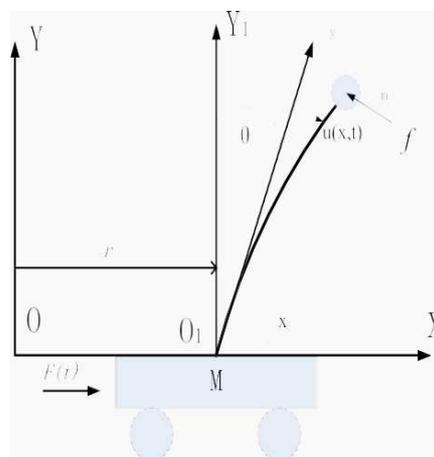


Рис. 1. Модель системы гибкого перевернутого маятника.

На нем приведено изображение гибкого перевернутого маятника, который состоит из гибкого стержня и движется только в направлении  $X$ . На конце стержня есть нагрузка, а на конце маятника — регулятор, где:  $f$  — граничный вход,  $M$  — эквивалентная масса системы в неподвижном состоянии,  $\rho$  — плотность упругого стержня перевернутого маятника,  $m$  — груз на конце перевернутого маятника,  $L$  — длина упругого перевернутого маятника,  $F$  — управляющий входной сигнал,  $E$  — модуль Юнга,  $I$  — момент сечения,  $\theta$  — угловое положение звена,  $u(x, t)$  — внешнее отклонение точки  $x$  на рычаге,  $J$  — инерция соединения,  $u(x, t)$  и  $u_x(x, t)$

представляют соответственно  $(\partial/\partial t)u(x, t)$  и  $(\partial/\partial x)u(x, t)$ .

Кинематическая модель гибкого стержня определяется следующим образом:

$$\text{Ось } X: P_{0x} = r + x \sin \theta + u(x, t) \cos \theta;$$

$$\text{Ось } Y: P_{0y} = x \cos \theta - u(x, t) \sin \theta.$$

Кинетическая энергия FIPS:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\rho \int_0^L \dot{P}_0^T \dot{P} dx + \frac{1}{2}m\dot{P}_{OL}^T \dot{P}_{OL}. \quad (1)$$

Формула потенциальной энергии гибкого перевернутого маятника:

$$V = p\rho \int_0^L (x \cos \theta - u(x, t) \sin \theta) dx + \frac{1}{2}EI \int_0^L (u_{xx}(x, t))^2 dx + mg(L \cos \theta - u(L, t) \sin \theta). \quad (2)$$

Неконсервативная работа колебательной системы:

$$\delta W_{nc} = F\delta r + f\delta u(L, t). \quad (3)$$

Для построения динамической модели системы гибкого перевернутого маятника мы применяем расширенный принцип Гамильтона:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) = 0, \quad (4)$$

где  $t_1, t_2$  — две постоянные времени;  $t$  принадлежит  $[t_1, t_2]$  — время работы; и  $\delta T, \delta V, \delta W_{nc}$  — изменение кинетической энергии, потенциальной энергии и неконсервативной работы соответственно. Затем, после уточняющих расчетов, динамическая модель FIPS в виде дифференциальных уравнений в частных производных (PDE) определяется как:

$$-\rho (\ddot{u}(x, t) + x\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta) - EIu_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (5)$$

$$m (\ddot{u}(L, t) + L\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta) - EIu_{xxxx}(L, t) - f = 0, \quad (6)$$

$$u_{xx}(L, t) = 0, \quad (7)$$

$$\left( J + mL^2 + \rho L \frac{L^2}{3} \right) \ddot{\theta} + \left( mL + \rho L \frac{L}{2} \right) \ddot{r} - \left( mL + \rho L \frac{L}{2} \right) g\theta + \\ + m \{ L\ddot{u}(L, t) - gu(L, t) \} + \rho \int_0^L (x\ddot{u}(x, t) - gu(x, t)) dx = 0, \quad (8)$$

$$(M + m + \rho L)\ddot{r} + \left( mL + \rho L \frac{L}{2} \right) \ddot{\theta} - m\ddot{u}(L, t) + \rho \int_0^L \ddot{u}(x, t) dx - F = 0, \quad (9)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (10)$$

$$u_x(0, t) = 0. \quad (11)$$

Необходимо уточнить, что в динамической модели (5)–(11) динамика жесткого маятника в основном представлена уравнениями (8) и (9), а гибкого маятника — определяющим PDE (5)

с граничными условиями, заданными обычными дифференциальными уравнениями (ODE) (6)–(7) и (10)–(11), где (10)–(11) — граничные условия на закрепленных концах звеньев.

*Декомпозиция связанной динамики гибкого перевернутого маятника помощью метода сингулярных возмущений. Полная система.* Управление системой FIP представляет собой достаточно сложную задачу, поскольку её общая динамика включает как гибкую / упругую, так и жесткую составляющие. Традиционные методы моделирования увеличивают порядок модели. Чтобы уменьшить ее сложность, целесообразно “разбить” динамику системы на медленную и быструю подсистемы с помощью метода сингулярных возмущений.

В рамках указанного подхода оказалось сложно выбрать параметр возмущения. В настоящем исследовании, выбран параметр  $\varepsilon^2$ , поскольку он позволяет изменить порядок модели динамики системы. Параметр  $\varepsilon^2$  зависит от параметров системы. Таким образом, параметр  $\frac{EI}{\rho}$  в уравнении может быть переопределен следующим образом:

$$\frac{EI}{\rho} = aK. \quad (12)$$

Поперечная вибрация  $u$  относительно системной переменной происходит в медленном масштабе времени в короткие сроки. Следовательно, необходимо ввести новую переменную  $w(x,t)$  в том же порядке системы, который можно менять с помощью следующего уравнения:

$$u(x,t) = \varepsilon^2 w(x,t), \quad (13)$$

где  $\varepsilon^2 = \frac{1}{k}$  является параметром возмущения.

Используя (13), создается возможность переписать модель жестких колебательных движений FIPS следующим образом:

$$-\left(\varepsilon^2 \ddot{w}(x,t) + x\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta\right) - aw_{xxxx}(x,t) = 0, \quad (14)$$

$$m\left(\varepsilon^2 \ddot{w}(L,t) + L\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta\right) - EI\varepsilon^2 w_{xxxx}(L,t) - f = 0, \quad (15)$$

$$\varepsilon^2 w_{xx}(L,t) = 0, \quad (16)$$

$$\varepsilon^2 w(0,t) = 0, \quad (17)$$

$$\varepsilon^2 w_x(0,t) = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\left(J + mL^2 + \rho L \frac{L^2}{3}\right) \ddot{\theta} + \left(mL + \rho L \frac{L}{2}\right) \ddot{r} - \left(mL + \rho L \frac{L}{2}\right) g\theta + \\ &+ m\left\{L\varepsilon^2 \ddot{w}(L,t) - g\varepsilon^2 w(L,t)\right\} + \rho \int_0^L (x\varepsilon^2 \ddot{w}(x,t) - g\varepsilon^2 w(x,t)) dx = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

$$(M + m + \rho L)\ddot{r} + \left(mL + \rho L \frac{L}{2}\right) \ddot{\theta} + m\left(\varepsilon^2 \ddot{w}(L,t)\right) + \rho \int_0^L (\varepsilon^2 \ddot{w}(x,t)) dx - F = 0. \quad (20)$$

Соответственно, используя (12) и (13), (6) можно переписать как:

$$-\left(\varepsilon^2 \ddot{w}(x,t)x\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta\right) - aw_{xxxx}(x,t) = 0. \quad (21)$$

Уравнения (14)–(20) представляют форму сингулярного возмущения, которая будет включена в систему уравнений динамики (5)–(11).

Благодаря применению параметра  $\varepsilon^2$  полная система состоит из двух моделей движения в разных временных масштабах. Таким образом, медленная и быстрая подсистемы, представленные в этом разделе, были получены с помощью стандартных шагов метода сингулярных возмущений.

*Медленная подсистема.* Первоначально модель динамики жестких колебаний стержня, построенная по методу сингулярных возмущений, будет преобразована в модель жестких колебаний, не включающую каких-либо гибких параметров (“flexible parameters”), а затем будет включена в уравнения (19) и (20), которые образуют медленную подсистему. Аналогично, после применения обычных процедур метода сингулярных возмущений, из уравнения (14) будет получена быстрая подсистема.

Установив в уравнениях (19) и (20) значение  $\varepsilon = 0$ , мы получаем модель жесткой динамики стержня, представленную в компактной форме:

$$\left( J + mL^2 + \rho L \frac{L^2}{3} \right) \ddot{\theta} + \left( mL + \rho L \frac{L}{2} \right) \dot{r} - \left( mL + \rho L \frac{L}{2} \right) g\theta = 0, \quad (22)$$

$$(M + m + \rho L)\ddot{r} + \left( mL + \rho L \frac{L}{2} \right) \ddot{\theta} - F_s = 0. \quad (23)$$

Уравнение движения для поперечной вибрации стержня (14) принимает вид:

$$- \left( x\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta \right) - aw_{sxxxx}(x, t) = 0. \quad (24)$$

При этом граничное уравнение (“boundary equation”) принимает вид:

$$m \left( L\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta \right) - \rho aw_{sxxx}(L, t) - f_s = 0. \quad (25)$$

Медленная подсистема, заданная в уравнениях (22) и (23), представляет собой модель жесткого движения без привлечения каких-либо мягких параметров.

*Быстрая подсистема.* Уравнение (14) представляет собой модель возмущенного упругого движения, полученную с параметром возмущения  $\varepsilon$ , который очень мал и зависит исключительно от  $E, I$  и  $\rho$ .

Для анализа динамического поведения быстрой подсистемы ускоренный временной масштаб определяется как  $V = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$ . Его можно определить, убедившись, что медленные переменные в ускоренных временных масштабах остаются постоянными. Применяя стандартные процедуры метода сингулярных возмущений, можно определить быструю переменную  $w_f$  следующим образом:

$$w_f = w - w_s, \quad (26)$$

где индекс  $f$  используется для описания переменных в ускоренном временном масштабе / быстром времени / ускоренной шкалы времени.

Дифференцирование ускоренной шкалы времени / быстрого времени дает:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (27)$$

Учитывая (26) и (27), получаем:

$$\dot{w} = \dot{w}_s + \frac{d}{dt}w_f = \dot{w}_s + \frac{dv}{dt} \frac{d}{dv}w_f = \dot{w}_s + \frac{1}{\varepsilon} \hat{w}_f, \quad (28)$$

где  $w_f$  обозначает производную по времени в ускоренном временном масштабе.

Снова дифференцируя (28), становится возможным получить:

$$\ddot{w} = \ddot{w}_s + \frac{d}{dt} \hat{w}_f = \ddot{w}_s + \frac{dv}{dt} \frac{d}{dt} \hat{w}_f = \ddot{w}_s + \frac{1}{\varepsilon^2} \hat{w}_f. \quad (29)$$

С учетом (29), уравнение (14) может принять вид:

$$\varepsilon^2 \left( \ddot{w}_s + \frac{1}{\varepsilon^2} \hat{w}_f \right) + x\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta - a(w_{sxxxx}(x, t) + w_{fxxxx}(x, t)) = 0. \quad (30)$$

С учетом (24), (30) может принять вид:

$$- \left( \varepsilon^2 \left( \ddot{w}_s + \frac{1}{\varepsilon^2} \hat{w}_f \right) \right) - a(w_{fxxxx}(x, t)) = 0. \quad (31)$$

Тем не менее, медленная переменная  $w_s$  постоянна в ускоренном временном масштабе, что подразумевает  $\ddot{w}_s = 0$  и  $\varepsilon = 0$ . Следовательно, динамика в ускоренном временном масштабе может быть представлена как:

$$-\hat{w}_f - aw_{fxxxx}(x, t) = 0. \quad (32)$$

С учетом (29), (15) может принять вид:

$$m \left( \varepsilon^2 \left( \ddot{w}_s(L, t) + \frac{1}{\varepsilon^2} \hat{w}_f(L, t) \right) + L\ddot{\theta} + \ddot{r} - g\theta \right) - EI\varepsilon^2 (w_{fxxx}(L, t)) - (f_f + f_s) = 0. \quad (33)$$

Применив (25) и (33), получаем:

$$m \left( \hat{w}_f(L, t) \right) - \rho aw_{fxxx}(L, t) - f_f = 0. \quad (34)$$

Вводя уравнение (29) в уравнения (16)–(18), можем получить:

$$w_{fxx}(L, t) = 0, \quad (35)$$

$$w_f(0, t) = 0, \quad (36)$$

$$w_{fx}(0, t) = 0. \quad (37)$$

Уравнение (34) представляет быструю подсистему в ускоренном временном масштабе, который учитывает вибрацию гибкого объекта.

Таким образом, на настоящем этапе исследования достигнуто упрощение системы на основе метода сингулярных возмущений, при этом модель динамики сцепления системы раскладывается на медленную подсистему с жесткими колебаниями, выраженную через линейные, и ускоренную подсистему с гибкими (мягкими, эластичными) колебаниями, выраженную через уравнения в частных производных. По сравнению с традиционной моделью трудность управления в упрощенной модели принципиально снижается.

*Анализ и разработка системы управления гибким обратным маятником.* Ключевым моментом при разработке алгоритма управления является то, что он должен быть способен обрабатывать неопределенные параметры жесткой модели и гибкого стержня. Кроме того, он должен обеспечивать экспоненциальную схожесть медленной и быстрой подсистем.

Учитывая эти факторы, на данном этапе исследования был разработан регулятор, основанный на принципе управления со скользящим режимом, который является частью составной (сложной) схемы управления медленной подсистемой. Для быстрой подсистемы предлагается простой алгоритм управления с обратной связью. В качестве обоснования составной

схемы управления предлагается экспоненциальный анализ устойчивости медленных и быстрых подсистем.

*Алгоритм управления для медленной подсистемы.* Из-за наличия ошибок моделирования и неизвестных нарушений / помех, регулятор должен иметь высокую надежность. Управление в скользящем режиме является типичным методом, который обеспечивает надежность контроля. В скользящем режиме система не чувствительна к внешним помехам и параметрическим неопределенностям. Поэтому в данном исследовании разработка регулятора осуществлялась на базе метода управления в скользящем режиме.

С учетом неопределенностей и помех медленная подсистема, описываемая уравнениями (22), (23), принимает следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + B(u + d(t)), \quad (38)$$

где  $x = [\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}]$  и  $|d(t)| \leq D$ .

Поверхность скольжения ("sliding surface") определяется следующим образом:

$$s = B^T P x = 0, \quad (39)$$

где  $P = P^T > 0$ .

Регулятор описывается следующим образом:

$$u(t) = u_{eq} + u_n, \quad (40)$$

$$u_{eq} = - (B^T P B)^{-1} B^T P A x(t), \quad (41)$$

$$u_n = - (B^T P B)^{-1} [ |B^T P| D + keri ] sat(s), \quad (42)$$

где  $sat(s)$  является функцией насыщения и определяется как

$$sat(s) = \begin{cases} 1, & s > \Delta, \\ ks, & |s| \leq \Delta, s = 1/\Delta, \\ -1, & s < -\Delta. \end{cases}$$

Здесь  $\Delta$  — "пограничный слой".

*Доказательство 1.* Функция Ляпунова была выбрана в следующем виде:  $V = \frac{1}{2}s^2$ , где:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= B^T P \dot{x}(t) = B^T P (Ax + B(u + d(t))) = B^T P A x(t) + B^T P B u + B^T P B d(t) = \\ &= B^T P A x(t) + B^T P B \left( - (B^T P B)^{-1} B^T P A x(t) - (B^T P B)^{-1} [ |B^T P B| D + kesi ] sat(s) \right) + \\ &\quad + B^T P B d(t) = - [ |B^T P B| D + kesi ] sat(s) + B^T P B d(t). \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\dot{V} = s \dot{s} = - [ |B^T P B| c + kesi ] s \cdot sat(s) \leq 0. \quad (43)$$

Для обеспечения хорошей работы поверхности скольжения замкнутой системы функция скользящей поверхности  $P$  была построена с помощью метода ЛМН (линейных матричных неравенств).

Затем была выведена формула общего алгоритма управления ("control law"):

$$u(t) = -K_0 x + v(t), \quad (44)$$

$$v(t) = K_0 x + u_{eq} + u_n, \quad (45)$$

где

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + B(v + d(t)), \quad (46)$$

$\bar{A}$  и  $K_0$  вводятся для соответствия требованию устойчивости Гурвица. Таким образом, медленная подсистема имеет стабильность как замкнутая система.

*Доказательство 2:*

$$V = x^T P x = 2x^T P \bar{A} x(t) + 2x^T P B(v + d(t)). \quad (47)$$

Полученная из анализа *доказательства 1* функция скользящей поверхности  $s$  для ограниченного периода времени сходится к нулю, то есть  $s = 0$ , и уравнение (47) принимает вид:

$$V = x^T P x = 2x^T P \bar{A} x(t) + 2x^T P B(v + d(t)). \quad (48)$$

Чтобы гарантировать, что  $\dot{V} < 0$ , должно выполняться следующее условие:

$$P \bar{A} + \bar{A}^T < 0. \quad (49)$$

Для того, чтобы облегчить применение метода ЛМН, формула (49) была преобразована следующим образом:

$$(A - BK_0)P^{-1} + P^{-1}(A - BK_0)^T < 0, \quad (50)$$

$$AP^{-1} + P^{-1}A^T < BL + L^T B^T. \quad (51)$$

Затем неравенство (51) решается с помощью метода ЛМН.

*Алгоритм управления для быстрой подсистемы.* В этом исследовании мы рассматриваем устойчивость гибкого стержня. Считается, что стержень закреплен на одном конце и свободен на другом. К свободному концу прикреплен груз. Граничный регулятор с обратной связью описан следующим образом:

$$f_f = -a\hat{w}_f(L, v) + \rho\alpha\beta\hat{w}_{fxxx}(L, v) \quad (52)$$

Для доказательства устойчивости / стабильности быстрой подсистемы согласно формуле регулятора (52) функция Ляпунова определяется следующим образом.

*Доказательство. Шаг 1:*

$$(v) = \int_0^1 (EIw_{fxx}^2 + \rho\hat{w}_f^2) dx + K_1 \left( -\rho a w_{fxxx}(L, v) + \frac{m}{\beta} \hat{w}_f(L, v) \right)^2 \left( -\rho a \hat{w}_{fxxx}(L, v) + \frac{m}{\beta} \hat{w}_f(L, v) \right), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}(v) &= 2 \int_0^1 (w_{fxx} \hat{w}_{fxx} + \hat{w} \hat{w}_f) dx + K_1 \left( -\rho a w_{fxxx}(L, v) + \frac{m}{\beta} \hat{w}_f(L, v) \right) = \\ &= -\frac{2K_1(\rho a)^2}{\beta} w_{fxxx}^2(L, v) - \frac{2K_1 m a}{\beta^2} \hat{w}^2(L, v) \leq 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Затем, после некоторых расчетов,  $K_1$  определяется следующим образом:

$$K_1 = \frac{\beta^2}{(m + \alpha\beta)\rho} > 0. \quad (55)$$

*Шаг 2:* Функция Ляпунова имеет следующий вид:

$$V(v) = vE(v) + \int_0^L x \hat{W}_f(x, v) W_{fx}(x, v) dx. \quad (56)$$

Дифференцирование (55) в быстром времени / временном масштабе дает:

$$\begin{aligned} \widehat{V}(v) &= E(v) + v\widehat{E}(v) + \int_0^L ax\widehat{w}_f(x, v)\widehat{w}_{fx}(x, v) dx - \int_0^L xw_{fxxxx}(x, v)w_{fx}(x, v) dx = \\ &= \int_0^L (aw_{fxx}^2 + \widehat{w}_f^2) dx + K_1 \left( -\rho aw_{fxxx}(L, v) + \frac{m}{\beta}\widehat{w}_f(L, v) \right)^2 + \\ &+ v \left( -\frac{2K_1(\rho a)^2}{\beta}w_{fxxx}^2(L, v) - \frac{2K_1ma}{\beta^2}\widehat{w}_f^2(L, v) \right) - Lw_{fx}(L, v)w_{fxxx}(L, v) - \\ &- \frac{3}{2} \int_0^L w_{fxx}^2(x, v) dx + \frac{aL}{2}\widehat{w}_f^2(L, v) - \frac{a}{2} \int_0^L \widehat{w}_f^2(x, v) dx. \end{aligned} \quad (57)$$

Используя неравенство Коши-Шварца, получаем следующее выражение:

$$\left( -\rho aw_{fxxx}(L, v) + \frac{m}{\beta}\widehat{w}_f(L, v) \right)^2 \leq 2 \left( (\rho a)^2w_{fxxx}^2(L, v) + 2\frac{m^2}{\beta^2}\widehat{w}_f^2(L, v) \right), \quad (58)$$

$$w_{fx}^2(L, v) \leq \int_0^L w_{fxx}^2(x, v) dx, \quad (59)$$

$$w_{fx}(L, v)w_{fxxx}(L, v) \leq \delta_1 w_{fx}^2(L, v) + \frac{1}{\delta_1} w_{fxxx}^2(L, v). \quad (60)$$

Соответственно, используя (58)–(60), выражение (57) можно переписать как:

$$\begin{aligned} - \left( \frac{2K_1(\rho a)^2v}{\beta} - K_1(\rho a)^2 - \frac{L}{\delta_1} \right) w_{fxxx}^2(L, v)\widehat{V}(v) &\leq \\ &\leq -(1 - \delta_1) \int_0^L (aw_{fxx}^2 + \widehat{w}_f^2) dx - \left( \frac{2K_1mav}{\beta^2} - \frac{aL}{2} - \frac{K_1m^2}{\beta^2} \right) \widehat{w}_f^2(L, v). \end{aligned}$$

Затем выбирается параметр, который бы удовлетворял следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 1 - \delta_1 \geq 0; \\ \frac{2K_1(\rho a)^2v}{\beta} - K_1(\rho a)^2 - \frac{L}{\delta_1} \geq 0; \\ \frac{2K_1mav}{\beta^2} - \frac{aL}{2} - \frac{K_1m^2}{\beta^2} \geq 0. \end{cases}$$

Затем  $\widehat{V}(v) \leq 0$ .

Из (56) возможно получить:

$$(v - C)E(v) \leq V(v) \leq (v + C)E(v), \quad (61)$$

где  $C$  — положительная константа.

Затем (61) принимает вид:

$$E(v) \leq V(v)(v - C) \leq (v + C)E(v)(v - C), \quad (62)$$

$$v > \max \left\{ \frac{\beta \left( K_1(\rho a)^2 + \frac{L}{\delta_1} \right)}{2K_1(\rho a)^2}, \frac{\beta^2 \left( \frac{aL}{2} + \frac{K_1 m^2}{\beta^2} \right)}{2K_1 m a} \right\},$$

где  $\dot{V}(v) \leq 0$ .

Когда  $T > v$ , уравнение (62) принимает вид:

$$E(v) \leq \frac{V(T)}{v - C} \leq \frac{(T + C)E(0)}{v - C}. \quad (63)$$

Интегрируя приведенное выше уравнение (63) принимает вид:

$$\int_T^\infty E(v)^2 dv \leq \int_T^\infty \frac{(v + C)^2 E(0)^2}{(v - C)^2} dv, \quad (64)$$

что подтверждает экспоненциальную устойчивость, как указано в (52). Следовательно, доказательство получено.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

С целью проверки и визуализации эффективности предложенного регулятора произведено программное моделирование в системе MATLAB.

Шаг по времени и шаг по пространству в программе были установлены следующим образом:  $dt = 0,0001$  с и  $dx = 0,06$  м.

Параметры FIPS:  $EI = 2Nm^2$ ,  $J = 0,05$  кгм<sup>2</sup>,  $M = 1$  кг,  $m = 0,1$  кг,  $\rho = 2$  кг/м,  $L = 0,6$  м.

Параметры регулятора:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $a = 0,02$ ,  $K = 100$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 0,1993 & 0,0304 & 0,0322 & 0,0261 \\ 0,0304 & 0,0158 & 0,0061 & 0,0105 \\ 0,0322 & 0,0061 & 0,0126 & 0,0061 \\ 0,0261 & 0,0105 & 0,0061 & 0,0108 \end{bmatrix}, \Delta = 0,05, kesi = 0,5.$$

В начале моделирования начальная ориентация угла стыка была установлена на 0.1 и смещение позиции было равно 0.5. Следует обратить внимание на то, что отклонения вызваны движениями. Явилось рациональным установить нулевые начальные значения распределенного отклонения гибкого стержня. Для того чтобы проверить надежность регулятора, мы использовали возмущение со значением  $0.05\sin(t)$ . Результаты моделирования (угол маятника, угловая скорость и скорость изменения положения маятника, медленный и быстрый вход регулятора) представлены на рис. 2.

Отклонения, связанные с гибкостью стержня и граничное регулирование гибкого маятника (с контролем на основе обратной связи, без контроля с обратной связью) представлены на рис. 3.

Таким образом, в настоящем исследовании управление системой гибкого перевернутого маятника описывается на основе модели "PDE-ODE", т. е. комплекса дифференциальных уравнений в частных производных (PDE) и обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE). Используя метод сингулярного возмущения, произведена декомпозиция связанной модели на медленную и быструю подсистемы в разных масштабах времени. Используя принцип управления со скользящим режимом, для медленной подсистемы разработан надежный регулятор. Помимо этого, успешно был применен метод линейных матричных неравенств для проектирования в режиме поверхности скольжения ("sliding mode surface"). Также разработан регулятор с обратной связью для быстрой подсистемы. Результаты программного моделирования для системы гибкого перевернутого маятника продемонстрировали, что разработанная стратегия управления имеет надежные результаты в системе с помехами.

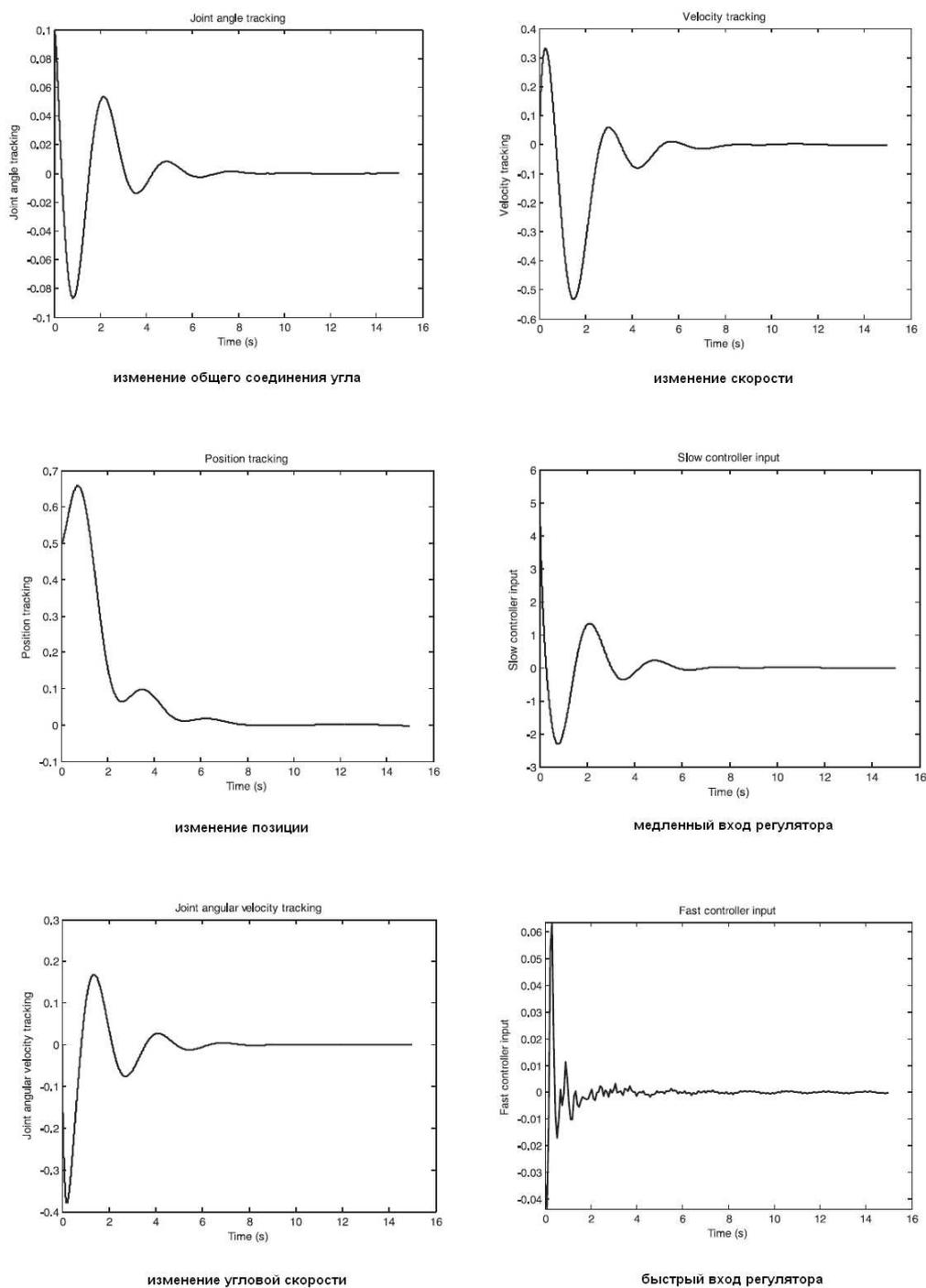


Рис. 2. Результаты моделирования системы гибкого перевернутого маятника по ключевым параметрам.

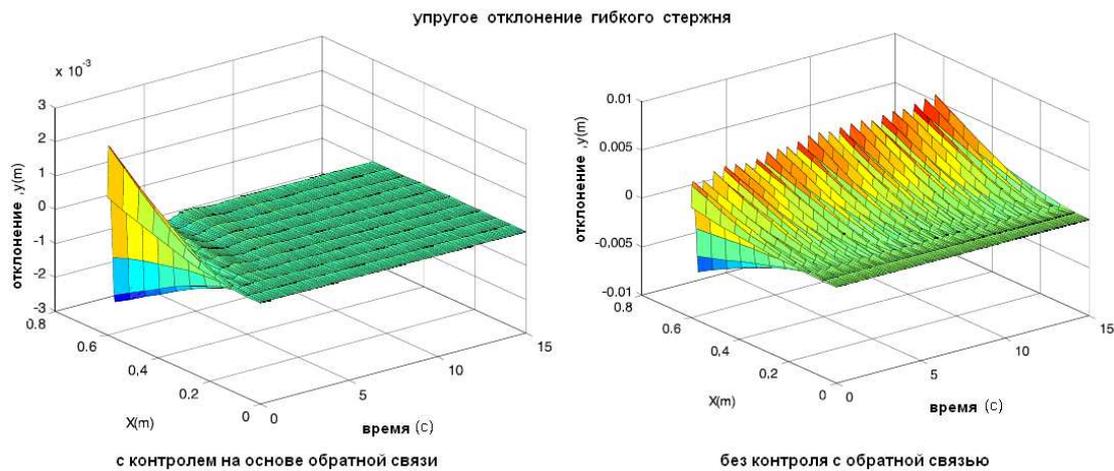


Рис. 3. Отклонение гибкого стержня.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует заключить, что изучение системы кинематики и динамики гибкого перевернутого маятника является объективной предпосылкой к исследованию новых возможностей для управления им. С целью реализации этой задачи на основе дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений с определенными геометрическими ограничениями произведена разработка новой модели системы гибкого перевернутого маятника. При этом для уменьшения сложности модели произведено “разбиение” связанной динамики его системы на составные части — медленную и быструю подсистемы. Это явилось возможным реализовать с помощью метода сингулярных возмущений. Для каждой из подсистем выполнена разработка соответствующего алгоритма управления. При этом необходимо отметить, что репрессор, использующий принцип управления со скользящим режимом, разработан в качестве составляющей более сложного механизма управления медленной подсистемы. В свою очередь, для быстрой подсистемы подходящим явился простой алгоритм управления с обратной связью. Проведенные математические операции привели к тому, что разработанная модель явилась значительно более простой, чем существовавшие до этого традиционные модели. Это подтверждается ее особенностью в виде содержания граничными условиями только граничной информации, что приводит к последующему упрощению проектирования систем управления. Таким образом, разработанная “составная” модель позволила создать методику граничного управления, позволяющую осуществить детекцию траектории концевого эффектора с перманентным подавлением вибрации. Эффективность этой методики подтверждается ее проведенным программным моделированием, показавшим, что разработанная стратегия управления имеет высокие результаты в системе с помехами. Полученные в настоящем исследовании результаты математического моделирования доказывают возможности управления гибким обратным маятником на основе метода сингулярных возмущений и имеют перспективное значение в индустрии проектирования механических систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Butikov, E. I. An improved criterion for Kapitza’s pendulum stability / E. I. Butikov // J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — V. 44, № 29. — P. 1–17.
2. Butikov, E. I. Oscillations of a simple pendulum with extremely large amplitudes / E. I. Butikov // Eur. J. Phys. — 2012. — V. 33, № 6. — P. 1555–1563.

3. Mikheev, Y. V. Asymptotic analysis of digital control systems / Y. V. Mikheev, V. A. Sobolev, E. M. Fridman // Autom. Remote Control. — 1988. — V. 49, № 9. — P. 1175–1180.
4. Radiation of inverted pendulum with hysteretic nonlinearity / M. E. Semenov et. al. // PIERS Proceedings. — 2014. — P. 1442–1445.
5. Study on the force transmissibility of vibration isolators with geometric nonlinear damping / JY. Sun et. al. // Nonlinear Dyn. — 2013. — V. 74, № 4. — P. 1103–1111.
6. Осинцев, М. С. Понижение размерности задач оптимального оценивания для динамических систем с сингулярными возмущениями / М. С. Осинцев, В. А. Соболев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 50–64.
7. Dadios, E. P. Genetic algorithm on line controller for the flexible inverted pendulum problem / E. P. Dadios, P. S. Fernandez, D. J. Williams // Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics. — 2006. — V. 10, № 2. — P. 12–16.
8. Анохин, Н. В. Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента / Н. В. Анохин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2012. — № 5. — С. 44–53.

### REFERENCES

1. Butikov E.I. An improved criterion for Kapitza's pendulum stability. J. Phys. A: Math. Theor., 2011, vol. 44, no. 29, pp. 1–17.
2. Butikov E.I. Oscillations of a simple pendulum with extremely large amplitudes. Eur. J. Phys., 2012, vol. 33, no. 6, pp. 1555–1563.
3. Mikheev Y.V., Sobolev V.A., Fridman E.M. Asymptotic analysis of digital control systems. Autom. Remote Control, 1988, vol. 49, no. 9, pp. 1175–1180.
4. Semenov M.E. et. al. Radiation of inverted pendulum with hysteretic nonlinearity. PIERS Proceedings, 2014, pp. 1442–1445.
5. Sun JY. et. al. Study on the force transmissibility of vibration isolators with geometric nonlinear damping. Nonlinear Dyn., 2013, vol. 74, no. 4, pp. 1103–1111.
6. Osintsev M.S., Sobolev V.A. Reducing the dimension of optimal estimation problems for dynamical systems with singular indignations. [Osintsev M.S., Sobolev V.A. Poniizhenie razmernosti zadach optimal'nogo ocenivaniya dlya dinamicheskikh sistem s singulyarnymi vozmushcheniyami]. *ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 50–64.
7. Dadios E.P., Fernandez P.S., Williams D.J. Genetic algorithm on line controller for the flexible inverted pendulum problem. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics. 2006, vol. 10, no. 2, pp. 12–16.
8. Anokhin N.V. Bringing a multi-link pendulum into equilibrium-position with a single control moment. [Anokhin N.V. Privedenie mnogozvennogo mayatnika v polozhenie ravnovesiya s pomoshch'yu odnogo upravlyayushchego momenta]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — News of the Russian Academy of Sciences. Theory and systems of management*, 2012, no. 5, pp. 44–53.

*Хатиф Аббас Заиниб, аспирант кафедры  
прикладной математики и механики, Во-  
ронезский государственный технический  
университет, Воронеж, Россия  
E-mail: Zainab.hatiff@gmail.com*

*Hatif Abbas Zainib, postgraduate student  
of Applied Mathematics and Mechanics  
Department, Voronezh State Technical  
University, Voronezh, Russia  
E-mail: Zainab.hatiff@gmail.com*