УДК 517.9

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В ВЕСОВОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова

Воронежский государственный университет,
Липецкий государственный педагогический университет
имени П. П. Семенова-Тян-Шанского,
Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина

Поступила в редакцию 21.01.2021 г.

Аннотация. Рассматривается весовой частно-интегральный оператор Вольтерра в $\mathbb{R}_2$ в весовом пространстве Лебега $L_p^\gamma(D)$ с мерой интегрирования $x_i^{\gamma_i}dx_i,\ \gamma_i > -1\ \ (i = 1{,}2)$. Получено достаточное условие ограниченности данного оператора в $L_p^\gamma(D)$. Доказана теорема существования и единственности решения весового частно-интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: частный интеграл, весовой частно-интегральный оператор, весовое анизотропное пространство Лебега, уравнение Вольтерра второго рода.

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE PARTIAL-INTEGRAL VOLTERRA EQUATION IN A WEIGHTED ANISOTROPIC SPACE OF FUNCTIONS

L. N. Lyakhov, N. I. Trusova

Abstract. We consider a weighted partial-integral Volterra operator in $\mathbb{R}_2$ in a weighted Lebesgue space $L_p^\gamma(D)$ with an integration measure $x_i^{\gamma_i}dx_i,\ \gamma_i > -1\ \ (i = 1{,}2)$. A sufficient condition for boundedness of this operator in $L_p^\gamma(D)$ is obtained. A theorem on the existence and uniqueness of a solution to a weighted partial-integral Volterra equation of the second kind for any value of λ is proved.

Keywords: partial integral, weighted partial integral operator, weighted anisotropic Lebesgue space, Volterra equation of the second kind.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $D = \{x : 0 < x_i < b_i,\ i = 1,\ 2\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_2$ и $D = D_{x_1} \times D_{x_2}$. Весовые частно-интегральные операторы Вольтерра в $\mathbb{R}_2$ имеют вид

$$(K_1 u)(x) = \int\limits_0^{x_1} k_1(x; t_1)\, u(t_1, x_2)\, t_1^{\gamma_1}\, dt_1\,, \tag{1}$$

$$(K_2 u)(x) = \int\limits_0^{x_2} k_2(x; t_2)\, u(x_1, t_2)\, t_2^{\gamma_2}\, dt_2\,. \tag{2}$$

Частно-интегральное уравнение Вольтерра второго рода с весовым частно-интегральным оператором Вольтерра задается равенством

$$\varphi(x) - \lambda K_\alpha \varphi(x) = f(x)\,,\ \alpha = 1,\, 2. \tag{3}$$

Весовое анизотропное пространство $L^\gamma_{\mathbf{p}}(D_1 \times D_2 \times D_3)$, $\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3)$, $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ определено нормой (см. [1], с. 9)

$$\|f\|_{L^\gamma_{\mathbf{p}}(D)} = \Bigg(\int\limits_{D_3} \Bigg(\int\limits_{D_2} \Bigg[\int\limits_{D_1} |\, f(x)|^{p_1}\, x_1^{\gamma_1}\, dx_1 \Bigg]^{p_2/p_1} x_2^{\gamma_2}\, dx_2 \Bigg)^{p_3/p_2} x_3^{\gamma_3} dx_3 \Bigg)^{1/p_3},$$

где $D_i = (0,b_i)$. При $p_1 = p_2 = p_3 = p$ — это весовая норма Лебега:

$$\|f\|_{L^\gamma_p} = \Bigg(\int\limits_D |f(x)|^p x^\gamma dx \Bigg)^{1/p}.$$

Введем обозначение $x^\gamma dx = d\mu(x),\ x_i > 0$. Справедливо весовое неравенство Гёльдера для функций $f \in L^\gamma_p(D)$ и $g \in L^\gamma_q(D)$ при $p \geqslant 1$ и $1/p + 1/q = 1$,

$$\int\limits_D |\, f(x)\, g(x)\,|\, d\mu_\gamma(x)| \leqslant \Bigg(\int\limits_D |f(x)|^p\ d\mu_\gamma(x) \Bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_D |g(x)|^q\, d\mu_\gamma(x) \Bigg)^{\frac{1}{q}} = \tag{4}$$

$$= \|f\|_{L^\gamma_p(D)}\, \|g\|_{L^\gamma_q(D)}\,.$$

2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВЕСОВОГО ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

Достаточный признак ограниченности весового частно-интегрального оператора Вольтерра K_α вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $k_\alpha \in L^{(\gamma_\alpha,\, \gamma_\alpha,\, \gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p',\, p,\, p\,p')}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})$, $u \in L^\gamma_{\mathbf{p}}\ (D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})$, *где* $\mathbf{p} = (p,p^2)$, $p \geqslant 1$. *Тогда*

$$\|K_\alpha\, u\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant C\ \|u\|_{L^\gamma_{\mathbf{p}}\ (D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})}\,,\ \alpha = 1,\, 2\,, \tag{5}$$

где

$$C = \|k_\alpha\|_{L^{(\gamma_\alpha,\, \gamma_\alpha,\, \gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p',\, p,\, p\,p')}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\alpha = 1$. Для оператора Вольтерра (1) имеем

$$\|K_1\, u\|_{L^\gamma_p(D)} = \Bigg\| \int\limits_0^{x_1} k_1(x;t_1)\ u(t_1,x_2)\ t_1^{\gamma_1} dt_1 \Bigg\|_{L^\gamma_p(D)}.$$

Применяем весовое неравенство Гельдера (4) с показателями p' и p. Тогда

$$\|K_1\, u\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \Bigg\| \Bigg(\int\limits_0^{x_1} |k_1(x;t_1)|^{p'}\ t_1^{\gamma_1} dt_1 \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_0^{x_1} |u(t_1,x_2)|^p\ t_1^{\gamma_1} dt_1 \Bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg\|_{L^\gamma_p(D)}.$$

Согласно определению весового класса функций Лебега, имеем

$$\|K_1\,u\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant \left[\int\limits_{D_{x_2}} \left(\int\limits_{D_{x_1}} \left[\int\limits_0^{x_1} |k_1(x;t_1)|^{p'} \; t_1^{\gamma_1} dt_1 \right]^{p/p'} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\int\limits_0^{x_1} |u(t_1,x_2)|^p \; t_1^{\gamma_1} dt_1 \right]^{p/p} \quad x_1^{\gamma_1} dx_1 \right)^{p/p} \quad x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p} .$$

Усилим данное неравенство, заменив параллелепипед с переменным верхним пределом x_1 на параллелепипед с конечным верхним пределом b_1 . Тогда

$$\|K_1\,u\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant \left[\int\limits_{D_{x_2}} \left(\int\limits_{D_{x_1}} \left[\int\limits_0^{b_1} |k_1(x;t_1)|^{p'} \; t_1^{\gamma_1} dt_1 \right]^{p/p'} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\int\limits_0^{b_1} |u(t_1,x_2)|^p \; t_1^{\gamma_1} dt_1 \right]^{p/p} \quad x_1^{\gamma_1} dx_1 \right)^{p/p} \quad x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p} .$$

Следовательно, для оператора (1), имеем

$$\|K_1 u\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant \|k_1\|_{L^{(\gamma_1,\,\gamma_1,\,\gamma_2)}_{(p'\,,\,p\,,\,p\,p')}(D_{t_1}\times D_{x_1}\times D_{x_2})} \; \|u\|_{L^{(\gamma_1,\,\gamma_2)}_{(p,\,p^2)}\;(D_{t_1}\times D_{x_2})} \,.$$

Аналогично доказывается ограниченность оператора Вольтерра (2).

Доказательство закончено.

3. ИТЕРАЦИИ ВЕСОВОГО ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

Введем последовательность итерированных ядер оператора Вольтерра K_α. Первая и вторая итерации определяются следующим образом

$$k_\alpha^{(1)}(x;t_\alpha){=}k_\alpha(x;t_\alpha)\,,\; k_\alpha^{(2)}(x;t_\alpha){=}\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}};\,\tau_\alpha)k_\alpha^{(1)}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};\,t_\alpha)\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\,d\tau_\alpha\,,\;\ldots\,.$$

ℓ-Итерация принимает вид

$$k_\alpha^{(\ell)}(x;t_\alpha) = \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}};\,\tau_\alpha)k_\alpha^{(\ell-1)}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};\,t_\alpha)\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\,d\tau_\alpha$$

и называется весовым ℓ-итерированным ядром k_α.

Теорема 2. *ℓ-Итерированное ядро k_α имеет следующий вид*

$$k_\alpha^{(\ell)}(x;t_\alpha){=}\int\limits_{\sigma_{\ell-1}}^{x_\alpha}\int\limits_{\sigma_{\ell-2}}^{\sigma_{\ell-1}}\ldots\int\limits_{t_\alpha}^{\sigma_1} k_\alpha(x;\sigma_{\ell-1})k_\alpha(\sigma_{\ell-1},x_{\overline{\alpha}};\sigma_{\ell-2})\ldots k_\alpha(\sigma_1,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,\sigma_1^{\gamma_1}d\sigma_1\ldots\sigma_{\ell-1}^{\gamma_{\ell-1}}d\sigma_{\ell-1}\,.$$

При выполнении условий теоремы 1 справедливо неравенство

$$\|K_\alpha^\ell u\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant \|k_\alpha^{(\ell)}\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma_\alpha,\,\gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p',\,p,\,p\,p')}(D_{t_\alpha}\times D_{x_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}})} \; \|u\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p,\,p^2)}\,(D_{t_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}})} \,. \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\ell = 2$. Имеем

$$(K_\alpha^2 u)(x) = \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;\sigma_1) \int\limits_0^{\sigma_1} k_\alpha(\sigma_1,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)u(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha\, \sigma_1^{\gamma_1} d\sigma_1\,.$$

Таким образом получаем

$$(K_\alpha^2 u)(x) = \int\limits_0^{x_\alpha} \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x;\sigma_1)k_\alpha(\sigma_1,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\, \sigma_1^{\gamma_1} d\sigma_1\ , u(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha = \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha^{(2)}(x;t_\alpha)\, u(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha\,,$$

где

$$k_\alpha^{(2)}(x;t_\alpha) = \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x;\sigma_1)k_\alpha(\sigma_1,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\, \sigma_1^{\gamma_1} d\sigma_1.$$

Следовательно, K_α^2 — частно-интегральный оператор Вольтерра с ядром $k_\alpha^{(2)}$.
Аналогичным образом для оператора $K_\alpha^{(3)}$ имеем

$$(K_\alpha^3\, u)(x) = \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha^{(3)}(x;t_\alpha)\ u(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha\,,$$

где

$$k_\alpha^{(3)}(x;t_\alpha) = \int\limits_{\sigma_1}^{x_\alpha} \int\limits_{t_\alpha}^{\sigma_1} k_\alpha(x;\sigma_2)k_\alpha(\sigma_2,x_{\overline{\alpha}};\sigma_1)k_\alpha(\sigma_1,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\, \sigma_2^{\gamma_2} d\sigma_2\ , \sigma_1^{\gamma_1} d\sigma_1.$$

Продолжим эти рассуждения ℓ раз. Тогда

$$\left(K_\alpha^\ell u\right)(x) = \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha^{(\ell)}(x;t_\alpha)\, u(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha\,. \qquad (7)$$

Воспользовавшись неравенством (5) для оператора Вольтерра K_α^ℓ (7), получим (6).
Доказательство закончено.

4. РЕЗОЛЬВЕНТА ВЕСОВОГО ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

В работе применен классический подход метода последовательных приближений. За нулевое приближение примем $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$. Следующее приближение

$$\varphi^{(1)}(x) = f(x) + \lambda K_\alpha \varphi^{(0)}(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;t_\alpha) f(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha\,;$$

$$\varphi^{(2)}(x) = f(x) + \lambda K_\alpha \varphi^{(1)}(x) =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;\tau_\alpha) \left[f(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha \right] f(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) \tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha =$$

$$= f(x) + \lambda^2 \int\limits_0^{x_\alpha} \left[\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x,\tau_\alpha) k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) \tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha \right] f(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha +$$

$$+ \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;\, t_\alpha) f(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha \,,$$

продолжая аналогичные действия, получим бесконечную последовательность функций

$$\varphi^{(0)}(x), \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x),\, \ldots\,,\, \varphi^{(s)}(x),\, \ldots\,,$$

определенную соотношением

$$\varphi^{(s)}(x) = f(x) + \lambda K_\alpha \varphi^{(s-1)}(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x,t_\alpha) \varphi^{(s-1)}(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha \,.$$

Тогда, учитывая равенство (7), получим $\varphi^{(s)}(x) = \sum_{\ell=0}^{s} \lambda^\ell K_\alpha^\ell\, f(x)\,.$

Далее мы увидим, что решение частно-интегрального уравнения Вольтерра (3) будет представлено суммой ряда

$$\varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell K_\alpha^\ell\, f(x)\,. \tag{8}$$

Используя (7), выражение (8) можно записать следующим образом

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda^{\ell-1} k_\alpha^{(\ell)}(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) \right] f(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) f(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}}) t_\alpha^{\gamma_\alpha} dt_\alpha \,.$$

Функция

$$R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell k_\alpha^{(\ell+1)}(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) \tag{9}$$

называется резольвентой частно-интегрального оператора Вольтерра.

5. РЕШЕНИЕ ВЕСОВОГО ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода в пространстве $L_2(D)$ рассмотрено в книге [2], а частно-интегрального уравнения Вольтерра (3) при $\gamma_\alpha = 0$ в пространстве непрерывных функций в монографии [3]. Для уравнения (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 1$ и $r > 1$ — произвольное число, а числа p' и r' определены из соотношений*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1\,,$$

и пусть

$$k_\alpha \in L^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha,\, \gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p,\, pr,\, \infty)}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})\,.$$

Тогда частно-интегральное уравнение Вольтерра второго рода (3) *имеет единственное решение в весовом пространстве* $L_p^\gamma(D)$ *вида*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{x_\alpha} R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) f(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha,\ x = (x_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\,,$$

где резольвентное ядро $R(x;\, t_\alpha;\, \lambda)$ *определяется с помощью ряда, составленного из итерированных ядер*

$$R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell k_\alpha^{(\ell+1)}(x;\, t_\alpha)\,,$$

сходящимся при всех значениях λ*. Резольвентное ядро удовлетворяет частно-интегральным уравнениям*

$$R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) - k_\alpha(x; t_\alpha) = \lambda \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} R(x;\, \tau_\alpha;\, \lambda)\, k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}}; t_\alpha)\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha =$$

$$= \lambda \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x; \tau_\alpha)\, R(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha;\, \lambda)\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha\,. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \geqslant 1$, $p' \geqslant 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. К итерированному ядру $k_\alpha^{(2)}(x;\, t_\alpha)$ применим весовое неравенство Гельдера (4). Учитывая, что $\tau_\alpha \in [0,b]$, получим

$$|k_\alpha^{(2)}(x;\, t_\alpha)| \leqslant \left[\ \int\limits_0^b |k_\alpha(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, \tau_\alpha)|^{p'}\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha \right]^{1/p'} \left[\ \int\limits_0^b |k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha)|^{p}\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha \right]^{1/p}.$$

Введем следующие функции

$$A(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) = \left(\int\limits_0^b |k_\alpha(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, \tau_\alpha)|^{p'}\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha\right)^{p'}\,, \tag{11}$$

$$B(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) = \left(\int\limits_0^b |k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha)|^{p}\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha\right)^{p}. \tag{12}$$

В результате для $k_\alpha^{(2)}$-итерированного ядра весового частно-интегрального оператора Вольтерра справедлива оценка

$$|k_\alpha^{(2)}(x;\, t_\alpha)| \leqslant A(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) B(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}}).$$

Для итерированного ядра $k_\alpha^{(3)}(x;\, t_\alpha)$, применяя наравенство Гельдера и уже полученную оценку для $|k_\alpha^{(2)}(x;\, t_\alpha)|$. Имеем

$$|k_\alpha^{(3)}(x;\, t_\alpha)| = \left|\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, \tau_\alpha) k_\alpha^{(2)}(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha)\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha\right| \leqslant$$

$$\leqslant A(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\, B(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}}) \left[\ \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} A^p(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha \right]^{1/p}.$$

Пусть

$$F_1\,(x;\,t_\alpha) = \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} A^p(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\,d\tau_\alpha\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_1(x;\,t_\alpha) = A^p(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\;x_\alpha^{\gamma_\alpha}\,. \tag{13}$$

Тогда

$$|k_\alpha^{(3)}(x;\,t_\alpha)| \leqslant A(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,B(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,F_1^{1/p}(x;t_\alpha)\,.$$

Аналогично со следующим повторным ядром

$$|k_\alpha^{(4)}(x;\,t_\alpha)| \leqslant \left[\,\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} |k_\alpha(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\,\tau_\alpha)|^{p'}\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha\right]^{1/p'} \left[\,\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} |k_\alpha^{(3)}(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\,t_\alpha)|^p\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant A(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,B(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,F_2^{1/p}(x;t_\alpha)\,,$$

где

$$F_2\,(x;t_\alpha) = \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} A^p(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\;\,F_1^{1/p}\,(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha$$

и т. д. В результате получаем общий вид оценки итерированных ядра

$$|k_\alpha^{(\ell+2)}(x;\,t_\alpha)| \leqslant A(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,B(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,F_\ell^{1/p}(x;t_\alpha), \quad \ell = 1,2,3,\ldots\,, \tag{14}$$

где

$$F_\ell(x;t_\alpha) = \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} A^p(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}})F_{\ell-1}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha\,.$$

Справедлива формула

$$F_\ell(x;t_\alpha) = \frac{1}{\ell!}\,F_1^\ell(x;t_\alpha),\;\; \ell = 1,2,\ldots\,. \tag{15}$$

Действительно. Для $\ell = 1$ равенство (15) следует из определения $F_1(x;t_\alpha)$ (13). Пусть для номера $\ell - 1$ справедливо равенство

$$F_{\ell-1}(x;t_\alpha) = \frac{1}{(\ell-1)!} F_1^{\ell-1}(x;t_\alpha)\,. \tag{16}$$

Докажем (15). Имеем

$$F_\ell(x;t_\alpha) = \frac{1}{(\ell-1)!}\;\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} A^p(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,F_1^{\ell-1}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha} d\tau_\alpha\,.$$

С учетом (13) имеем

$$F_\ell(x;t_\alpha) = \frac{1}{(\ell-1)!}\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} \frac{\partial F_1(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)}{\partial\tau_\alpha}\;F_1^{\ell-1}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,d\tau_\alpha =$$

$$= \frac{1}{(\ell-1)!}\,F_1^{\ell-1}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,F_1(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\Big|_{\tau_\alpha=t_\alpha}^{\tau_\alpha=x_\alpha} -$$

$$-\frac{\ell-1}{(\ell-1)!}\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} F_1(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\, F_1^{\ell-2}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,\frac{\partial F_1(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)}{\partial\tau_\alpha}\,d\tau_\alpha =$$

$$=\frac{1}{(\ell-1)!}\,F_1^\ell(x;t_\alpha)-(\ell-1)\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} F_{\ell-1}(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}};t_\alpha)\,A^p(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\,d\tau_\alpha =$$

$$=\frac{1}{(\ell-1)!}\,F_1^\ell(x;t_\alpha)-(\ell-1)F_\ell(x;t_\alpha).$$

Откуда следует (15).

Теперь возвращаемся к неравенству (14). Учитывая (15), запишем

$$\|k_\alpha^{(\ell+2)}\|_{L_p^\gamma(D\times D_{t_\alpha})}\leqslant\frac{1}{(\ell!)^{1/p}}\left(\int\limits_{D\times D_{t_\alpha}} A^p(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,B^p(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,F_1^\ell(x;t_\alpha)\,t_\alpha^{\gamma_\alpha}\,dt_\alpha\,x^\gamma\,dx\right)^{1/p}.$$

Из (13) получим неравенство

$$F_1\,(x;t_\alpha)\leqslant\sup_{x_{\overline{\alpha}}}\int\limits_0^b A^p(\tau_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,\tau_\alpha^{\gamma_\alpha}d\tau_\alpha=\|A\|^p_{L_\infty\left(D_{x_{\overline{\alpha}}};\,L_p^{\gamma_\alpha}(D_{x_\alpha})\right)}$$

В данном неравенстве с учетом обозначения (11) применена анизотропная $sup-L_{p'}$-норма, ограниченность которой вытекает из условия принадлежности ядра k_α пространству $L_p(D_{x_\alpha})$ со значением в пространстве существенно ограниченных функций $L_\infty^\gamma(D_{x_{\overline{\alpha}}})$ (см. [5], с. 19).

Следовательно

$$\|k_\alpha^{(\ell+2)}\|_{L_p^\gamma(D\times D_{t_\alpha})}\leqslant\left(\frac{N^\ell}{\ell!}\right)^{1/p}\left(\int\limits_{D\times D_{t_\alpha}} A^p(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,B^p(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,t_\alpha^{\gamma_\alpha}\,dt_\alpha\,x^\gamma\,dx\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{N^\ell}{\ell!}\right)^{1/p}\left(\int\limits_D A^p(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\int\limits_0^b B^p(t_\alpha;x_{\overline{\alpha}})\,t_\alpha^{\gamma_\alpha}dt_\alpha\,x^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

К внешнему интегралу снова применим весовое неравенство Гельдера (4) с показателями r, r', $r\geqslant 1$ и $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Тогда

$$\|k_\alpha^{(\ell+2)}\|_{L_p^\gamma(D\times D_{t_\alpha})}\leqslant\left(\frac{N^\ell}{\ell!}\right)^{1/p}\left(\int\limits_D A^{p\,r'}(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,x^\gamma\,dx\right)^{1/p\,r'}\times$$

$$\times\left(\int\limits_D\left|\int\limits_0^b B^p(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\,t_\alpha^{\gamma_\alpha}\,dt_\alpha\right|^r x^\gamma\,dx\right)^{1/p\,r}.$$

Учитывая введенные ранее функции (11) и (12), получим следующую оценку

$$\|k_\alpha^{(\ell+2)}\|_{L_p^\gamma(D\times D_{t_\alpha})}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{N^\ell}{\ell!}\right)^{1/p} b^{1/p\,r}\;\|k_\alpha\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma)}_{(p',\,p\,r')}(D_{t_\alpha}\times D)}\;\|k_\alpha\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma_{\overline{\alpha}},\,\gamma_\alpha)}_{(p,\,p,\,p\,r)}(D_{x_\alpha}\times D_{t_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}})}=\left(\frac{N^\ell\,b^{1/r}}{\ell!}\right)^{1/p}.$$

Пусть

$$\mathbb{N} = \max\left\{ \|k_\alpha\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma)}_{(p',\,p\,r')}(D_{t_\alpha}\times D)}\,,\, \|k_\alpha\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma_{\overline{\alpha}},\,\gamma_\alpha)}_{(p,\,p,\,p\,r)}(D_{x_\alpha}\times D_{t_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}})} \right\}.$$

Тогда оценка итерированных ядер примет вид

$$\|k_\alpha^{(\ell+2)}\|_{L_p^\gamma(D\times D_{t_\alpha})} \leqslant \left(\frac{N^\ell\, b^{1/r}}{\ell!}\right)^{1/p}\mathbb{N}\,. \tag{17}$$

Пусть υ — произвольное натуральное число. Тогда

$$\|\varphi^{(s+\upsilon)}-\varphi^{(s)}\|_{L_p^\gamma(D)} = \left\|\sum_{\ell=s+1}^{s+\upsilon}\lambda^\ell\,\left(K_\alpha^\ell f\right)(x)\right\|_{L_p^\gamma(D)}.$$

Применяя неравенство Минковского и неравенство (6), получим

$$\|\varphi^{(s+\upsilon)}-\varphi^{(s)}\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant \sum_{\ell=s+1}^{s+\upsilon}|\lambda|^\ell\,\left\|\left(K_\alpha^\ell f\right)(x)\right\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\ell=s+1}^{s+\upsilon}|\lambda|^\ell\,\|k_\alpha^{(\ell)}\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma_\alpha,\,\gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p',\,p,\,p\,p')}(D_{t_\alpha}\times D_{x_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}})}\|f\|_{L^{(\gamma_\alpha,\,\gamma_{\overline{\alpha}})}_{(p,\,p^2)}(D_{t_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}})}.$$

По условию теоремы $k_\alpha \in L_q$, где число $q \geqslant 1$, вообще говоря, произвольное. Поэтому, применяя неравенство (17), получим

$$\|\varphi^{(s+\upsilon)}-\varphi^{(s)}\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant C\sum_{\ell=s+1}^{s+\upsilon}|\lambda|^\ell\left(\frac{N^\ell\, b^{1/r}}{\ell!}\right)^{1/p} \to 0 \text{ при } \ell\to\infty\,.$$

Таким образом, резольвента (9) сильно сходится в $L_p^{(\gamma,\,\gamma_\alpha)}(D\times D_{t_\alpha})$ к функции, которая в условии теоремы обозначена $R(x;\, t_\alpha;\, \lambda)$.

Покажем, что $\varphi(x)$ — решение весового Ч-И уравнения Вольтерра (3). Для этого во второе слагаемое левой части уравнения (3) подставим функцию (8), получим

$$\varphi(x) - \lambda K_\alpha\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\lambda^\ell\,\left(K_\alpha^\ell f\right)(x)\right) = f(x)\,.$$

Найдем $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\lambda^\ell\,\left(K_\alpha^\ell f\right)(x) + f = \sum_{\ell=0}^{\infty}\lambda^\ell\,\left(K_\alpha^\ell f\right)(x)\,.$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ является решением весового частно-интегрального уравнения Вольтерра (3).

Докажем равенство (10). Имеем (9)

$$R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\lambda^\ell k_\alpha^{(\ell+1)}(x;\, t_\alpha) = k_\alpha(x;\, t_\alpha) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\lambda^\ell k_\alpha^{(\ell+1)}(x;\, t_\alpha) =$$

$$= k_\alpha(x;\, t_\alpha) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\lambda^\ell\int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} k_\alpha^{(\ell)}(x;\, \tau_\alpha)\, k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha)\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha =$$

$$= k_\alpha(x;\, t_\alpha) + \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} \left[\, \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda^\ell\, k_\alpha^{(\ell)}(x;\, \tau_\alpha)\, k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) \right] t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha =$$

$$= k_\alpha(x;\, t_\alpha) + \lambda \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} \left[\, \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^\ell\, k_\alpha^{(\ell+1)}(x;\, \tau_\alpha) \right) k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}};\, t_\alpha) \right] t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha =$$

$$= k_\alpha(x;\, t_\alpha) + \lambda \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} R(x;\, \tau_\alpha;\, \lambda)\, k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}}; t_\alpha)\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha\,.$$

Таким образом, получено первое частно-интегральное уравнение (10)

$$R(x;\, t_\alpha;\, \lambda) - k_\alpha(x;\, t_\alpha) = \lambda \int\limits_{t_\alpha}^{x_\alpha} R(x;\, \tau_\alpha;\, \lambda)\, k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\overline{\alpha}}; t_\alpha)\, \tau_\alpha^{\gamma_\alpha}\, d\tau_\alpha\,.$$

Аналогично проверяется и второе частно-интегральное уравнение (10) для резольвенты $R(x;\, t_\alpha;\, \lambda)$.

Покажем, что функция (8) представляет собой единственное решение уравнения (3), следуя методике, развитой в [6] (с. 435).

Пусть существуют два решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ уравнения (3). Тогда верны следующие равенства

$$\varphi(x) - \lambda K_\alpha \varphi(x) = f(x), \quad \psi(x) - \lambda K_\alpha \psi(x) = f(x)\,.$$

Введем функцию $\omega(x) = \psi(x) - \varphi(x)$, которая удовлетворяет однородному частно-интегральному уравнению Вольтерра

$$\omega(x) - \lambda K_\alpha \omega(x) = 0\,.$$

Докажем, что $\omega(x) \equiv 0$ при любом значении λ.

Однородное частно-интегральное уравнение Вольтерра запишем в виде

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_{0}^{x_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) \omega(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha\,. \tag{18}$$

Тогда из (18) имеем

$$\|\omega\|_{L_p^\gamma(D)} = |\lambda| \left\| \int\limits_{0}^{x_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\, \omega(t_\alpha, x_{\overline{\alpha}})\, t_\alpha^{\gamma_\alpha}\, dt_\alpha \right\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\, \|k_\alpha\|_{L_{(p',\, p,\, p\, p')}^{(\gamma_\alpha,\, \gamma_\alpha,\, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})} \|\omega\|_{L_{(p,\, p^2)}^{(\gamma_\alpha,\, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})}\,.$$

Так как по условию теоремы $k_\alpha \in L_q$, где число $q \geqslant 1$ — произвольное, то применяя неравенство (17), получим

$$\|\omega\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda|\, C \left(\frac{N\, b^{1/r}}{1!} \right)^{1/p}.$$

Продолжая далее шаг за шагом из (18), получим

$$\|\omega\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda| \left\| \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;t_\alpha)\ |\lambda|\ C\left(\frac{N\,b^{1/r}}{1!}\right)^{1/p} t_\alpha^{\gamma_\alpha}\,dt_\alpha \right\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda|^2\, C\left(\frac{N^2\,b^{1/r}}{2!}\right)^{1/p},$$

$$\|\omega\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda| \left\| \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;t_\alpha)\ |\lambda|^2\ C\left(\frac{N^2\,b^{1/r}}{2!}\right)^{1/p} t_\alpha^{\gamma_\alpha}\,dt_\alpha \right\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda|^3\, C\left(\frac{N^3\,b^{1/r}}{3!}\right)^{1/p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\|\omega\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \left\| \int\limits_0^{x_\alpha} k_\alpha(x;t_\alpha)\ |\lambda|^{\ell-1}\ C\left(\frac{N^{\ell-1}\,b^{1/r}}{(\ell-1)!}\right)^{1/p} t_\alpha^{\gamma_\alpha}\,dt_\alpha \right\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda|^\ell\, C\left(\frac{N^\ell\,b^{1/r}}{\ell!}\right)^{1/p} \qquad (19)$$

при любом λ. Полагая в (19), что $\ell \to \infty$, имеем $\|\omega\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant 0$. Следовательно $\omega(x) \equiv 0$. Таким образом единственность решения частно-интегрального уравнения Вольтерра (3) в весовом пространстве функций $L_p^\gamma(D)$ доказана.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.

2. Трикоми, Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. — М. : Из-во иностранной литературы, 1960. — 301 с.

3. Appell, J. M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

4. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

5. Лионс, Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.

6. Сабитов, К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения / К. Б. Сабитов. — М. : Высшая школа, 2005. — 671 с.

REFERENCES

1. Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolskii S.M. Integral representations of functions and embedding theorems. [Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolskii S.M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1975, 478 p.

2. Tricomi F. Integral Equations. [Trikomi F. Integral'nye uravneniya]. Moscow, 1960, 301 p.

3. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.

4. Yosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

5. Lyons J.L. Some methods for solving nonlinear boundary value problems. [Lions ZH.L. Nekotorye metody resheniya nelinejnyh kraevyh zadach]. Moscow: Mir, 1972, 587 p.

6. Sabitov K.B. Functional, differential and integral equations. [Sabitov K.B. Funkcional'nye, differencial'nye i integral'nye uravneniya]. Moscow: Higher School, 2005, 671 p.

Ляхов Л. Н., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: levnlya@mail.ru

Lyakhov L. N., Voronezh State University, Voronezh, Russia; Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shanskiy University, Lipetsk, Russia; Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: levnlya@mail.ru

Трусова Н. И., Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия
E-mail: trusova.nat@gmail.com

Trusova N. I., Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shanskiy University, Lipetsk, Russia
E-mail: trusova.nat@gmail.com