УДК 517.929.7

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В ПРОБЛЕМАХ МЕДИЦИНЫ

Ф. Х. Кудаева, А. А. Кайгермазов, А. Л. Нагоров

Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова

Поступила в редакцию 19.12.2020 г.

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена исследованию двумерной задачи со свободными границами, которая возникает при математическом моделировании медицинских проблем. В работе рассмотрена новая постановка двумерной задачи со свободными границами, получена более простая двумерная стационарная задача Стефана, а также проведено асимптотическое интегрирование исследуемой задачи. После асимптотического разложения получены уравнения нулевого и первого приближения.

Ключевые слова: задача со свободной границей, асимптотическое интегрирование, асимптотическое разложение, нулевое приближение, уравнение первого приближения, двумерная задача, температурное поле.

THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM WITH FREE BOUNDARY IN PROBLEMS OF MEDICINE

F. Kh. Kudayeva, A. A. Kaygermazov, A. L. Nagorov

Abstract. The proposed work is devoted to the study of a two-dimensional problem with free boundaries, which arises in the mathematical modeling of medical problems. A new formulation of the two-dimensional problem with free boundaries is considered, a simpler two-dimensional stationary Stefan problem is obtained, and the asymptotic integration of the problem is carried out. The equations of zero and first approximation are obtained after asymptotic expansion.

Keywords: free boundary problem, asymptotic integrating, asymptotic decomposition, zeroth-order approximation, equation of first approximation, two-dimensional problem, temperature field representation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современный уровень развития прикладной математики определяется исследованиями нелинейных задач для многомерных дифференциальных и интегральных уравнений. Одним из таких нелинейных задач в математической физике являются задачи со свободными границами. В таких задачах граница области или ее часть, в которой ищется решение, неизвестна и определяется в процессе решения самой задачи. Классическим примером такого типа задач является задача Стефана — задача с фазовыми переходами в теории теплопроводности.

Задачи со свободными границами в настоящее время привлекают большое внимания математиков–специалистов, которые занимаются уравнениями с частными производными, а также специалистов, которые занимаются вычислительной математикой.

Многие задачи со свободными границами для уравнений эллиптического и параболического типов удается сформулировать в виде вариационного неравенства, вариационной задачи

© Кудаева Ф. Х., Кайгермазов А. А., Нагоров А. Л., 2022

с ограничениями, что позволяет исследовать вопросы существования, единственности решений этих задач, а также строить вычислительные алгоритмы. А многие задачи со свободными границами не удается представить в виде вариационных неравенств.

Задачи со свободными границами отличаются богатством содержаний и многообразием приложений — от технологических процессов до проблем окружающей среды и рационального природопользования [12–15]. Для разнообразных задач со свободными границами исследованы и решены многие проблемы, которые связанны с оптимизацией, с оптимальным управлением, с численными расчетами и т. д. [16–18, 20–23]. Данная работа является продолжением уже опубликованных работ [6] и посвящена исследованию двумерной задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения, которая возникает при математическом моделировании медицинских проблем.

Цель предлагаемой работы: разработка новых эффективных методов исследования двумерных задач со свободными границами и получение более простых постановок двумерных задач.

Одной из работ, посвященной исследованию двумерных задач со свободными границами типа Стефана является работа Березовского А. А. [2]. В своей работе [2] Березовский А. А. проводит исследование двумерных задач со свободными границами, которые возникают в проблемах криодеструкции биологической ткани.

В работе Формалева В. Ф., Рабинского Л. Н. моделируется и аналитически решается задача в трехфазных средах с двумя нестационарными подвижными границами фазовых превращений [11].

Работа [1] содержит базовую модель и алгоритм ее решения. Работа посвящена программной реализации метода граничных элементов для задачи со свободной границей, решается уравнение Лапласса для функции скорости потенциала, функции тока, удовлетворяющая условию Коши. На свободной границе, исследуемой в этой работе задаче, заданы кинематическое и динамическое условия [1].

В настоящее время в различных источниках предлагаются различные аналитические и численные методы решения классической задачи Стефана [4—6, 7–10]. В работе [3] предложен сравнительный анализ некоторых численных решений одномерной задачи Стефана.

В работе рассматриваются новые постановки двумерных двухфазных задач со свободными границами в цилиндрической и сферической системах координат. Поставленные задачи Стефана не содержат начальных условий, так как температурное поле определяется только в возмущенной в тепловом отношении области биологической ткани.

Полученные в настоящей работе результаты можно применить для расчета режимов низкотемпературного воздействия на биологическую ткань, для определения значения параметров замораживания биологической ткани, для конструирования и совершенствования криоинструментов, а также эти результаты могут быть полезны аспирантам и научным сотрудникам, которые занимаются задачами со свободными границами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Замораживание биологической ткани сопровождается выделением источников тепла при кристаллизации сначала внеклеточной, а затем и внутриклеточной воды. Это моделируется разрывностью удельной внутренней тепловой энергии как функции температуры в точках $\mathrm{T} = \mathrm{T}_n$ и$\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ где T_n — температура криопоражения ($-50 \div -20^0$ С), а T^* - замораживания ($-3 \div 0^0$ С). Источники сосредоточены на подлежащих определению изотермических поверхностях $\Phi_n(p,t) = \mathrm{T}(p,t) - \mathrm{T}_n = 0, \Phi^*(p,t) = \mathrm{T}(p,t) - \mathrm{T}^* = 0$.

Биоткань пронизана разветвленной сетью капилляров, снабжающей кровью охлажденную незамороженную $\left(\mathrm{T}^* \leqslant \mathrm{T} \leqslant \bar{\mathrm{T}}\right)$ и замороженную не криопораженную ($\mathrm{T}_n < \mathrm{T} < \mathrm{T}^*$) области биоткани. Температура протекающей по капиллярам крови является функцией координат и времени. Она неизвестна, но всегда выше температуры охлажденной ткани — $T_K(p,t) > T, T^* \leqslant T \leqslant \bar{T} = 36{,}7^0C$, следствием чего является возникновение внутренних источников тепла $W_K(T) = m_K c_K (T_K - T)\left[\eta(T - T^*) - \eta\left(T - \bar{T}\right)\right]$ где m_K — скорость потока массы крови, c_K — ее удельная теплоемкость, а $\eta(T)$ — функция Хевисайда. Другим внутренним источником является тепло, образующееся как побочный продукт метаболизма. Принято считать, что плотность этого источника тепла постоянна — $W_m = const$.

По теплофизическому смыслу, в отличие от используемой, зависимость $W = W(T)$ для всех $T \in \left(T_n, \bar{T}\right)$ должна быть ограниченной непрерывной функцией, монотонно возрастающей в интервале температур $T_n \leqslant T < T^{**}$ и монотонно убывающей в интервале $T^{**} < T < \bar{T}$. Для существования пространственной локализации непременным является условие $W'_T\left(\bar{T}\right) = -\infty$, имеющее простой физический смысл — при сколь угодно малом возмущении начальной температуры биоткани в ней возникает сколь угодно малые источники, скорость нарастания которых, однако, неограниченна. Эти качественные характеристики, диктуемые физическим смыслом, необходимо учитывать при выборе конкретных функциональных зависимостей $W = W(T)$. В качестве простейшей может быть принята степенная зависимость $W = W_0\left[\left(\bar{T} - T_n\right)^\nu - (T - T_n)^\nu\right]^\beta, T_n < T < \bar{T}$ с $0 < \beta < 1$ и $\nu > 1$. Содержащиеся в ней три параметра ω_0, ν и β должны определяться экспериментально как новые теплофизические характеристики биологической ткани — активной, не инертной среды. В общем случае определение функциональной зависимости $w = w(T)$ представляет собой самостоятельную очень сложную и важную задачу, решение которой требует проведения специальных целенаправленных экспериментальных исследований.

Для определения $T(p,t)$ и трех изотермических поверхностей $\Phi_n(p,t) = 0, \Phi^*(p,t) = 0, \Phi_B(p,t) = 0$ в предложении, что с поверхности биоткани осуществляется отвод тепла в окружающую среду по закону Ньютона, получаем нестационарную задачу Стефана:

$$
\begin{aligned}
& div\left[\lambda(T)\, gradT\right] - e_t(T) = -w(T), p \in \Omega(t), t > 0,\\
& \lambda(T)\, {}^{\partial T}\!/_{\partial n} = \alpha(p)\left[T - T_c(p,t)\right], p \in \Phi(p,t) = 0, t > 0,\\
& T = \overline{T}, {}^{\partial T}\!/_{\partial n} = 0, p \in \Phi_B(p,t);\ T = T^*, p \in \Phi^*(p,t) = 0;\\
& T = T_n, p \in \Phi_n(p,t) = 0, t > 0,
\end{aligned}
$$

где $\alpha(p)$ — коэффициент теплообмена, $T_c(p,t)$ — температура внешней среды, n — внутренняя нормаль.

В процессе криодеструкции температура криозонда $T_A(t)$ монотонно понижается от максимального значения $T_A(0) = \overline{T}$ до необходимого минимального $T_A \leqslant \underline{T}$. в начальный период охлаждения биоткани, когда $T(p,t) \geqslant T^*, p \in \Phi(p) = 0$, определению подлежит только $T(p,t), p \in \Omega(t)$ и поверхность $\Phi_B(p,t) = 0$. На втором этапе, когда $T(p,t) \geqslant T_n, p \in \Phi(p) = 0$, к этой паре добавляется и определение изотермы замораживания $\Phi^*(p,t) = 0$. И, наконец, при $T(p,t) \leqslant T_n, p \in \Phi(p) = 0$, необходимо определять еще и изотермическую поверхность криопоражения $\Phi_n(p,t) = 0$.

С течением времени суммарная мощность источников тепла, выделяемых биотканью, компенсирует отводимый от биоткани тепловой поток значения коэффициента теплопроводности в замороженной и незамороженной областях биоткани. Эта зависимость следует из закона Фурье $Q = -\lambda^{\partial T}\!/_{\partial n}$ и стационарного уравнения теплопроводности $(\lambda T'_n)_n = -w$, отнесенного к системе координат, связанной с изотермическими поверхностями и нормалями к ним, после исключения дифференцирования по нормали $Qdn = -\lambda dn$.

Локальность процесса замораживания позволяет рассматривать биологическую ткань как полуограниченную, активную (неинертную) теплопроводящую среду $z > 0$. Если при деструкции применяются криозонды с достаточно протяженной вдоль оси Ox охлаждающей поверхностью, то, температурное поле биологической ткани зависит только от двух пространственных переменных y и z, т. е. $\mathrm{T} = \mathrm{T}(y,z,t)$. В этом случае:

$$\mathrm{P} : (y,z)\,; div\left[\lambda(\mathrm{T})\, grad\mathrm{T}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\right); \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z}; \Phi(y,z) = z = 0;$$

изотермическая поверхность замораживания, как и любая другая, представима в одном из видов: $\Phi^*(y,z,t) = y - y^*(z,t)$ или $\Phi^*(y,z,t) = z - z^*(y,t)$. Соответственно, для орта нормали $\vec{n}$ к $\Phi^*(y,z,t) = 0$ получаем выражения: $\vec{n} = grad\Phi^*/\left|\nabla\Phi^*\right| = \left(\vec{j} - y^*(z,t)\,\vec{k}\right)/\sqrt{1 + y_z^*(z,t)}$ и $\vec{n} = \left(-z_y^*(y,t)\,\vec{j} + \vec{k}\right)/\sqrt{1 + z^{*2}(y,t)}$. Для производной по нормали ${}^{\partial \mathrm{T}}\!/_{\partial n} = (grad\mathrm{T},\vec{n})$ на поверхности $\Phi^*(y,z,t) = 0$ имеем представления ${}^{\partial \mathrm{T}}\!/_{\partial n} = \left[\mathrm{T}_y - \mathrm{T}_z y_z^*(z,t)\right]/\sqrt{1 + y_z^{*2}(z,t)}$ и ${}^{\partial \mathrm{T}}\!/_{\partial n} = \left(-z_y^*(y,t)\,\mathrm{T}_y + \mathrm{T}_z\right)/\sqrt{1 + z^{*2}(y,t)}$. Условие Стефана (сопряжения) на поверхности $\Phi^* = 0, \left[\lambda(\mathrm{T})\,{}^{\partial \mathrm{T}}\!/_{\partial n}\right]_* = -pv_n$, где $v_n = -\Phi_t^*/\left|\nabla\Phi^*\right|$ — кажущаяся скорость движения поверхности $\Phi^*(y,z,t) = 0$ в направлении нормали $\vec{n} = \nabla\Phi^*/\left|\nabla\Phi^*\right|$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_y\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_z\right]_* * y_z^*(z,t) = py_t^*(z,t)\,, y = y^*(z,t)\,,\\
&\left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_z\right]_* - \left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_y\right]_* * z_y^*(y,t) = pz_t^*(y,t)\,, z = z^*(y,t)\,,
\end{aligned}$$

где символ $[]_*$ означает скачок стоящей под ним функции при переходе через поверхность $\Phi^*(y,z,t) = 0$. Условия Стефана на поверхности $\Phi_n(y,z,t) = y - y^n(z,t) = z - z^n(y,t) = 0$ и условие на поверхности $\Phi_B(y,z,t) = y - y^B(z,t) = z - z^B(y,t) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_y\right]_n - \left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_z\right]_n * y_z^n(z,t) = p_0 y_t^n(z,t)\,, y = y^n(z,t)\,,\\
&\left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_z\right]_n - \left[\lambda(\mathrm{T})\,\mathrm{T}_y\right]_n * z_y^n(y,t) = p_0 z^n(y,t)\,, z = z^n(y,t)\,,\\
&\mathrm{T}_y - \mathrm{T}_z * y_z^{\mathrm{B}}(z,t) = 0, y = y^{\mathrm{B}}(z,t)\,,\\
&\mathrm{T}_z - \mathrm{T}_y * z_y^{\mathrm{B}}(y,t) = 0, z = z^{\mathrm{B}}(y,t)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, задачи плоско – параллельной криодеструкции биоткани можно рассматривать как обычные задачи теплопроводности на сопряжение на подлежащих определению поверхностях: $\Phi^*(y,z,t) = 0$ и $\Phi_n(y,z,t) = 0$. Для криопораженной области $\mathrm{T} < \mathrm{T}_n(\Phi_n(y,z,t) < 0)$ для $\mathrm{T}(x,z,t)$ получаем линейное уравнение $\Delta\mathrm{T} - \mathrm{T}_t/a^2 = 0$, а в замороженной $\mathrm{T}_n < \mathrm{T} < \mathrm{T}^*(\Phi^*(y,z,t) < 0)$ и охлажденной $\mathrm{T}^* < \mathrm{T} < \overline{\mathrm{T}}(\Phi_{\mathrm{B}}(y,z,t) < 0)$ областях нелинейные $\Delta\mathrm{T} - \mathrm{T}_t/\underline{a}^2 = -w(\mathrm{T})/\underline{\lambda}$ и $\Delta\mathrm{T} - \mathrm{T}_t/\overline{a}^2 = -w(\mathrm{T})/\overline{\lambda}, \Delta\mathrm{T} = \mathrm{T}_{yy} + \mathrm{T}_{zz}$, где $\underline{a}^2 = \underline{\lambda}/\underline{c}\underline{\rho}, \overline{a}^2 = \overline{\lambda}/\overline{c\rho}$.

Сложность исследования двумерных задач Стефана связана с такими их особенностями, как пространственная локализация, приводящая к вырождению начальных условий, и временная зависимость подлежащих определению изотермических поверхностей. Дальнейшее упрощение задач достигается пренебрежением источниками тепла, обусловленными кристаллизацией внутриклеточной воды и кровотоком в замороженной биоткани, когда $p_0 = 0$ и отпадают условия сопряжения на поверхности криопоражения $\Phi_n(p,t) = 0$. Сама поверхность по решению двухфазной задачи Стефана определяется как изотерма криопоражения $\Phi_n(p,t) = \mathrm{T}(p,t) - \mathrm{T}_n = 0$. Приведем здесь упрощенные в таком плане постановки задач.

В случае плоского кругового аппликатора для $\mathrm{T} = \mathrm{T}(r,z,t)$ и $\Phi^*(r,z,t) = z - z^*(r,t) = r - R^*(z,t) = 0, r > 0, t > 0$ получаем двухфазную задачу Стефана.

Плоско – параллельное поле возникает также, когда охлаждающей является достаточно длинная цилиндрическая поверхность. Как и в первом случае, для определения двухмерного температурного поля биоткани $\mathrm{T} = \mathrm{T}(r,\varphi,t)$ и поверхностей:

$$\begin{aligned}
&\Phi_n(r,\varphi,t) = r - R^n(\varphi,t) = \varphi - \Phi^n(r,t) = 0,\\
&\Phi^*(r,\varphi,t) = r - R^*(\varphi,t) = \varphi - \Phi^*(r,t) = 0,\\
&\Phi_{\mathrm{B}}(r,\varphi,t) = r - R^{\mathrm{B}}(\varphi,t) = \varphi - \Phi^{\mathrm{B}}(r,t) = 0
\end{aligned}$$

получаем нестационарную пространственно – локализованную задачу Стефана.

При $t \to \infty$ приходим к соответствующей более простой постановке стационарной задачи Стефана.

Если охлаждающая поверхность криоинструмента представляет собой круг или полусферу, что наиболее часто встречается в криохирургической практике, то температурное поле в биоткани обладает осевой симметрией, и, следовательно, зависит тоже от двух пространственных координат. В цилиндрической системе координат — φ,r и z, в сферической от r и Θ. Воспользовавшись выражениями для градиента в цилиндрической $grad\mathrm{T} = \mathrm{T}_r\vec{I}_1 + r^{-1}\mathrm{T}_\varphi\vec{I}_2 + \mathrm{T}_z\vec{I}_3$ и сферической $\nabla\mathrm{T} = \mathrm{T}_r\vec{I}_4 + r^{-1}\mathrm{T}_\Theta\vec{I}_2 + (r\sin\Theta)^{-1}\,\mathrm{T}_\varphi\vec{I}_3$, системах координат, получаем выражения для нормали к изотермической поверхности $\Phi\left(r,z,t\right) = \Phi\left(r,\Theta,t\right)$ ее кажущейся скорости в направлении нормали $v_n = -\Phi_t/\left|\nabla\Phi\right|$ и производной ${}^{\partial\mathrm{T}}\!/_{\partial n} * (\nabla\mathrm{T},\vec{n})$.

В случае плоского кругового аппликатора температурное поле можно рассматривать как в цилиндрической $\mathrm{T} = \mathrm{T}\left(r,z,t\right)$, так и в сферической $\mathrm{T} = \mathrm{T}\left(r,\Theta,t\right)$ системах координат. Если же охлаждающая поверхность представляет собой полусферу радиуса r_0, то предпочтительной является сферическая система координат, так как поверхность биоткани совпадает с координатными поверхностями $r = r_0, 0 \leqslant \Theta \leqslant {}^{\pi}\!/_2$ и $\Theta = {}^{\pi}\!/_2$ и $r_0 \leqslant r \leqslant R^{\mathrm{B}}\left({}^{\pi}\!/_2, t\right)$.

В случае полусферической охлаждающейся поверхности криозонда приходим к двухфазной задаче Стефана относительно $\Phi^*\left(r,\Theta,t\right) = r - R^*\left(\Theta,t\right) = \Theta - \Theta^*\left(r,t\right) = 0, r > r_0, 0 < \Theta < {}^{\pi}\!/_2:$

Дальнейшее упрощение задач связано с переходом от неограниченных областей $z > 0\left(r > r_0, 0 < \Theta < {}^{\pi}\!/_2\right)$ к квадрату $0 < r,z < d$ и сектору $r_0 < r < a, 0 < \Theta < {}^{\pi}\!/_2$. С определенной погрешностью условия регулярности на бесконечности при достаточно больших значениях d и a можно заменить краевыми условиями Дирихле или Неймана.

Последняя, очевидно, равна нулю в случае пространственно – локализованных задач Стефана, если d и a превосходят максимальный размер установившейся стационарной зоны теплового возмущения биоткани, вне которой температурное поле постоянно $\mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}} = 36.7^0 C$.

Для определения пары функций $\mathrm{T}\left(p\right)$ и $\Phi^*\left(p\right)$ получаем соответствующие стационарные задачи Стефана в случае кругового аппликатора и в случае полусферического аппликатора.

Вводя в рассмотрение относительную температуру $U = \left(\mathrm{T} - \mathrm{T}^*\right)/\left(\overline{\mathrm{T}} - \mathrm{T}^*\right)$ и переходя к безразмерным независимым и зависимым величинам и параметрам $z = I_{\mathrm{X}}, t = I_{\Upsilon}, y_0 = I_0/I, b = d/I, y_1 = a/I$, где I - характерный линейный размер, нестационарные задачи осесимметричной криодеструкции биоткани преобразуются к виду:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{y}\tfrac{\partial}{\partial y}\left(y\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \tfrac{\partial \mathrm{E}(u)}{\partial \tau} = -F\left(u\right), 0 < x,y < b, \tau > 0,\\
&u\left(x,y,0\right) = 1, 0 < x,y < b,\\
&\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{\partial x} - h\left(y\right)\left[u - u_c\left(y,\tau\right)\right] = 0, x = 0, 0 < y < b, \tau > 0,\\
&\tfrac{\partial u}{\partial x} = 0, y = 0, 0 < x < b, \tau > 0,\\
&u\left(b,y,\tau\right) = u\left(x,b,\tau\right) = 1, 0 < x,y < b, \tau > 0;\\
&\tfrac{1}{y^2}\tfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{y^2\sin\Theta}\tfrac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{\partial\Theta}\right) - \tfrac{\partial \mathrm{E}(u)}{\partial \tau} = -F\left(u\right),\\
&u\left(y,\Theta,0\right) = 1, y_0 < y < y_1, 0 < \Theta < {}^{\pi}\!/_2, \tau > 0,\\
&\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{\partial y} - h_{\mathrm{A}}\left[u - u_{\mathrm{A}}\left(\tau\right)\right] = 0, y = y_0, 0 < \Theta < {}^{\pi}\!/_2, \tau > 0,\\
&\gamma\left(u\right)\tfrac{\partial u}{y\partial\Theta} + h_c u - 1 = 0, \Theta = \pi/2, y_0 < y < y_1, \tau > 0,\\
&\tfrac{\partial u}{\partial\Theta} = 0, \Theta = 0, y_0 < y < y_1, \tau > 0.
\end{aligned}
$$

В такой постановке задач Стефана поверхности фазового перехода вода-лед $\Phi^*\left(x,y,\tau\right) = x - \mathrm{X}^*\left(y,\tau\right) = y - y^*\left(x,\tau\right) = 0$ и $\Phi^*\left(y,\Theta,\tau\right) = y - \Upsilon^*\left(\Theta,\tau\right) = \Theta - \Theta^*\left(y,\tau\right) = 0$ отражены посредством кусочно-линейной зависимости относительно удельной тепловой энергии от относительной температуры $\mathrm{E}\left(u\right) = u + \left[p + (k-1)\,u\right]\eta\left(u\right)$. для их конструктивного определения служат условия сопряжения.

Окончательные канонические формы постановки задач осесиметричной криодеструкции биоткани достигаются с помощью преобразования Кирхгофа.

Определение стационарного температурного поля биоткани $\mathrm{T} = \mathrm{T}\,(r{,}z)$, порождаемого плоским круговым криозондом, приводит к решению задачи:

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-f\,(\psi)\,{,}0<y{,}x<\infty,\\
\frac{\partial\psi}{\partial x}-h\,(y)\left\{\left[1+\left(\gamma^{-1}-1\right)\eta\,(\psi)\right]\psi-u_c\,(y)\right\}=0{,}x=0{,}0<y<\infty,\\
\frac{\partial\psi(x{,}0)}{\partial y}=0{,}0<x<\infty,\lim\,(\psi-\gamma)=0,\\
\psi\left[\mathrm{X}^*\,(y)\,{,}Y\right]=\psi\left[y{,}Y^*\,(x)\right]=0,
\end{array}
$$

где

$$
\begin{array}{l}
f\,(\psi)=W\left(1-\gamma^{-1}\,(\psi)\left[\eta\,(\psi-\eta\,(\psi)-\gamma)\right]\right);h\,(x)=h_{\mathrm{A}}+(h_c-h_{\mathrm{A}})\,\eta\,(x-x_0)\,;\\
u_c\,(y)=u_{\mathrm{A}}+(1-u_{\mathrm{A}})\,\eta\,(x-x_0)\,;u=\left[1-\left(\gamma^{-1}-1\right)\eta\,(\psi)\right]\psi;\\
\mathrm{T}=\mathrm{T}^*+\left(\overline{\mathrm{T}}-\mathrm{T}^*\right)u;z=Ix{,}r=Iy.
\end{array}
$$

С помощью функции Грина задача сводится к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению [19]. К нему необходимо присоединить условие для поверхности раздела фаз $\psi\left[\mathrm{X}^*\,(y)\,{,}Y\right]=0$ или $\psi\left[x{,}Y^*\,(x)\right]=0$. Для функции $\chi\,(y{,}x)=\gamma-\psi\,(y{,}x)$ получаем интегральное уравнение.

Так как процесс замораживания биоткани направлен, то температура T, а, следовательно, U и Ψ являются монотонными функциями одной из координат при фиксированном значении другой координаты и времени. Это позволяет с помощью обратного преобразования перейти от задачи определения температурного поля к задаче Стефана для поля изотерм.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В КРИОХИРУРГИИ

В различных областях современной медицины применяются полусферические аппликаторы. Определение динамики порождаемого ими в биологической ткани температурного поля приводит к решению следующей двумерной нестационарной задачи со свободными границами типа Стефана [2, 6]:

$$
\begin{array}{l}
\Delta u-k(u)u_t=f(u),y_0<y<y_1(x{,}t),0<x<1,t>0,\\
u(y{,}x{,}0)=0,y=y_0,0<x<1,(y_1(x{,}0)=y_0),\\
\frac{\partial u}{\partial n}=H(p)[v(u)-v_0],x=0,y_0<y<y_1(x{,}t),t>0,\\
u=0,\frac{\partial u}{\partial n}=0,x=1,y_0<y<y_1(x{,}t){,}t>0,\\
[u]=0,y=y*,[\frac{\partial u}{\partial n}]_{y=y*}=py_t^*,t>0,
\end{array}
\tag{1}
$$

где $\Delta u=y^{-2}(y^2u_y)_y+y^{-2}[(1-x^2)u_x]_x$ - осесимметричная часть оператора Лапласса в сферической системе координат $y,\varphi{,}\Theta=\arccos x$.

В задаче (1) искомыми являются функции $u=u(y{,}x{,}t),y_0\leqslant y\leqslant y_1(x{,}t),0<x<1,t>0$; $u=u*(x{,}t),0<x<1,t>0$; $y_1=y_1(x{,}t),0<x<1,t>0$. Остальные числовые параметры $k,\gamma,\beta,u*$ и функции $H(p),v_c(y{,}x{,}t)$; $k(u)=k+(1-k)\eta(u-u*)$, $f(u)=u^\beta\eta(u-u*)$, $v(u)=u+[1+\gamma(u-1)]\eta(u-u*)$; $\eta(u)$ — функция Хевисайда известны.

В реальных ситуациях, когда коэффициент теплообмена с окружающей средой $H(p)=\varepsilon(y)<<1$ решение задачи (1) можно искать в виде:

$$
u=\sum\nolimits_{n=0}^{N}u_n\varepsilon^n,y*=\sum\nolimits_{n=0}^{N}y_n^*\varepsilon^n,N>>1.
\tag{2}
$$

Если подставить (2) в (1) и еще приравнять коэффициенты при ε^0, приходим к сферически-симметричной одномерной задаче Стефана относительно пары функций $u_0=u_0(y{,}t)$ и $y_0^*=$

$y*(t)$, а также получаем двумерную линейную задачу на сопряжение на уже известной полуокружности $y = y*(t)$.

Формально полученные в задаче условия сопряжения корректны, второе из этих условий содержит дельта-функцию Дирака, несмотря на то, что, так как в силу четности $[\delta(y - y_0^*)]_{y_0^*} = 0$ и $[u_{0yy}]_{y_A^*} = [\widetilde{u_{0yy}}]_{y_A^*}$ Волнистая черта в условии означает обычную не обобщенную функцию, для которой справедливо равенство.

Из уравнения нулевого приближения получаем:

$$[u_{0y_0^*}] = 0, [u_{0y}] = -Py_{0t}^*, y_0^* = y_0^*(t), t > 0,$$

$$u_{0yy} = \begin{cases} -2y^{-1}u_{0yy} + ku_{0t}, y < y_A^*, \\ -2y^{-1}u_{0y} + u_{0t}, y > y_0^*. \end{cases}$$

Из которого следует, что $[u_{0yy}]_{y_A^*} = 2Py_0^{*-1}y_{0t}$.

В случае, когда $t \to \infty, u(x,y,t) \to u(x,y)$, а $y*(x,t) \to y*(x)$ получаются более простые двумерные стационарные задачи Стефана, вытекающие из задачи .

Нулевое приближение. После асимптотического разложения при $\varepsilon(y) << 1$:

$$u = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k, \varepsilon = \varepsilon(y) << 1, u_k = u_k(x,y), N \geqslant 1, \tag{3}$$

уравнение нулевого приближения u_0 имеет вид:

$$\begin{array}{l} Lu_0 = y^{-2}(y^2u_{0y})_y + y^{-2}[(1-x^2)u_{0x}]_x + f(u_0) = 0, \underline{y} < y < \overline{y}, 0 < x < 1, \\ u_{0y} = h(u_0 - u_A), y = \underline{y}, \\ y^{-1}u_{0x} = 0, x = 0, u_0 < \infty, x = 1, \underline{y} < y < \overline{y}. \end{array} \tag{4}$$

Так как решение задачи (4) не зависит от x, то для определения $u_0(y)$ получаем одномерную стационарную задачу Стефана.

С введением координаты изотермы замораживания $y = y*(u_0(y*) = 0)$ стационарная задача записывается в виде:

$$\begin{array}{l} y^{-2}(y^2u_0')' = 0, \underline{y} < y < \overline{y}*, \\ y^{-2}(y^2u_0')' + u_0^{\beta} = 0, y* < y < \overline{y}, \\ u_0'(y) = h(u_0 - u_A), u_0(\overline{y}) = 1, \\ [u]_{y*} = 0, [u']_{y*} = 0, \end{array} \tag{5}$$

где знак $[\,]_{y*}$ означает скачок стоящей под ним функции в точке y^*.

Используя общее решение дифференциального уравнения задачи (19) в замороженной биологической ткани $c_1 + (c_2/y)$ и в незамороженной биологической ткани $1 + c_3e^{-y}/y$, после удовлетворения краевым условиям и условиям сопряжения задачи (5) получаем систему нелинейных уравнений относительно c_1, c_2, c_3 и y^*. Разрешив последнюю, находим точное решение задачи (5):

$$u_0(y) = \begin{cases} \underline{u_0}(1 - \frac{y*}{y}\frac{y-\underline{y}}{y*-\underline{y}}), \underline{y} \leqslant y \leqslant y*, \\ \Delta^{-1}(y*)(1 - \frac{y*}{y}e^{(y*-y)}), y* \leqslant y \leqslant \overline{y}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\Delta(y*) = 1 - y*e^{(y*-\overline{y})/\overline{y}}, \tag{7}$$

$$\frac{y*}{(\underline{y} - y*)}u_0 = h(u_0 - u_A). \tag{8}$$

Из (8) следует:

$$\underline{u_0} = \frac{\underline{y}(y* - \underline{y})h}{y* + \underline{y}(y* - \underline{y})h}u_A. \tag{9}$$

$$\frac{y}{y*(\underline{y}-y*)}\underline{u_0}=\Delta^{-1}(y*)(1+\frac{1}{y*}). \tag{10}$$

Из (10) следует:

$$\underline{u_0}=\frac{(1+y*)(\underline{y}-y*)}{\underline{y}\Delta(y*)}, \tag{11}$$

а y^* определяется как положительный корень уравнения:

$$y*^2\,(1+h\underline{y})+y*[1+\underline{y}(1-\underline{y})h]-\underline{y}^2h[1-\frac{u_A\Delta}{y*}]=0, \tag{12}$$

В частности, в случае, когда $\underline{y}=\infty, \Delta(y*)=1$ уравнение (11) вырождается в квадратное с единственным положительным корнем.

В этом случае из уравнения общего баланса тепловой энергии следует:

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{\underline{y}}^{\infty}Lu_0y^2dy=\int_{\underline{y}}^{y*}Lu_0y^2dy+\int_{y*}^{\infty}Lu_0y^2dy=\\&=y^2\,u_{0y}|_{\underline{y}}^{y*}+y^2\,u_{0y}|_{y*}^{\infty}+\textstyle\int_{y*}^{\infty}f(u_0)y^2dy=0.\end{aligned} \tag{13}$$

с учетом краевого условия и точного решения (11), находим:

$$\underline{y}^2h(u_0-u_A)=y*^2+y^*\to\underline{u_0}=u_A+y*(1+y*)/(\underline{y}^2h). \tag{14}$$

По физическому смыслу $y*\geqslant\underline{y}$, что достигается при следующем ограничении на h:

$$h\geqslant(1+\underline{y})/(\underline{\underline{y}|u_A|}). \tag{15}$$

В общем случае уравнение теплового баланса записывается в виде:

$$y^2h(u_0-u_A)=(y*^2+y*)\Delta^{-1}(y*)+\frac{1}{3}(\underline{y}^3-y*)[1-\Delta^{-1}(y*)]. \tag{16}$$

Из (16) следует:

$$\underline{u_0}=u_A+\frac{(y*^2+y*)\Delta^{-1}(y*)+\frac{1}{2}(\overline{y}^2-y*)[(1-\Delta^{-1}(y*)]}{\underline{y}^2h}. \tag{17}$$

Уравнения первого приближения. Предварительно разложив функцию $f(u_0+\varepsilon u_1)$ в ряд Тейлора и собирая коэффициенты при ε, для определения $u_1(x,y)$ получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}&L_1u_1=y^{-2}(y^2u_{1y})_y+y^{-2}[(1-x^2)u_{1x}]_x-\\&-u_1\eta(u_0)+f(u_0)u_1=0,\underline{y}<y<\overline{y},0<x<1;\\&u_{1y}=hu_1+f(u_0)u_1,\underline{y}<y<\overline{y},0<x<1;\\&y^{-1}u_{1x}=[\gamma(u_c)-\gamma(\underline{u_0})],x=0;\\&u_0(y*)=0,\delta(u_0(y))=\tfrac{\delta(y-y*)}{u_0'(y*)}=\tfrac{y*\delta(y-y*)}{1+y*}.\end{aligned} \tag{18}$$

В каждой из подобластей биологической ткани $y<y*$ и $y>y*$ получаем уравнения:

$$y^{-1}(y^2u_{1y})_y+y^{-2}[(1-x)u_{1x}],\underline{y}<y<y*,$$

$$y^{-1}(y^2u_{1y})_y+y^{-2}[(1-x^2)u_{1x}]_x-f(u_0)\varepsilon u_1=0,y*<y<\overline{y} \tag{19}$$

с краевыми условиями

$$y^{-1}u_{1x}=\gamma(u_c)-u_0,x=0,\underline{y}<y<y* \tag{20}$$

и условиями сопряжения при $y = y^*$

$$[u_1]_{y*} = 0, [u_{1y}]_{y*} = \frac{y * u_1(x,y*)}{1 + y*}, 0 < x < 1, \tag{21}$$

где $\gamma(u_c) = u_c + (\gamma u_c - u_c)\eta(u_c)$.

В частном случае $\beta = 0$, когда $f(u) = u^\beta = 1$, правая часть уравнения (1) линейна. Для такого оператора задачи (1) имеет место вторая формула Грина.

Функцию Грина, определяем как решение краевой задачи:

$$\begin{array}{l} L_1 G = y^{-2}(y^2 G_y)_y + y^{-2}[(1 - x^2)G_x]_x - G[\eta(y - y*) - \frac{y*\delta(y-y*)}{1+y*}] = \\ = -\delta(y - \eta)\delta(x - \xi), \underline{y} < y < \overline{y}, 0 < x,\xi < 1, \\ G_y = hG, y = \underline{y}, G = 0, y = \overline{y}, 0 < x < 1, \\ y^{-1}G_x = 0, x = 0, \underline{y} < y < \overline{y}. \end{array} \tag{22}$$

При $u = u_1(x,y), \varphi = G$ получаем интегральное представление:

$$\begin{array}{l} u_1(\xi,\eta) = -\int\limits_{\underline{y(\xi)}}^{y*(\xi)} G(y;\xi,\eta)[\gamma(u_c(y)) - u_0(y)]ydy- \\ -\int\limits_{y*(\xi)}^{\overline{y(\xi)}} G(y;\xi,\eta)[\gamma[\gamma(u_c(y) - u_0(y)]ydy]. \end{array} \tag{23}$$

Используя оставшиеся краевые условия:

$$u_1(\xi,y*(\xi)) = 1, u_1(\xi,\overline{y(\xi)}) = 0. \tag{24}$$

определяем неизвестные функции $y* = y*(\xi)$ и $\overline{y} = \overline{y(\xi)}$, которые содержатся в полученном интегральном представлении (24).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования методов и биологических результатов криохирургического воздействия значительно улучшили понимание процесса замораживания в тканях и сделали криохирургию мощным медицинским методом лечения. Однако если криохирургия станет точной и контролируемой формой терапии, то конструкцию криозондов и расчет режимов замораживания следует осуществлять в направлении получения необходимой температурной среды для обеспечения максимальной смертности клеток, а не усовершенствования холодного наконечника.

Для определения температурного поля и трех изотермических поверхностей в работе получена нестационарная задача Стефана. В работе также получены канонические формы постановки задач осесиметричной криодеструкции биоткани, а также проведено асимптотическое интегрирование двумерных осесимметричных задач со свободными границами в криохирургии.

Результаты работы представляют теоретический интерес для специалистов, занимающиеся моделированием различных процессов, связанных с фазовыми переходами.

Применение полученных результатов представляет также значительный практический интерес для анализа и оптимизации эффективности криохирургической деструкции биологической ткани, а также для количественного уточнения динамики развития зоны замораживания биологической ткани.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, К. Е. Разработка пакета прикладных программ “AKORD” для решения задач со свободными границами / К. Е. Афанасьев, Г. Г. Коротков, Р. Р. Долаев // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 5, № 1. — С. 5–18.

2. Березовский, А. А. Двумерные модели криодеструкции биоткани / А. А. Березовский // Мат. моделирование физических процессов. Сб. научных трудов. — 1989. — С. 14–38.

3. Бородин, С. Л. Численные методы решения задач Стефана / С. Л Бородин // Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2015. — Т. 1, № 3(3). — С. 165–177.

4. Йоханссон, Б. Т. Метод граничних інтегралів для чисельного розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа / Б. Т. Йоханссон, Р. Чапко // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 12. — С. 1665–1682. [Электронный ресурс]. — URL:
http://umj.imath.kiev.ua/volumes/issues/?lang=ua&year=2016&number=12

5. Игнатьев, А. О. Границы периодов периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений / А. О. Игнатьев // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 11. — С. 1569–1573. [Электронный ресурс]. — URL:
http://umj.imath.kiev.ua/volumes/issues/?lang=ua&year=2015&number=11

6. Кудаева, Ф. Х. Двумерные задачи со свободными границами / Ф. Х. Кудаева, А. А. Кайгермазов // Южно-Сибирский научный вестник: науч.-техн. журн. — 2014. — № 3(7). — С. 16–19.

7. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера / Т. Ф. Мамедова, Д. К. Егорова, Е. В. Десяев, Р. Хесс // Вестник Мордовского университета. — 2016. — Т. 26, № 4. — С. 440–447.

8. Нестеров, П. Н. Асимптотическое интегрирование одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений / П. Н. Нестеров // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2013. — № 1(3). — С. 137–145.

9. Онишкова, А. М. Численное исследование двумерной задачи со свободной границей / А. М. Онишкова // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2013. — Вып. 1(138).

10. Petrova, A. G. Phase Front Perturbations in Unsaturated Soils under the Rainwater Infiltration / A. G. Petrova, N. P. Moshkin, A. F. Zhirkov // Известия Алтайского Госуниверситета. — 2015. — № 1–1 (85). — P. 4–7.

11. Формалев, В. Ф. О задаче типа Стефана с двумя нестационарными подвижными границами фазовых превращений / В. Ф. Формалев, Л. Н. Рабинский // Известия Российской Академии наук. Энергетика. — 2014. — № 4. — С. 74–81.

12. Alphonse, A. A Stefan problem on an evolving surface / A. Alphonse, C. M. Elliott [Электронный ресурс]. — URL:
www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4535267.

13. Antontsev, S. Free A. Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions. Interfaces and Free Boundaries / S. Antontsev, A. Meirmanov, B. V. Yurinsky. — 2000. — № 2. — P. 413–424.

14. Balasubramanian, S. K. Membrane hydration correlates to cellular biophysics during freezing in mammalian cells / S. K. Balasubramanian, W. F. Wolkers, J. C. Bischof // Biochim. Biophys. Acta. — 2009. — № 1788. — P. 945–953.

15. Briozzo, A. C. One-Dimensional Nonlinear Stefan Problems in Storm's Materials / A. C. Briozzo, M. F. Natale // Mathematics. — 2014. — № 2(1). — P. 1–11.

16. Cryosurgery neuroepithelial brain tumors / S. Vasiliev, S. Pesnya-Prasolov, V. Krylov, S. Kungurtcev // Материалы конф. XV WFNS world congress of neurosurgery (Seoul, Korea, 08-13.09.2013). FA1184

17. Cryodestruction of brain tumors / S. Vasiliev et. al. // Материалы the 39th annual

meeting of the Japan society for low temperature medicine “Cryomedicine 2012” (Japan, Tokyo, 21-22.11.2012). — P. 43–44.

18. Methods for Characterizing Convective Cryoprobe Heat Transfer in Ultrasound Gel Phantoms / M. L. Etheridge, J. Choi, S. Ramadhyani, J. C. Bischof [Электронный ресурс]. — URL: www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4031449.

19. Kudaeva, F. H. Zweidimensionale eine planparallele problem kryochirurgie / F. H. Kudaeva, A. A. Kaigermazov, M. J. Maмbetov // European Applied Sciences. — 2014. — № 10. — P. 28–30.

20. Arifin, N. M. Marangoni-driven boundary layer flow in nanofluids / N. M. Arifin, R. Nazar, I. Pop // Proceedings of the 2010 international conference on theoretical and applied mechanics. Wisconsin, USA. — 2010. — P. 32–35.

21. Rabin, Y. Computerized planning of ctyosurgery using cryoprobes and cryoheates / Y. Rabin, D. C. Lung, T. F Stahovich // Technolog Cancer Res Treat. — 2004. — № 3(3). — P. 229–243.

22. Rabin, Y. Cryoheater as a means of cryosurgery control / Y. Rabin, T. F. Stahovich // Phys Med Biol. — 2003. — № 48(3). — P. 619–632.

23. Thaokar, C. Temperature Field Reconstruction for Minimally Invasive Cryosurgery With Application to Wireless Implantable Temperature Sensors and/or Medical Imaging / C. Thaokar, Y. Rabin [Электронный ресурс]. — URL: www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3529162.

24. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

25. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, М. Меач // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

REFERENCES

1. Afanasiev K.E., G.G. Korotkov, R.R. Dolaev Development of AKKORD application software package for solving problems with free borders. [Afanas’ev K.E., Korotkov G.G., Dolaev R.R. Razrabotka paketa prikladnyh programm “AKORD” dlya resheniya zadach so svobodnymi granicami]. *Vychislitel’nye tekhnologii — Computing technologies*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 5–18.

2. Berezovsky A.A. Two-dimensional models of cryodestruction of biological tissue. [Berezovskij A.A. Dvumernye modeli kriodestrukcii biotkani]. *Mat. modelirovanie fizicheskih processov. Sb. nauchnyh trudov — Math. modeling of physical processes. Collection of scientific papers*, 1989, pp. 14–38.

3. Borodin S.L. Numerical methods for solving Stefan problems. [Borodin S.L. CHislennye metody resheniya zadach Stefana]. *Vestnik TyumGU. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft’, gaz, energetika — Bulletin Of TSU. Physical and mathematical modeling. Oil, gas, energy*, 2015, vol. 1, no. 3(3), pp. 165–177.

4. Johansson B.T., Chapko R. Boundary integral method for numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation. [Johansson B.T., CHapko R. Metod granichnih integraliv dlya chisel’nogo rozv’yazuvannya zadachi Koshi dlya rivnyannya Laplasa]. *Ukr. mat. zhurn. — Ukr. Mat. journal*, 2016, vol. 68, no. 12, pp. 1665–1682 [Electronic resource]. URL:
http://umj.imath.kiev.ua/volumes/issues/?lang=ua&year=2016&number=12.

5. Ignatiev A.O. Period Boundaries of periodic solutions of ordinary differential equations. [Ignat’ev A.O. Granicy periodov periodicheskih reshenij obyknovennyh differencial’nyh uravnenij]. *Ukr. mat. zhurn. — Ukr. Mat. journal*, 2015, vol. 67, no. 11, pp. 1569–1573 [Electronic resource]. URL:
http://umj.imath.kiev.ua/ volumes/issues/?lang=ua&year=2015&number=11.

6. Kudayeva F.Kh., Kygermazov A.A. Two-dimensional problems with free boundaries.

[Kudaeva F.H., Kajgermazov A.A. Dvumernye zadachi so svobodnymi granicami]. *YUzhno-Sibirskij nauchnyj vestnik: nauch.-tekhn. zhurn. — South Siberian Scientific Bulletin: scientific and technical journal*, 2014, no. 3(7), pp. 16–19.

7. Mamedova T.F., Egorova D.K., Desjaev E.W., Khess R. Asymptotic integration of Emden-Fowler type differential equations. [Mamedova T.F., Egorova D.K., Desyaev E.V., Hess R. Asimptoticheskoe integrirovanie differencial'nyh uravnenij tipa Emdena-Faulera]. *Vestnik Mordovskogo universiteta — Bulletin of the Mordovian University*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 440–447.

8. Nesterov P.N. Asymptotic integration of one class of systems of functional differential equations. [Nesterov P.N. Asimptoticheskoe integrirovanie odnogo klassa sistem funkcional'no-differencial'nyh uravnenij]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo — Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky*, 2013, № 1(3), pp. 137–145.

9. Oniskova A.M. Numerical study of two-dimensional problem with a free boundary. [Onishkova A.M. CHislennoe issledovanie dvumernoj zadachi so svobodnoj granicej]. *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki — Izvestiya yufu. Technical science*, 2013, iss. 1 (138), pp. 136–142.

10. Petrova A.G., Moshkin N.P., Zhirkov A.F. Phase Front Perturbations in Unsaturated Soils under the Rainwater Infiltration. [Petrova A.G., Moshkin N.P., Zhirkov A.F. Phase Front Perturbations in Unsaturated Soils under the Rainwater Infiltration]. *Izvestiya Altajskogo Gosuniversiteta — Proceedings Of The Altai State University*, 2015, no. 1–1 (85), pp. 4–7.

11. Formalev V.F., Rabinsky L.N. On a Stefan-type problem with two non-stationary mobile boundaries of phase transformations. [Formalev V.F., Rabinskij L.N. O zadache tipa Stefana s dvumya nestacionarnymi podvizhnymi granicami fazovyh prevrashchenij]. *Izvestiya Rossijskoj Akademii nauk. Energetika — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Energetika*, 2014, no. 4, pp. 74–81.

12. Alphonse A.A., Elliott C.M. Stefan problem on an evolving surface [Electronic resource]. URL: www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4535267.

13. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B.V. Free A. Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions. Interfaces and Free Boundaries, 2000, no. 2, pp. 413–424.

14. Balasubramanian S.K., Wolkers W.F., Bischof J.C. Membrane hydration correlates to cellular biophysics during freezing in mammalian cells. Biochim. Biophys. Acta, 2009, no. 1788, pp. 945–953.

15. Briozzo A.C., Natale M.F. One-Dimensional Nonlinear Stefan Problems in Storm's Materials. Mathematics, 2014, no. 2(1), pp. 1–11.

16. Vasiliev S., Pesnya-Prasolov S., Krylov V., Kungurtcev S. Cryosurgery neuroepithelial brain tumors. WFNS world congress of neurosurgery (Seoul, Korea, 08-13.09.2013). FA1184.

17. Vasiliev S., Krylov V., Pesnya-Prasolov S., Zuev A., Vyatkin A., Galyan T., Kungurcev S., Pavlov V. Cryodestruction of brain tumors. Materials the 39th annual meeting of the Japan society for low temperature medicine "Cryomedicine 2012" (Japan, Tokyo, 21-22.11.2012), pp. 43–44.

18. Etheridge M.L., Choi J., Ramadhyani S., Bischof J.C. Methods for Characterizing Convective Cryoprobe Heat Transfer in Ultrasound Gel Phantoms. [Electronic resource]. URL: www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4031449.

19. Kudaeva F.H., Kaigermazov A.A., Maмbetov M.J. Zweidimensionale eine planparallele problem kryochirurgie. European Applied Sciences, 2014, no. 10, pp. 28–30.

20. Arifin N.M., Nazar R., Pop I. Marangoni-driven boundary layer flow in nanofluids. Proceedings of the 2010 international conference on theoretical and applied mechanics. Wisconsin, USA, 2010, pp. 32–35.

21. Rabin Y., Lung D.C., Stahovich T.F. Computerized planning of ctyosurgery using cryoprobes and cryoheates. Technolog Cancer Res Treat, 2004, no. 3(3), pp. 229–243.

22. Rabin Y., Stahovich T.F. Cryoheater as a means of cryosurgery control. Phys Med Biol,

2003, no. 48, pp. 619–632.

23. Thaokar C., Rabin Y. Temperature Field Reconstruction for Minimally Invasive Cryosurgery With Application to Wireless Implantable Temperature Sensors and/or Medical Imaging. [Electronic resource] URL: www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3529162.

24. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

25. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., M. Meach Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

Кудаева Фатимат Хусейновна, к.ф.-м.н., доцент, каф. ПМ и И, Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия
E-mail: kfatimat@yandex.ru

Kudayeva Fatimat Khuseynovna, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Associate Professor, Ph.D., Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russia
E-mail: kfatimat@yandex.ru

Кайгермазов Арслан Ахматович, к.ф.-м.н., доцент, каф. ПМ и И, Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия
E-mail: arslan1961@yandex.ru

Kaygermazov Arslan Akhmatovich, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Associate Professor, Ph.D., Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russia
E-mail: arslan1961@yandex.ru

Нагоров Аслан Львович, ст. преподаватель каф. ПМ и И, Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия
E-mail: cuba13@rambler.ru

Nagorov Aslan Lvovich, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russia
E-mail: cuba13@rambler.ru