УДК 517.9

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С. Л. СОБОЛЕВА В ПРОСТРАНСТВАХ В. В. СТЕПАНОВА

А. В. Костин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.

Аннотация. В настоящей работе теорема об операторе Лапласа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ переносится на случай пространств В.В. Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, которые содержат пространства $C(\mathbb{R}^n)$. Это существенно расширяет область определения этого оператора и класс корректно разрешимых связанных с ними задач.

В частности, показывается, что оператор Лапласа Δ, определенный во введенных здесь пространствах Соболева–Степанова является генератором C_0– полугруппы Гаусса–Вейерштрасса. Результаты применяются к вопросам исследования корректной разрешимости задачи для неоднородного полигармонического уравнения С. Л. Соболева в пространствах В. В. Степанова.

Ключевые слова: корректная разрешимость, производящий оператор полугруппы, полигармоническое уравнение, пространства Степанова, резольвента оператора, полугруппа Гаусса–Вейерштрасса.

ON THE CORRECT SOLVABILITY OF THE PROBLEM FOR S. L. SOBOLEV'S INHOMOGENEOUS POLYHARMONIC EQUATION IN V. V. STEPANOV SPACES

A. V. Kostin

Abstract. In this paper, the Laplace operator theorem in spaces $L_p(\mathbb{R}^n)$ is transferred to the case of V. V. Stepanov spaces $S_p(\mathbb{R}^n)$, which contain spaces $C(\mathbb{R}^n)$. This significantly expands the scope of the definition of this operator and the class of correctly solvable problems associated with them.

In particular, it is shown that the Laplace operator Δ defined in the Sobolev–Stepanov spaces introduced here is a generator of C_0–Gauss–Weierstrass semigroups. The results are applied to the study of the correct solvability of the problem for S. L. Sobolev's inhomogeneous polyharmonic equation in V. V. Stepanov spaces.

Keywords: correct solvability, generating semigroup operator, polyharmonic equation, Stepanov spaces, resolvent operator, Gauss-Weierstrass semigroup.

Пусть E — банахово пространство и A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(A) \subset E$. Для $f \in E$ исследуется корректная разрешимость задачи нахождения элемента $u \in D(A^N)$, $N = 1,2,\ldots$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{A}u = \sum_{m=0}^{N} a_m A^m u = f, \qquad a_m \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

В соответствии с Ж. Адамаром, это означает, что уравнение (1) должно быть однозначно разрешимо при любых $f \in E$, оператор $\mathbb{A}^{-1}$, определен на всех f из E и непрерывен, то есть справедливо неравенство $\|\mathbb{A}^{-1}f\|_E \leqslant M\|f\|_E$, где константа M не зависит от f.

В настоящей работе эти результаты применяются к решению задачи полигармонического уравнения С. Л. Соболева, где оператор A задан лапласианом

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i^2} \qquad (2)$$

в пространствах $S_p(\mathbb{R}^n)$ В. В. Степанова с нормой

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{K_n} |u(x+a)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

где K_n — единичный куб в R^n, с ребрами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$.

Известно (см. например [3], § 16), что дифференциальный оператор заданный дифференциальным выражением (2), в пространствах Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \qquad (3)$$

при каждом $p \in (1,\infty)$, задает эллиптический оператор Δ_p, являющийся генератором полугруппы класса C_0 в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Однако пространства $L_p(\mathbb{R}n)$ в сравнении с $L_p(\Omega)$, где Ω — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, теряют такое важное свойство, как вложение $L_p \subset L_r$ при $p > r$, и включение пространства ограниченных функций, в частности, констант.

В связи с этим возникает вопрос о конструктивном расширении класса $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ таким образом, чтобы область определения оператора Δ содержала пространства $C^2(\mathbb{R}^n)$, с сохранением свойства производящего оператора (генератора C_0–полугруппы).

Настоящая заметка посвящена ответу на этот вопрос. Здесь теорема об операторе Лапласа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ переносится на случай пространств В. В. Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, которые содержат пространства $C(\mathbb{R}^n)$.

Показывается, что оператор Δ, определенный во введенных здесь пространствах Соболева–Степанова является генератором C_0–полугруппы Гаусса–Вейерштрасса.

1. C_0–ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Пусть A — генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geqslant 0$ класса C_0 в E.

Это значит, что область определения $D(A)$ оператора A плотна в E. Область его значений совпадает со всем E, а резольвентное множество содержит комплексную полуплоскость $Re\lambda > \omega$. Семейство $U(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$1)\, U(0) = I, \quad 2)\, U(t+s) = U(t)U(s), \quad 3)\, \lim_{t \to 0} \|U(t)x - x\| = 0, x \in E$$

$$4)\, \|U(t)\| \leqslant M \exp \omega t. \qquad (4)$$

Полугруппа $U(t)$ и резольвента $R(\lambda)$ связаны соотношением

$$R^n(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t t^{n-1} e^{-\lambda t} U(t) dt, \qquad (5)$$

$n = 1,2,\dots$ из которого следует оценка

$$\|R^n(\lambda,A)\| \leqslant M(Re\lambda - \omega)^{-n}, \qquad (6)$$

где константа M от n не зависит.

В соответствии с [4] для оператора A определены многочлены $P_n(A)u = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k u$, $u \in D(A^n)$, $a_m \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При этом, $D(A)$ плотна в E и спектр оператора $P_n(A)$ совпадает с множеством $P_n(\Lambda(A))$, где $\Lambda(A)$ — спектр оператора A [5], с. 125.

Следуя подходу В. П. Маслова, примененного в [6], с. 12 к операции $A = \frac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (1) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$. $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\quad a_n \neq 0$. Также как и в [6], с. 12, полином $P_n(x)$, отвечающий оператору $P_n(A)$ будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Из очевидного изоморфизма $K[A]$ и $K[x]$ следует, что каждому разложению $P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{k_i}$, $\qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = m$ соответствует представление $P_n(A) = a_n \prod_{i=1}^{m}(A-\alpha_i I)^{k_i}$, где α_i — корни полинома $P_n(x)$, k_i — их кратность, I — тождественный оператор.

Рассмотрим задачу (1), вводя следующие понятия:

Определение 1. *Решение задачи Коши*

$$P_n\left(-\frac{d}{dx}\right) q(x) = \delta(x), \tag{7}$$

$$q(0) = \frac{d}{dx} q(x)|_{x=0} = \dots = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} q(x)|_{x=0}, \tag{8}$$

где $\delta(x)$ — дельта функция, будем называть символом фундаментального решения для уравнения (1).

Применение преобразования Лапласа и формулы (2.37) из [1], с. 47 позволяют выписать его в виде

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p\to\alpha} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left[\frac{(p-\alpha_i)^{k_i}}{P_n(p)} e^{px} \right]. \tag{9}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A, то задача (1) равномерно корректна и для ее решения справедливо представление*

$$u = \int_0^\infty q(t) U(t) f dt. \tag{10}$$

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (1) следует из применения оператора $\mathbb{A}$ к элементу

$$u = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^{m} (A - \alpha_i I)^{-k_i} f = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^{m} (-1)^{k_i} R^{k_i}(\alpha_i, A) f, \tag{11}$$

I — тождественный оператор, а также из того, что ядро резольвенты генератора полугруппы класса C_0 состоит из одного нуля.

Таким образом, (11) дает единственное решение задачи (1). Далее, пользуясь (5) и (11), оценим

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{|a_n|} \int_0^\infty \underbrace{\dots}_{m} \int_0^\infty \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m}(k_i-1)!} e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} Re\alpha_i t_i} \|U(\sum_{i=1}^{m} t_i)\| dt_1 \dots dt_m \cdot \|f\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{|a_n|} \int_0^\infty \underbrace{\dots}_{m} \int_0^\infty \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m}(k_i-1)!} e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} (Re\alpha_i - \omega) t_i} dt_1 \dots dt_m \cdot \|f\| =$$

$$= \frac{M \cdot \|f\|}{|a_n| \prod_{i=1}^{m} (Re\alpha_i - \omega)^{k_i}}. \tag{12}$$

Для доказательства (10), применяя оператор $G(t)U(t)$ к равенству (1), и интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \int_0^\infty q(t)U(t)A^m u dt = \sum_{m=0}^{n} a_m \int_0^\infty q(t) \frac{d^m U(t)}{dt^m} u dt =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{m=0}^{n} (-1)^m a_m \frac{d^m q(t)}{dt^m} U(t) u dt = \int_0^\infty P_n \left(-\frac{d}{dt}\right) q(t)U(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \delta(t)U(t)udt = U(0)u = u = \int_0^\infty q(t)U(t)fdt,$$

что завершает доказательство теоремы.

2. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА–СТЕПАНОВА $W_p^l S_p(\mathbb{R}^m)$

Нам понадобятся следующие факты, являющиеся частными случаями результатов изложенных в [7], [13], [14].

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Как известно (см. [7]), в пространстве $W_p^l(\Omega)$ С. Л. Соболева функций $u(x) = u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определенных на Ω и суммируемых на этом множестве со степенью $p \geqslant 1$ вместе со всеми производными до порядка l включительно, можно ввести различные эквивалентные нормы. Из которых мы используем

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|D^l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{13}$$

где

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$D^l u(x) = \sum_{l_1+\cdots+l_n=l} \left(\frac{\partial^l u(x)}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}\right). \tag{14}$$

Теорема 2. *(Соболев) Если $0 \leqslant m \leqslant l$ и $l_p \leqslant n$, то справедливо вложение $W_p^l(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$ и выполняется неравенство*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leqslant C_1 \|u\|_{W_p^l(\Omega)}, \tag{15}$$

где константа C_1 зависит лишь от диаметра множества Ω и параметров m,l,p.

Из этой теоремы, в частности, при $m = 0$ (см. [7], с. 75) следует, что если $n \geqslant lp$, то справедливо вложение $W_p^l(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_2 \|u\|_{W_p^l(\Omega)}. \tag{16}$$

Определение 2. *(см. [5], с. 99). Обозначим через $S_p(\mathbb{R}^n)$ множество локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций $u(x)$, для которых конечна норма*

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{K_n} |u(x+a)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1). \tag{17}$$

Очевидно, что при $n = 1$ они совпадают с классическими пространствами Степанова $S_p(\mathbb{R}^1)$ (см. [6], с. 197, [16], [17]).

$S_p(\mathbb{R}^n)$ — пространства являются банаховыми.

Замечая, что нормы (17) не обладают свойством непрерывности в целом, в том смысле, что для них, вообще говоря, не выполняется предельное соотношение

$$\lim_{h\to 0}\|u(x+h)-u(x)\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}=0, \tag{18}$$

мы будем рассматривать подпространство $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)\subset S_p(\mathbb{R}^n)$, как множество функций $u\in S_p(\mathbb{R}^n)$ для которых справедливо соотношение (18).

Известно (см. [5], с. 110), что эти пространства являются банаховыми. Они получаются замыканием класса $C(\overline{\mathbb{R}}^n)$ равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций.

Определение 3. *Функцию $u\in S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ будем называть S_p — равномерно непрерывной и ограниченной функцией. Множество $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ будем называть пространством S_p — равномерно непрерывных и ограниченных функций.*

Далее, используя нормы пространств $W_p^l(\Omega)$ введем

Определение 4. *Множество локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$ со степенью $p\geqslant 1$ функций $u(x)$ вместе со всеми производными до порядка l включительно и для которых конечна норма*

$$\|u\|_{W^lS_p(\mathbb{R}^n)}=\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|T_au\|_{W_p^l(K_n)}=\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|u\|_{W_p^l(K_{n,a})} \tag{19}$$

будем называть функциональными пространствами Соболева–Степанова и обозначать $W^lS_p(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом пространства $W^lS_p(\mathbb{R}^n)$ являются линейными и нормированными с нормой (3).

Лемма 1. *Пространства $W^lS_p(\mathbb{R}^n)$ являются банаховыми.*

Для доказательства воспользуемся утверждением приведенным в [11], с. 103, о том, что если $f(\sigma)$ векторнозначная функция, заданная на некотором абстрактном множестве $\mathfrak{G}$, со значениями в банаховом пространстве E является сильно измеримой на $\mathfrak{G}$ и $\|f(\sigma)\|_E$ ограничена всюду, за исключением некоторого множества меры нуль, то множество таких функций образует банахово пространство $L_\infty(\sigma,E)$ с нормой $\|f\|_\infty = vrai\sup\limits_{\sigma\in\mathfrak{G}}\|f(\sigma)\|_E$. Если $\|f(\sigma)\|_E$ непрерывна, то $\|f\|=\sup\limits_{\sigma\in\mathfrak{G}}\|f(\sigma)\|_E$, а $L_\infty(\sigma,E)$ переходит в $C(\sigma,E)$.

В нашем случае, полагая $\mathfrak{G}=\mathbb{R}^n$, $E=W_p^l(K_n)$, получаем доказательство леммы.

Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Если $0\leqslant m<l$ и $l_p\leqslant n$, то справедливо вложение $W^lS_p(\mathbb{R}^n)\subset W^mS_p(\mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство*

$$\|u\|_{W^lS_p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_3\cdot\|u\|_{W^lS_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{20}$$

где константа C_3 зависит лишь от m,n,l,p.

Для доказательства достаточно применить неравенство (6) для каждого куба $K_{n,a}$

$$\|u\|_{W^lS_p(K_{n,a})}\leqslant C_4\cdot\|u\|_{W^lS_p(K_{n,a})}, \tag{21}$$

а затем, учитывая, что диаметры кубов $K_{n,a}$ от a не зависят, перейти в (21) к sup по $a\in\mathbb{R}^n$.

Отметим, что как и в случае следствия к теореме 2 из (21) при $m=0$ следует вложение $W^lS_p(\mathbb{R}^n)\subset S_p(\mathbb{R}^n)$ и неравенство

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_5\cdot\|u\|_{W^lS_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{22}$$

Однако этот результат можно усилить, так как справедлива

Лемма 2. *Если выполняется неравенство $l \cdot p \leqslant n$, то имеет место вложение $W^l S_p(\overline{\mathbb{R}}^n) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$.*

Для доказательства этого факта воспользуемся формулой конечных приращений (см. [2], с. 248)

$$u(x+h) - u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x_i + \Theta h_i)}{\partial x_i} \cdot h_i, \tag{23}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $0 < \Theta < 1$.

Отсюда, пользуясь инвариантностью нормы в $S_p(\mathbb{R}^n)$ относительно сдвига $T_a u(x) = u(x + a)$ функции $u(x)$, из (23) получаем неравенство

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |h_i| \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{24}$$

Далее, учитывая, что вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset W^1 S_p(\mathbb{R}^n)$ дает оценку $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant M_i$, применяя которую в (23), получаем выполнение условия (17). Это доказывает лемму.

3. ПОЛУГРУППА ГАУССА–ВЕЙЕРШТРАССА В ПРОСТРАНСТВАХ $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$

Здесь мы будем изучать в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ интеграл вида

$$u(t,x) = (U(t)\varphi)(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} \varphi(s) ds =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \varphi(x+\xi) d\xi, \tag{25}$$

здесь $t > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $ds = ds_1, \ldots, ds_n$.

В [4] доказывается следующая

Теорема 4. *Операторы $U(t)$, заданные выражением (25) и условием*

$$U(0)\varphi = \varphi \tag{26}$$

отображают пространство $S_p(\overline{\mathbb{R}})^n$ в себя и образуют полугруппу класса C_0 в этих пространствах.

Эту полугруппу будем называть полугруппой Гаусса–Вейерштрасса.

Используя теорему 4, докажем следующие факты:

Лемма 3. *Вложение $W^l S_p(\overline{\mathbb{R}}^n) \subset S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ является всюду плотным.*

Доказательство. Для $f \in S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ рассмотрим семейство функций

$$f_\varepsilon(x) = U(\varepsilon) f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} * f(x).$$

В силу лемм 3.1 и 3.3. $f_\varepsilon \in W^l S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$. Далее, учитывая сильную непрерывность в нуле полугруппы $U(t)$, получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f_\varepsilon\|_{S_p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|f - U(\varepsilon) f\|_{S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)} = 0. \tag{27}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пространство* $W^l S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ *является замкнутым множеством* $C^l(\overline{\mathbb{R}}^n)$ *в нормах* $W^l S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

Доказательство. Также как и в случае леммы 3 доказательство следует из того, что $f_\varepsilon = U(\varepsilon)f \in C^l(\overline{\mathbb{R}}^n)$ и сильной непрерывности полугруппы $U(t)$ в нуле.

4. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ ГАУССА–ВЕЙЕРШТРАССА

Применим полученные результаты для определения оператора Лапласа в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$, как производящего оператора Гаусса–Вейерштрасса в этом классе функций.

Теорема 5. *Оператор* A, *заданный дифференциальным выражением* $\Delta u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ *и областью определения* $D(A) = W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ *является генератором полугруппы Гаусса-Вейерштрасса в пространствах* $S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

Доказательство. Используя равенство

$$(\Pi_n(h)u)(x) - u(x) - \frac{h^2}{2}\Delta u(x) = \alpha(h,x) \cdot h^2, \tag{28}$$

где $\Delta u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$, функция $\alpha(h,x)$ такая, что при каждом $h_0 > h > 0$, $\alpha(h,x) \in S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$ и $\lim\limits_{h\to 0} \|\alpha(h,x)\|_{\overline{S}_p(\mathbb{R}^n)} = 0$ для $\varphi \in W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}}^n)$, оценим

$$\left|\frac{(U(t)\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n \cdot t} \cdot \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \left[(\Pi_n(\xi)\varphi)(x) - \varphi(x) - \frac{|\xi|^2}{2}\Delta u(x)\right] d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2(2\sqrt{\pi t})^n \cdot t} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \cdot |\xi|^2 \cdot |\alpha(\xi,x)| d\xi =$$
$$= \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mu|^2} \cdot |\mu|^2 \cdot |\alpha(2\sqrt{t}\mu,x)| d\mu. \tag{29}$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\left[\int_{K_{\overline{a}}} \left|\frac{(U(t)\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mu|^2} \cdot |\mu|^2 \cdot \left[\int_{K_a} |\alpha(2\sqrt{t}\mu,x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} d\mu, \tag{30}$$

здесь K_a — единичный куб, сдвинутый на произвольный вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Так как функция $|\alpha(\xi,x)|$ удовлетворяет условиям (21) и (22), то интеграл (30) абсолютно сходится и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое $N > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_N} e^{-|\mu|^2} \left[\int_{K_{\overline{a}}} |\alpha(2\sqrt{t}\mu,x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} d\mu < \varepsilon, \tag{31}$$

где $K_N \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса N с центром в нуле.

Разбивая интеграл в (30) на два

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_N} + \int_{K_N} \tag{32}$$

и замечая, что свойства функции $|\alpha(\xi,x)|$ позволяют перейти к пределу при $t \to 0$ под знаком интеграла и, следовательно при достаточно малом t_0 и всех $x_0 < t < t_0$, сделать его меньше ε, заключаем, с учетом (31), что

$$\lim_{t\to 0} \int_{K_{\overline{a}}} \left| \frac{U(t)\varphi - \varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x) \right|^p dx = 0.$$

Отсюда и леммы 1, следует равенство

$$\lim_{t\to 0} \int_{K_{\overline{a}}} \left\| \frac{(U(t) - I)\varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x) \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

для любой функции $\varphi \in W^2 S_p(\mathbb{R}^n)$.

Учитывая плотность вложения $W^2 S_p(\mathbb{R}^n) \subset \overline{S}_p(\mathbb{R}^n)$, заключаем, что определенный таким образом оператор Лапласа является производящим оператором в пространстве $\overline{S}_p(\mathbb{R}^n)$.

Теорема доказана.

5. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С. Л. СОБОЛЕВА

Полученные результаты применим к полигармоническому уравнению С. Л. Соболева. Покажем, что справедлива следующая

Теорема 6. *Если корни многочлена $P_N(\lambda) = \sum_{m=0}^{N} a_m \lambda^m$ удовлетворяют соотношению $Re\lambda_i > 0$, то уравнение*

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \Delta^m u = f, \tag{33}$$

при $f \in S_p(\mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $u \in S_p W^{2m}(\mathbb{R}^n)$, и для него справедлива оценка корректности

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}}{|a_N| \prod_{i=1}^{N} (Re\lambda_i)^{-k_i}} \tag{34}$$

Доказательство следует из оценки (4) дающее равенства $\omega = 0$, $m = 1$ при которых неравенство (9) переходит в (2).

Таким образом, в этом случае оператор $\mathbb{A}$, заданный выражением $\mathbb{A} = \sum_{m=0}^{N} a_m \Delta^m$ с областью определения $W^{2n} S_p(\mathbb{R}^n$ плотной в $S_p(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}$ с оценкой

$$\|\mathbb{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|a_N|} \prod_{i=1}^{N} (Re\lambda_i)^{k_i}. \tag{35}$$

Следствие 1. *Если многочлен $P_N(\lambda)$ имеет только действительные корни, то оценка (6.3) принимает вид*

$$\|\mathbb{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|P_N(0)|} = \frac{1}{|a_0|}. \tag{36}$$

6. ПРИМЕР

Для $f \in S_p(\mathbb{R}^n)$ найдем решение уравнения

$$(a_0 I - \Delta_n)^N u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, N = 1,2,\dots$$

Так как Δ_n является генератором полугруппы

$$V(t,\Delta_n)f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} f(s)ds \tag{37}$$

в $S_p(\mathbb{R}^n)$, то в силу теоремы 1 оператор $(a_0 I - \Delta_n)^{-N}$ имеет вид

$$u(x) = a_0 I - \Delta_n^{-1} f(x) = \int_0^\infty q(t) V(t,\Delta_n) f(s)ds, \tag{38}$$

где функция $q(t)$ является решением задачи

$$\left(\frac{dq}{dt} + a_0 q\right)^N \subset \delta(t), \quad q(0) = q'(0) = \dots = q^{N-1}(0) = 0, \tag{39}$$

которое имеет вид

$$q(t) = \frac{e^{-a_0 t} t^{N-1}}{N!}. \tag{40}$$

Подставляя (37) и (40) в (38), получаем решение задачи

$$u(x) = \frac{1}{N!} \int_0^\infty e^{-a_0 t} t^{N-1} \cdot \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} f(s)dsdt =$$

$$= \frac{1}{N!(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(s)ds \int_0^\infty e^{-a_0 t} t^{N-1-n/2} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} dt.$$

И после интегрирования под знаком интеграла, получаем

$$u(x) = \frac{1}{(N-1)!(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} 2 \left(\frac{|x-s|}{4a_0}\right)^{\frac{1}{2}(N-n/2)} K_{N-n/2}(\sqrt{a_0}|x-s|) f(s)ds, \tag{41}$$

где $K_\nu(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Замечание 1. Если $f(x) = \delta(x)$, то получаем фундаментальное решение для $(a_0 I - \Delta_n)^N = \delta$

$$E(x) = \frac{2}{(N-1)!(4\pi)^{n/2}} \cdot \left(\frac{|x|}{4a_0}\right)^{N-\frac{n}{4}} K_{N-n/2}(\sqrt{a_0}|x|). \tag{42}$$

Замечание 2. Формулы (41), (42) имеют смысл и при дробных N. Например, для $N = \alpha/2$ и $a_0 = 1$ формула (42) совпадает с формулой (1) [16], с. 396.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе теорема об операторе Лапласа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ переносится на случай пространств В. В. Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, которые содержат пространства $C(\mathbb{R}^n)$.

Показывается, что оператор Δ, определенный во введенных здесь пространствах Соболева–Степанова является генератором C_0–полугруппы Гаусса–Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

2. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

3. Функциональный анализ / под ред. С. Г. Крейна. — М. : Наука, 1979. — 418 с.

4. Костин, А. В. К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин. — Воронеж : Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007. — 259 с.

5. Костин, В. А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // ДАН. — 2013. — Т. 452. — С. 367–370.

6. Маслов, В. П. Операторные методы / В. П. Маслов. — М. : Наука, 1973. — 543 с.

7. Левитан, Б. М. Почти– периодические функции / Б. М. Левитан. — М. : Гос. изд-во. техн.–теорет. лит., 1953. — 396 с.

8. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 393 с.

9. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1974. — 887 с.

10. Соболевский, П. Е. Эллиптические и параболические операторы C_0 / П. Е. Соболевский // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 4. — С. 815–819.

11. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : Издательство иностранной литературы, 1962. — 829 с.

12. Шварц, Л. Анализ. Т. 1 / Л. Шварц. — М. : Мир, 1972. — 824 с.

13. Гальярдо, Э. Свойства некоторых классов функций многих переменных / Э. Гальярдо // Математика, сб. переводов. — 1961. — Т. 5:4. — С. 87–116.

14. Глушко, В. П. Неравенства для норм производных в пространствах L_p с весом / В. П. Глушко, С. Г. Крейн // Сиб. мат. журн. — 1960. — Т. 1, № 3. — С. 343–382.

15. Степанов, В. В. Об одном классе почти–периодических функций / В. В. Степанов // ДАН СССР. — 1949. — Т. LXIV, № 3. — С. 297.

16. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

REFERENCES

1. Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

2. Krein S.G. Linear differential equations in Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

3. Functional analysis. edited by S.G. Krein. [Funkcional'nyj analiz. pod redakciej S.G. Krejna]. Moscow: Nauka, 1979, 418 p.

4. Kostin A.V., Kostin V.A. On the theory of Stepanov functional spaces. [Kostin A.V., Kostin V.A. K teorii funkcional'nyh prostranstv Stepanova]. Voronezh: Publishing and Printing Center VSU, 2007, 259 p.

5. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operator method of Maslov–Heaviside and C_0–operator integral of Duhamel. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyj metod Maslova–Hevisajda i C_0–operatornyj integral Dyuamelya]. *DAN — DAN*, 2013, vol. 452, pp. 367–370.

6. Maslov V.P. Operator methods. [Maslov V.P. Operatornye metody]. Moscow: Nauka, 1973, 543 p.

7. Levitan B.M. Almost– periodic functions. [Levitan B.M. Pochti– periodicheskie funkcii]. Moscow: State Publishing House. tech.–theoretical lit., 1953, 396 p.

8. Sobolev S.L. Some applications of functional analysis in mathematical physics. [Sobolev S.L. Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike]. Moscow: Nauka, 1988,

393 p.

9. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas/ S.L. Sobolev. [Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnyh formul]. Moscow: Nauka, 1974, 887 p.

10. Sobolevsky P.E. Elliptic and parabolic operators C_0. [Sobolevskij P.E. Ellipticheskie i parabolicheskie operatory C_0]. *Doklady AN SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1988, vol. 298, no. 4, pp. 815–819.

11. Hille E., Phillips R. Functional analysis and semigroups. [Hille E., Fillips R. Funkcional'nyj analiz i polugruppy]. Moscow: Publishing House of Foreign Literature, 1962, 829 p.

12. Schwartz L. Annalise. V. I. [SHvarc L. Analiz. T. 1]. Moscow: Mir, 1972, 824 p.

13. Gallardo E. Properties of some classes of functions of many variables. [Gal'yardo E. Svojstva nekotoryh klassov funkcij mnogih peremennyh]. *Matematika, sb. perevodov — Collection of Translations*, 1961, vol. 5:4, pp. 87–116.

14. Glushko V.P., Krein S.G. Inequalities for norms of derivatives in spaces L_p with weight. [Glushko V.P., Krejn S.G. Neravenstva dlya norm proizvodnyh v prostranstvah L_p s vesom]. *Sib. mat. zhurn. — Sib. mat. zhurn.*, 1960, vol. 1, no. 3, pp. 343–382.

15. Stepanov V.V. On one class of almost-periodic functions. [Stepanov V.V. Ob odnom klasse pochti–periodicheskih funkcij]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1949, vol. LXIV, no. 3, p. 297.

16. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya]. Minsk: Science and Technology, 1987, 687 p.

Костин А. В., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского Государственного Университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: leshakostin@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin A. V., associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: leshakostin@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64