УДК 517.95; 517.984

О СТРУКТУРЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ И ОБРАТНОГО К НЕМУ

М. Ш. Бурлуцкая, Е. И. Григорьева, И. В. Колесникова, И. Ф. Леженина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.02.2020 г.

Аннотация. При исследовании вопросов сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов существенным является требование регулярности краевых условий. Для описания операторов, действующих в пространстве вектор-функций, удобным является задание таких операторов на геометрических графах. В работе рассматривается простейший геометрический граф из двух ребер, одно из которых образует цикл-петлю. Описан класс интегральных операторов на таком графе с областью значений, удовлетворяющей условию непрерывности в узле графа, и обращение которых приводит к операторам, обобщающим функционально-дифференциальные операторы с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$. Краевые условия для таких операторов являются регулярными.

Ключевые слова: инволюция, функционально-дифференциальный оператор, интегральный оператор, геометрический граф.

ON THE STRUCTURE OF AN INTEGRAL OPERATOR ON A GRAPH WITH A CYCLE AND ITS INVERSE

M. Sh. Burlutskaya, E. I. Grigorieva, I. V. Kolesnikova, I. F. Lezhenina

Abstract. In the study of the convergence of expansions in eigenfunctions and adjoint functions of differential and integro-differential operators, the requirement of regularity of boundary conditions is essential. To describe operators acting in the space of vector functions, it is convenient to specify such operators on geometric graphs. The paper considers the simplest geometric graph of two eagles, one of which forms a cycle. A class of integral operators on such a graph with a domain of values satisfying the condition of continuity at the node of the graph is described. The inverse operator leads to operators generalizing functional differential operators with the involution $\nu(x) = 1 - x$. The boundary conditions for such operators are regular.

Keywords: involution, functional differential operator, integral operator, geometric graph.

Рассматривается геометрический граф Γ, состоящий из двух ребер, одно из которых образует петлю-цикл. В работах [1–3] изучались функционально-дифференциальные операторы, заданные на отрезке или на графе дифференциальным выражением с инволюцией[1)] вида

$$l[y](x) = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) = \lambda y(x). \tag{1}$$

а также интегральные операторы, обращение которых приводит операторам, обобщающим (1). Нас интересуют операторы, область значений которых удовлетворяет структуре графа,

[1)] Инволюцией, или инволютивным отклонением, называется отображение $\nu(x)$ такое, что $\nu^2(x) = \nu(\nu(x)) = x$.

а именно условию непрерывности в узле графа. Добиться нужных краевых условий оказывается возможным за счет одномерного возмущения исходного интегрального оператора. Здесь используется методика работ [1, 3]. Представленные исследования продолжают и обобщают результаты из [3].

Отметим, что к изучаемым операторам, привели исследования А. П. Хромова по вопросам сходимости разложений интегральных операторов, ядра которых или их производные имеют разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1-x$ [4–5]. Отметим также другие исследования по операторам с инволюцией в [6–9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

Параметризуя каждое ребро графа отрезком [0,1], зададим интегральный оператор на графе Г, как оператор в пространстве вектор-функций:

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $A(x,t)$ — некоторая матрица.

Сначала ставится задача: среди всевозможных интегральных операторов выделить класс таких, которые, во-первых, учитывают структуру графа, что необходимо влечет условие $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$ на область значения оператора, и во-вторых, имеют ядра, имеющие разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1-x$ (представляя собой в некотором смысле «канонические» операторы [10, стр. 381-382], которые важны, например, в исследовании равносходимости спектральных разложений с тригонометрическим рядом). Добиться нужных условий удается за счет возмущения одномерным оператором.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{A}_1(x,t)$, $\widetilde{B}_1(x,t)$, $\widetilde{B}_2(x,t)$ — произвольные функции, непрерывно дифференцируемые по первой и непрерывные по второй компоненте соответственно при $t \neq x$ и $t \neq 1-x$, причем $\widetilde{A}(x,x) \equiv 1$, $\widetilde{B}_k(x,x) \equiv 1$. условия гладкости будут приведены позже). Тогда область значений интегрального оператора (2) с ядром*

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} A_1(x,t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)}A_1(0,t) & A_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $A_1(x,t) = \varepsilon(x,t)\widetilde{A}_1(x,t) + g_1(x)\nu(t)$,
$A_2(x,t) = \alpha_1\varepsilon(x,t)\widetilde{B}_1(x,t) + \alpha_2\varepsilon(1-x,t)\widetilde{B}_2(1-x,t) - \alpha_2\frac{g_2(x)}{g_2(0)}\widetilde{B}_2(1,t)$;
$\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \geqslant t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \leqslant t$;
$g_1(x), g_2(x) \in C^1[0,1]$ $g_1(0) \neq g_1(1)$, $g_2(0) \neq 0$, $\nu(t) = \frac{\widetilde{A}_1(1,t)}{g_1(0)-g_1(1)}$, α_k — комплексные числа, $\alpha_2 \neq 0$, удовлетворяет соотношениям

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{4}$$

Доказательство. На ребре–цикле зададим интегральный оператор следующим образом:

$$y_1(x) = A_1f_1(x) = \int_0^x \widetilde{A}_1(x,t)f_1(t)\,dt + g_1(x)\int_0^1 \nu(t)f_1(t)\,dt,$$

где $g_1(x) \in C^1[0,1]$, и $\nu(t)$ определим через $\widetilde{A}_1$ из условия непрерывности $y_1(x)$ в узле графа. Имеем

$$y_1(0) = g_1(0)\int_0^1 \nu(t)f_1(t)\,dt, \quad y_1(1) = \int_0^1 [\widetilde{A}_1(1,t) + g_1(1)\nu(t)]f_1(t)\,dt.$$

Требуя $g_1(0) \neq g_1(1)$, из условия $y_1(0) = y_1(1)$ получим $\nu(t) = \frac{\widetilde{A}_1(1,t)}{g_1(0)-g_1(1)}$.

На втором ребре графа положим

$$y_2(x) = \alpha_1 \int\limits_0^x \widetilde{B}_1(x,t) f_2(t)\, dt + \alpha_2 \int\limits_0^{1-x} \widetilde{B}_2(1-x,t) f_2(t)\, dt + c_2 g_2(x)$$

(ядро выбираем в таком виде для того, чтобы при обращении получить оператор, главная часть которого содержит $y_2'(1-x)$ [3]). Предполагаем, что $g_2(x) \in C^1[0,1]$. Константу c_2 найдем из условия $y_2(0) = y_1(0)$. Требуя, $g_2(0) \neq 0$, получим $c_2 = \frac{1}{g_2(0)} \left[A_1 f_1\big|_{x=0} - \alpha_2 \int\limits_0^1 \widetilde{B}_2(1,t) f_2(t)\, dt \right]$, откуда

$$y_2(x) = A_2 f_2(x) + \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \int\limits_0^1 A_1(0,t) f_1(t)\, dt.$$

СТРУКТУРА ОПЕРАТОРА A^{-1}

В дальнейшем нам понадобится знать структуру оператора A^{-1}. Мы будем использовать схему обращения оператора A из [3, 10]. Вместо возникающих при этом «естественных» краевых условий будем использовать эквивалентные им условия (4), что существенно при исследовании резольвенты. Для этого, прежде всего, отметим следующие необходимые далее свойства линейных функционалов [1, лемма 1], [3, лемма 2].

Лемма 1 ([3]). *Пусть f_1, f_2, f_3 — линейно независимые аддитивные функционалы в линейном векторном пространстве L. Существуют $x_1, x_2, x_3 \in L$ такие, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, $(i, j = 1,2,3)$.*

Далее предполагаем выполненными следующие условия: компоненты ядра $A(x,t)$, а также $\frac{\partial^k}{\partial x^k} A(x,t)$ $(k = 1,2)$, $\frac{\partial}{\partial t} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x,t)$ непрерывны, кроме может быть, линий $t = x$, $t = 1 - x$; $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$.

Лемма 2. *Если $y = Af$, то*

$$Py'(x) = f(x) + Bf(x) \tag{5}$$

где $Py'(x) = P_1 y'(x) + P_2 y'(1-x)$, $P_1 = \mathrm{diag}(1,p_1)$, $P_2 = \mathrm{diag}(0,p_2)$, $p_k = \alpha_k/d$, $k = 1,2$, $d = \alpha_1^2 - \alpha_2^2$, $Bf(x) = \int\limits_0^1 B(x,t) f(t)\, dt$, $B(x,t) = P_1 A_x'(x,t) + P_2 A_x'(1-x,t)$.

Доказательство. Дифференцируя (2), где $A(x,t)$ есть ядро (3), и учитывая, что $\widetilde{A}_k(x,x) \equiv 1$, получим

$$y_1'(x) = f_1(x) + \int\limits_0^1 [A_x'(x,t) f(t)]_1\, dt,$$

$$y_2'(x) = \alpha_1 f_2(x) - \alpha_2 f_2(1-x) + \int\limits_0^1 [A_x'(x,t) f(t)]_2\, dt,$$

где $[\cdot]_k$ означает k-ую компоненту вектора. Меняя во втором уравнении x на $1-x$, получим дополнительное уравнение, которое позволяет исключить $f(1-x)$. Выполняя необходимые преобразования, придем к (5). $\square$

Теперь представим оператор B в пространстве $L_2^2[0,1]$ в виде $B = W + V$, где $\|W\| < 1$, а V — конечномерный оператор [10]. Тогда из (5) получим

$$(E+W)^{-1}Py'(x) = f(x) + (E+W)^{-1}Vf(x). \tag{6}$$

Используя технику из [3, 10] получаем

Теорема 2. *Пусть A^{-1} существует. Тогда справедливо представление:*

$$\begin{gathered} A^{-1}y(x) = Py'(x) + a_1(x)y(0) + a_2(x)y(1) + a_3(x)y(x) + \\ + a_4(x)y(1-x) + \int\limits_0^1 a(x,t)y(t)\,dt, \end{gathered} \tag{7}$$

$$Sy(0) + Ty(1) = 0, \tag{8}$$

где $a_i(x)$, $a_i'(x)$, $i = \overline{1,4}$, — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет тот же смысл, что и компоненты $A_x(x,t)$, с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность, $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что при обращении оператора получаем «естественные» краевые условия $\int\limits_0^1 A(0,t)A^{-1}y(t)\,dt = y(0)$. Однако, также как в [3] доказывается эквивалентность этих условий соотношениям (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов, А. П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования / А. П. Хромов // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сборник статей. — М. : Изд-во АФЦ, -1999. — С. 255–266.

2. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 443–446.

3. Бурлуцкая, М. Ш. Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом / М. Ш. Бурлуцкая // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 8, вып. 4. — С. 8–13.

4. Хромов, А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях / А. П. Хромов // Мат. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. — С. 932–949.

5. Корнев, В. В. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 33–50.

6. Watkins, W. T. Asymptotic properties of differential equations with involutions / W. T. Watkins // Int. J. Math. Math. Sci. — 2008. — V. 44(4). — P. 485.

7. Tojo, F. A. F. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions / F. A. F. Tojo, A. Cabada // J. Math. Anal. Appl. — 2014. — № 412. — P. 529–546.

8. Baskakov, A. G. Spectral analysis of a differential operator with an involution // A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, E. Yu. Romanova / J. Evolut. Equat. — 2017. — V. 17. — P. 669–684.

9. Vladykina, V. E. Regular Ordinary Differential Operators with Involution / V. E. Vladykina, A. A. Shkalikov // Math. Notes. — 2019. — V. 106, iss. 5. — P. 674–687.

10. Khromov, A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // A. P. Khromov / Mat. Sb. — 1981. — V. 114(156), № 3. — P. 378–405.

REFERENCES

1. Khromov A.P. Equivalence theorem for an integral operator with a variable upper limit of integration. [Khromov A.P. Teorema ravnoskhodimosti dlya integral'nogo operatora s peremennym verhnim predelom integrirovaniya]. Metric theory of functions and related issues of analysis: Collection of articles, Moscow: AFC, 1999, pp. 255–266.

2. Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. A functional-differential operator with involution. [Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. Funktsional'no-differentsial'nyy operator s involyutsiyey]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2007, vol. 414, no. 4, pp. 443–446.

3. Burlutskaya M.S. The equivalence theorem for an integral operator on the simplest graph with a cycle. [Burlutskaya M.S. Teorema ravnoskhodimosti dlya integral'nogo operatora na prostejshem grafe s ciklom]. *Izv. Sarat. un-ta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika — Izv. Sarat. un-ta. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 8–13.

4. Khromov A.P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. [Khromov A.P. Ob obrashchenii integral'nykh operatorov s yadrami, razryvnymi na diagonalyakh]. *Matematicheskiye zametki — Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 6, pp. 932–949.

5. Kornev V.V., Khromov A.P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. [Kornev V.V., Khromov A.P. O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam integral'nykh operatorov s yadrami, dopuskayushchimi razryvy proizvodnykh na diagonalyakh]. *Matematicheskiy sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 33–50.

6. Watkins W.T. Asymptotic properties of differential equations with involutions. Int. J. Math. Math. Sci., 2008, vol. 44(4), pp. 485.

7. Tojo F.A.F., Cabada A. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions. J. Math. Anal. Appl., 2014, no. 412, pp. 529–546.

8. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution. J. Evolut. Equat., 2017, vol. 17, pp. 669–684.

9. Vladykina V.E., Shkalikov A.A. Regular Ordinary Differential Operators with Involution, Math. Notes, 2019, vol. 106, iss. 5, pp. 674–687.

10. Khromov A.P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. Mat. Sb., 1981, vol. 114(156), iss. 3, pp. 378–405.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Тел.: +7(473)220–85–53

Burlutskaya Maria Shaukatovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Chair, the Department of mathematical modeling of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Tel.: +7(473)220–85–53

Григорьева Елена Игоревна, аспирант кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: elenabiryukova2010@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–85–53

Grigorieva Elena Igorevna, postgraduate student, the Department ofmathematical modeling of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: elenabiryukova2010@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–85–53

Колесникова Инна Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kolinna@inbox.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Kolesnikova Inna Viktorovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kolinna@inbox.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Леженина Ирина Федоровна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра функционального анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: if.lezhenina@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–84–60

Lezhenina Irina Fedorovna, Associate Professor of the Department of functional analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: if.lezhenina@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–84–60