

# АЛГОРИТМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ СИГНАЛЬНО–ПОМЕХОВОЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

П. А. Трифонов, Т. Т. Доан, Н. Н. Ахмад

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 15.01.2022 г.

**Аннотация.** В работе выполнен синтез и анализ алгоритмов обнаружения сверхширокополосных сигналов неизвестной формы принимаемых на фоне узкополосных помех с неизвестными параметрами и гауссовского белого шума. Проведено исследование влияния гауссовской узкополосной помехи и наличия априорной неопределённости о форме, длительности и амплитуде принимаемого сигнала на эффективность его обнаружения. Произведён расчёт проигрыша в отношении сигнал-шум вследствие наличия помех и проигрыша в отношении сигнал-шум вследствие различия форм принимаемого и ожидаемого сигналов.

**Ключевые слова:** сверхширокополосный сигнал, режекторный фильтр, априорная неопределённость, узкополосная помеха, проигрыш в отношении сигнал-шум, импульс Гаусса, импульс Лоренца, критерий отношения правдоподобия.

## SEQUENCE DETECTION ALGORITHMS OF ULTRA-WIDEBAND SIGNALS IN THE PRESENCE OF SIGNAL–NOISE APRIOR UNCERTAINTY

P. A. Trifonov, T. T. Doan, N. N. Ahmad

**Abstract.** The paper presents the synthesis and analysis of detection algorithms for ultra-wideband signals of unknown form received against the background of narrow-band interference with unknown parameters and Gaussian white noise. A study was made of the influence of Gaussian narrow-band interference and the presence of a priori uncertainty about the shape, duration and amplitude of the received signal on the efficiency of its detection. Calculation of loss in terms of signal-to-noise due to the presence of interference, loss in terms of signal-to-noise due to various forms of received and expected signals under the influence of Gaussian narrow-band interference.

**Keywords:** ultra-wideband signal, notch filter, prior uncertainty, narrowband interference, signal-to-noise loss, Gaussian impulse, Lorentz impulse, Likelihood Ratio Test (LRT).

В последние годы в развитых иностранных государствах сверхширокополосные технологии все более широко используются в радиотехнике различного назначения. Для повышения эффективности обработки сигналов в сверхширокополосных системах предлагается синтезировать алгоритмы функционирования перспективных средств обнаружения сверхширокополосных сигналов (СШПС). Учитывается, что при приеме СШПС могут присутствовать как преднамеренные помехи, так и непреднамеренные помехи [1, 2], кроме того, могут быть неизвестны некоторые параметры сигналов и помех.

Вследствие наличия априорной неопределенности о характеристиках сигналов и помех, а также в условиях сложной сигнально — помеховой обстановки эффективность обнаружения может значительно снизиться.

Цель работы: определить структуру и характеристики оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов обнаружения СШПС при наличии сложной сигнально-помеховой априорной неопределённости.

### Квазиоптимальный алгоритм обнаружения СШПС на фоне узкополосных помех и белого шума

Рассмотрим модель последовательности СШПС [1] и её основные параметры:

$$s_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s[t - (k - \mu)\theta - \lambda]; \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

здесь  $\theta$  — период следования СШП импульсов,  $\lambda$  — время прихода СШПС. Параметр  $\mu$  определяет точку последовательности, с которой связано ее время прихода  $\lambda$ . Так, при  $\mu = 0$  величина  $\lambda$  представляет собой время прихода первого СШПС последовательности, при  $\mu = (N - 1)/2$  — время прихода середины последовательности, а при  $\mu = N - 1$  — время прихода последнего СШПС последовательности.

В качестве модели преднамеренной помехи [1] используем узкополосный стационарный гауссовский процесс  $\xi(t)$  с нулевым средним и корреляционной функцией  $B_\xi(t_2 - t_1)$ , или сумму таких процессов:  $\xi(t) = \sum_{i=1}^K \xi_i(t)$ . В частном случае, представляющим практический интерес, когда:  $g_i(x) = I(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}$ , спектральная плотность помехи можно представить в виде [3]:

$$G_\xi(\omega) = \sum_{i=1}^K \frac{\gamma_i}{2} \left[ I\left(\frac{\omega_{0i} - \omega}{\Omega_i}\right) + I\left(\frac{\omega_{0i} + \omega}{\Omega_i}\right) \right]. \quad (2)$$

Сначала рассмотрим оптимальный алгоритм обнаружения СШПС при наличии только белого шума. В этом случае обнаружитель должен формировать величину [1]

$$L_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s_N(t)dt = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T x(t)s[t - (k - \mu)\theta - \lambda]dt. \quad (3)$$

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  в случае наличия сигнала (гипотеза  $H_1$ ) наблюдается реализация:  $x(t) = s_N(t) + n(t) + \xi(t)$ , а в случае отсутствия сигнала (гипотеза  $H_0$ ):  $x(t) = n(t) + \xi(t)$ . Здесь  $n(t)$  — реализация гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а  $\xi(t)$  — узкополосная помеха. Решение о наличии или отсутствии сигнала может быть основан на критерии отношения правдоподобия.

$$L_1 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} h, \quad (4)$$

где  $h$  — порог, определяемый исходя из выбранного критерия оптимальности обнаружения. Поскольку  $L_1$  (3) является гауссовской случайной величиной, для вероятностей ошибки 1-го рода (ложной тревоги)  $\alpha_1$  и ошибки 2-го рода (пропуска сигнала)  $\beta_1$  можно записать [3, 4]

$$\alpha_1 = P(L_1 > h | H_0) = 1 - \Phi((h - m_0)/\sigma_0), \quad (5)$$

$$\beta_1 = P(L_1 < h | H_1) = 1 - \Phi((h - m_1)/\sigma_1), \quad (6)$$

здесь  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$  — интеграл вероятности, а

$$m_i = \langle L_1 | H_i \rangle, \sigma_i^2 = \langle (L_1 - m_i)^2 | H_i \rangle \quad (7)$$

— математическое ожидание и дисперсия случайной величины (3), когда верна гипотеза  $H_i (i = 0, 1)$  [3].

Из (5), (6) вероятность пропуска сигнала представим в виде

$$\beta_1 = \Phi \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \operatorname{arcs} \Phi(1 - \alpha_1) - z_1 \right], \quad (8)$$

где

$$z_1^2 = (m_1 - m_0)^2 / \sigma_1^2 \quad (9)$$

— отношение сигнал–шум (ОСШ) по мощности на выходе обнаружителя (3).

Чтобы найти характеристики обнаружения (5) и (6) достаточно определить моменты (7) случайной величины (3). Рассмотрим вначале случай, когда узкополосная помеха отсутствует. При отсутствии сигнала моменты случайной величины будут

$$m_0 = 0, \sigma_0^2 = \left\{ \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T n(t) s[t - (k - \mu)\theta - \lambda] dt \right\}^2 = \frac{2N}{N_0} \int_0^T s_N^2(t) dt \quad (10)$$

— ОСШ при приеме последовательности (1) на фоне белого шума. Полагая далее, что верна гипотеза  $H_1$  при наличии сигнала находим

$$m_1 = \sigma_0^2, \sigma_1^2 = \sigma_0^2. \quad (11)$$

Подставим (10) и (11) в (9), получаем для выходного ОСШ известное выражение [1, 3, 4]

$$z_1^2 = z^2 = \frac{2N}{N_0} \int_0^T s_N^2(t) dt = \frac{2E}{N_0}. \quad (12)$$

При наличии на входе приемника узкополосных помех моменты (7) случайной величины (3) будут следующими [1]

$$\begin{aligned} m_0 = 0, \sigma_0^2 &= \left\{ \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T [n(t) + \sum_{i=1}^K \xi_i(t)] s[t - (k - \mu)\theta - \lambda] dt \right\}^2 = \\ &= \frac{2N}{N_0} \int_0^T s_N^2(t) dt + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=1}^K \sum_{v=1}^K \frac{4}{N_0^2} \int_0^T \int_0^T (\xi_i(t_1) \xi_v(t_2)) s[t_1 - (k - \mu)\theta - \lambda] \times \\ &\times s[t_2 - (m - \mu)\theta - \lambda] dt_1 dt_2 = z^2 + \sigma_\xi^2 \end{aligned} \quad (13)$$

где  $z$  — ОСШ при приеме последовательности (1) на фоне только белого шума, а

$$\sigma_\xi^2 = \frac{4N}{N_0^2} \sum_{i=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{i\xi}(t_2 - t_1) s_N(t_1) s_N(t_2) dt_1 dt_2, \quad (14)$$

— составляющая дисперсии случайной величины (3), обусловленная действием узкополосной помехи.

В реальных условиях форма принимаемого сигнала неизвестна, так как меняется при отражении от объекта (например, в радиолокации), при распространении в атмосфере (навигация, связь), а при мониторинге форма сигнала неизвестна априори. Выполним синтез алгоритма обнаружения сигнала  $s_N^*(t)$  (ожидаемого), который в общем случае не совпадает с принимаемым  $s_N(t)$  ( $s_N(t) \neq s_N^*(t)$ ). Используя (7) математическое ожидание можно записать как

$$m_1 = \frac{2N}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_N(t)s_N^*(t)dt = z^2 R_{s1} \sqrt{d}, \quad (15)$$

здесь  $d = \frac{E^*}{E}$  — отношение энергий ожидаемого и принимаемого сигналов, где  $E = \int_0^T s_N^2(t)dt$ ,

$E^* = \int_0^T s_N^{*2}(t)dt$ , а

$$R_{s1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_N(t)s_N^*(t)dt / \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s_N^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} s_N^{*2}(t)dt} \quad (16)$$

— коэффициент корреляции принимаемого и ожидаемого сигналов [5].

Подставляя (13) и (11) в (9), получим ОСШ на выходе обнаружителя (3) при воздействии узкополосных помех

$$z_1^2 = z^4 / (z^2 + \sigma_\xi^2) = z^2 / \chi_1. \quad (17)$$

Параметр

$$\chi_1 = z^2 / z_1^2 = 1 + \sigma_\xi^2 / z^2, \quad (18)$$

показывает снижение эффективности обнаружения последовательности СШПС вследствие воздействия узкополосных помех, а величина

$$\Delta_1 = \chi_1 / R_{s1}^2, \quad (19)$$

показывает во сколько раз уменьшилось ОСШ вследствие незнания формы сигнала [5].

Подставляя (12) и (14) в (18), параметр  $\chi_1$  можно переписать как

$$\chi_1 = 1 + \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{i\xi}(t_2 - t_1) s_N(t_1) s_N(t_2) dt_1 dt_2 / \int_{-\infty}^{\infty} s_N^2(t) dt. \quad (20)$$

Анализируя (19) и (20) видим, что при  $B_{i\xi}(t_2 - t_1) = 0$  (ГУП отсутствует)  $\Delta_1 = 1/R_{s1}^2$  — проигрыш вследствие незнания формы сигнала при наличии только ГБШ. При совпадении форм принимаемого и ожидаемого сигналов то есть  $s_N^*(t) \equiv s_N(t)$  из (16) получаем  $R_{s1} = 1$ , и тогда  $\Delta_1 = \chi_1$  — проигрыш вследствие воздействия ГУП при использовании оптимального алгоритма, когда присутствует только ГБШ.

Используя спектральное представление, можно переписать (20) как

$$\chi_1 = 1 + \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^K \int_0^{\infty} G_i(\omega) |S(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (21)$$

Конкретизируем проигрыш в эффективности обнаружения (21) для случая, когда спектральные плотности узкополосных помех имеют прямоугольную форму (2). Подставим (2) в (21) и получим

$$\chi_1 = 1 + \sum_{i=1}^K q_i \varepsilon_i. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (19), имеем

$$\Delta_1 = (1 + \sum_{i=1}^K q_i \varepsilon_i) / R_{s1}^2. \quad (23)$$

Параметры  $q_i$ ,  $\varepsilon_i$  определяются по выражениям:

$$q_i = \gamma_i / N_0, \quad (24)$$

здесь  $\gamma_i$  — величина спектральной плотности узкополосной помехи,

$$\varepsilon_i = \frac{\int_{\omega_{0i}-\Omega_i/2}^{\omega_{0i}+\Omega_i/2} |S(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (25)$$

где  $q_i$  — отношение помеха-шум для  $i$ -ой помехи  $\xi_i(t)$ , а  $\varepsilon_i$  — относительная доля энергии СШПС в полосе частот, пораженной  $i$ -ой помехой.

### Эффективность режектирования узкополосных помех при обнаружении СШПС на фоне шума

Если частотные параметры  $\omega_{0i}$  и  $\Omega_i$  узкополосных помех  $\xi_i(t)$  априори известны или могут быть измерены с достаточной точностью, можно повысить эффективность обнаружения СШПС, включив на входе обнаружителя (3) режекторный фильтр (РФ) [1]. Для помех с прямоугольными спектральными плотностями (2) передаточная функция РФ имеет вид:

$$H(j\omega) = 1 - \sum_{i=1}^K \frac{\gamma_i}{2} \left[ I \left( \frac{\omega_{0i} - \omega}{\Omega_i} \right) + I \left( \frac{\omega_{0i} + \omega}{\Omega_i} \right) \right]. \quad (26)$$

После включения РФ на вход обнаружителя (3) им будет вырабатываться величина [1]:

$$L_2 = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \tilde{x}(t) s[t - (k - \mu)\theta - \lambda] dt, \quad (27)$$

где  $\tilde{x}(t)$  — отклик РФ на реализацию наблюдаемых данных.

Очевидно, при отсутствии сигнала реализацию наблюдаемых данных на выходе РФ можно записать как

$$\tilde{x}(t) = n(t). \quad (28)$$

Соответственно, при наличии сигнала на выходе РФ имеем:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{s}_N(t) + n(t), \quad (29)$$

где  $\tilde{s}_N(t)$  — отклик РФ на последовательность СШПС.

Согласно [1, 3], ОСШ на выходе обнаружителя (27) имеет вид

$$z_2^2 = \left[ \frac{2N}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_N(t) \tilde{s}_N(t) dt \right]^2 / z^2 = z^2 / \chi_2. \quad (30)$$

Параметр  $\chi_2$  запишется как

$$\chi_2 = z^2 / z_2^2 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_N^2(t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} s_N(t) \tilde{s}_N(t) dt \right]^2, \quad (31)$$

и показывает снижение эффективности обнаружения последовательности СШПС вследствие применения РФ.

А величина:

$$\Delta_2 = \chi_2/R_{s2}^2, \quad (32)$$

показывает во сколько раз уменьшилось ОСШ вследствие незнания формы сигнала, здесь  $R_{s2}$  — коэффициент корреляции принимаемого и ожидаемого сигналов, который рассчитывается как (16).

Используя спектральное представление, (31) можно переписать как

$$\chi_2 = \left[ \int_0^\infty |S(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^\infty |S(j\omega)|^2 H(j\omega) d\omega \right]^2. \quad (33)$$

Согласно [1], подставляя в (33) передаточную функцию режекторного фильтра (26), имеем

$$\chi_2 = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-2}. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32), имеем

$$\Delta_2 = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-2} / R_{s2}^2. \quad (35)$$

Потери в эффективности обнаружения при использовании РФ обусловлены тем, что при прохождении через фильтр СШПС теряет часть энергии, а форма СШПС после прохождения РФ отличается от формы исходного СШПС, для которого обнаружитель (3) является оптимальным при наличии только белого шума.

Рассмотрим обнаружитель, оптимальный для приема профильтрованной последовательности СШПС на фоне белого шума. Такой обнаружитель [1] должен формировать величину:

$$L_3 = \frac{2}{N_0} \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{s}_N(t) dt = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{s}[t - (k - \mu)\theta - \lambda] dt, \quad (36)$$

здесь  $\tilde{s}_N(t)$  — отклики РФ на последовательность СШПС и  $\tilde{s}(t)$  — одиночный СШПС.

Для ОСШ на выходе обнаружителя (36) находим

$$z_2^2 = \frac{2N}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_N^2(t) dt = z^2 / \chi_3. \quad (37)$$

Параметр  $\chi_3$  и величина  $\Delta_3$  имеют вид

$$\chi_3 = z^2 / z_3^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_N^2(t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_N^2(t) dt, \quad (38)$$

$$\Delta_3 = \chi_3 / R_{s3}^2. \quad (39)$$

Используя спектральное представление, (38) перепишем как

$$\chi_3 = \int_0^\infty |S(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^\infty |S(j\omega)|^2 |H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (40)$$

Подставляя (2) в (40) находим

$$\chi_3 = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-1}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (39), имеем

$$\Delta_3 = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-1} / R_{s3}^2. \quad (42)$$

Сопоставляя (34) и (41), видим, что всегда  $\chi_2 > \chi_3$ . Очевидно, чем большая часть спектра СШПС перекрыта узкополосными помехами, тем более выгодно применение обнаружителя (36) вместо обнаружителя (27).

### Оптимальный алгоритм обнаружения СШПС принимаемых на фоне узкополосных помех и белого шума

Найдем структуру обнаружителя, оптимального для приема последовательности СШПС на фоне белого шума и преднамеренной помехи [1]. Характеристики обнаружения СШПС при наличии гауссовских узкополосных помех (ГУП) можно получить, если априори известны корреляционные функции  $B_i(t_2 - t_1)$ ,  $i = \overline{1, n}$  стационарных гауссовских случайных процессов  $\xi_i(t)$ . В этом случае оптимальный обнаружитель формирует величину [1, 2]:

$$L_4 = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T x(t)u[t - (k - \mu)\theta - \lambda]dt, \quad (43)$$

где  $u(t)$  — функция определяется из решения интегрального уравнения

$$N_0 u(t)/2 + \int_0^T B_\xi(t - \tau)u(\tau)d\tau = s(t), \quad (44)$$

где  $B_\xi(\tau)$  — корреляционная функция, обладающая спектральной плотностью (2).

Используя преобразования Фурье функцию  $u(t)$  запишем в виде:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(j\omega) \exp(j\omega t)}{N_0/2 + \sum_{i=1}^K G_{i\xi}(\omega)} d\omega. \quad (45)$$

Согласно [1], ОСШ на выходе оптимального обнаружителя (43) имеет вид

$$z_4^2 = N \int_0^T s(t)u(t)dt = z^2/\chi_4. \quad (46)$$

Аналогично, как в предыдущем случае находим проигрыш в ОСШ

$$\chi_4 = z^2/z_4^2 = 2 \int_0^T s^2(t)dt/N_0 \int_0^T s(t)u(t)dt. \quad (47)$$

Величина

$$\Delta_4 = \chi_4 / R_{s4}^2. \quad (48)$$

показывает во сколько раз уменьшилось ОСШ вследствие незнания формы сигнала, здесь  $R_{s4}$  — коэффициент корреляции принимаемого и ожидаемого сигналов, который рассчитывается как (16).

Используя спектральное представление перепишем (47) как

$$\chi_4 = \int_0^\infty |S(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^\infty \frac{|S(j\omega)|^2}{1 + 2 \sum_{i=1}^K G_i(\omega) / N_0} d\omega. \quad (49)$$

Подставляя (2) в (49), имеем

$$\chi_4 = \left( 1 - \sum_{i=1}^K \frac{q_i \varepsilon_i}{1 + q_i} \right)^{-1}. \quad (50)$$

Подставим (50) в (48) находим

$$\Delta_4 = \left( 1 - \sum_{i=1}^K \frac{q_i \varepsilon_i}{1 + q_i} \right)^{-1} / R_{s4}^2. \quad (51)$$

Из сравнения (41) и (50) следует, что если спектральная плотность узкополосных помех существенно превосходит спектральную плотность белого шума, то есть  $q_i \gg 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то

$$\chi_3 \approx \chi_4. \quad (52)$$

Из (52) видно, что при  $q_i \gg 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , обнаружитель (36) позволяет реализовать потенциально достижимую эффективность обнаружения без априорного знания спектральных плотностей помех (2).

Конкретизируем полученные выражения сигналов с различающимися формой, амплитудой и длительностью:  $s_i(t) = a_i f_i(t/\tau_i)$ , где  $a_i$  — амплитуда соответствующего сигнала,  $\tau_i = \int_{-\infty}^\infty s_i^2(t) d(t) / \max_t s_i^2(t)$  — эквивалентная длительность, а  $f_i(x)$  — описывает форму СШПС и нормирована так что  $\max f_i(x) = \int_{-\infty}^\infty f_i^2(x) d(x) = 1$ . Обозначим  $k = \tau_2/\tau_1$  — отношение эквивалентной длительности ожидаемого и принимаемого сигнала [5], тогда из (16) получаем коэффициент корреляции принимаемого и ожидаемого сигналов

$$R_s = \sqrt{k} \int_{-\infty}^\infty f_1(xk) f_2(x) d(x). \quad (53)$$

В качестве примера рассмотрим эффективность обнаружения импульса Гаусса вида:  $f_1(x) = \exp(-\pi x^2/2)$  со спектральной плотностью:  $G_1(\omega)$  и моноцикла второго порядка вида:  $f_2(x) = (1 - 4\pi x^2) \exp(-2\pi x^2)$  со спектральной плотностью:  $G_2(\omega)$  [1].

Найдем потери в эффективности обнаружения вследствие отличий форм принимаемого и ожидаемого сигналов в случаях, когда:

1. Принимаемый сигнал — импульс Гаусса, а ожидаемый сигнал — моноцикл второго порядка.
2. Принимаемый сигнал — моноцикл второго порядка, а ожидаемый сигнал — импульс Гаусса.



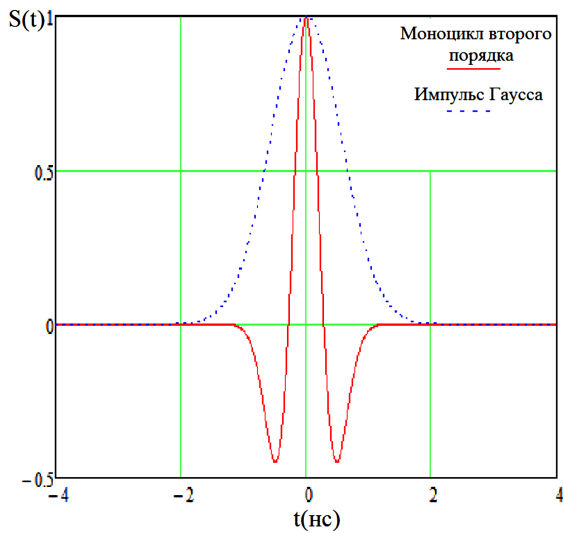


Рис. 1. Формы импульсов.

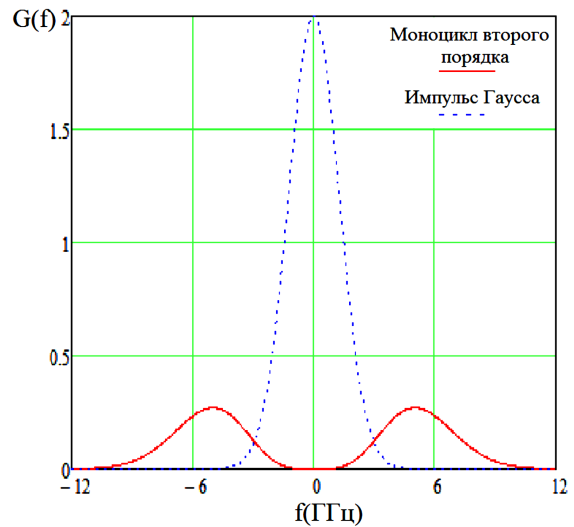


Рис. 2. Спектральные плотности импульсов.

На рисунке (1), (2) представлены формы и спектральные плотности этих двух импульсов. Используя выражения (53) можно найти коэффициенты корреляции между принимаемыми и ожидаемыми сигналами для этих двух случаев

$$R_{s1}(k) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(\frac{-\pi x^2 k^2}{2}\right) (1 - 4\pi x^2) \exp(-2\pi x^2) \right] dx, \quad (54)$$

$$R_{s2}(k) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(\frac{-\pi x^2}{2}\right) (1 - 4\pi x^2 k^2) \exp(-2\pi x^2 k^2) \right] dx, \quad (55)$$

где  $R_{s1}(k)$  — коэффициент корреляции между принимаемым (импульс Гаусса) и ожидаемым сигналом (моноцикл второго порядка), а  $R_{s2}(k)$  — коэффициент корреляции между принимаемым (моноцикл второго порядка) и ожидаемым сигналом (импульс Гаусса).

Найдем величину проигрыша в ОСШ вследствие различий форм ожидаемого и принимаемого сигналов, различий их длительностей и воздействия ГУП для случая, когда принимаемый сигнал — импульс Гаусса, а ожидаемый сигнал — моноцикл второго порядка.

Подставляя (54) в (23), найдем проигрыш в ОСШ при применении алгоритма оптимального только для белого шума (такой алгоритм основан на отношении правдоподобия (3), в дальнейшем назовем его как LRT-Opt-1)

$$\Delta_{1gm} = \left(1 + \sum_{i=1}^K q_i \varepsilon_i\right) / R_{s1}^2. \quad (56)$$

Подставляя (54) в (35), найдем проигрыш в ОСШ при применении РФ на входе приемника (такой алгоритм основан на отношении правдоподобия (27), в дальнейшем назовем его как LRT-1)

$$\Delta_{2gm} = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-2} / R_{s1}^2. \quad (57)$$

Подставляя (54) в (42), найдем проигрыш в ОСШ при применении РФ на входе приемника и на выходе генератора опорного сигнала (такой алгоритм основан на отношении правдоподобия (36), в дальнейшем назовем его как LRT-2)

$$\Delta_{3gm} = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-1} / R_{s1}^2. \quad (58)$$

Подставляя (54) в (51), найдем проигрыш в ОСШ при применении оптимального алгоритма обнаружения на фоне узкополосных помех и белого шума (такой алгоритм основан на отношении правдоподобия (43), в дальнейшем назовем его как LRT-Opt-2)

$$\Delta_{4gm} = \left(1 - \sum_{i=1}^K \frac{q_i \varepsilon_i}{1 + q_i}\right)^{-1} / R_{s1}^2. \quad (59)$$

Аналогично, как в предыдущем случае подставляя (55) в выражения (23), (35), (42), (51) получаем проигрыш в ОСШ при применении алгоритмов LRT-Opt-1, LRT-1, LRT-2 и LRT-Opt-2 для случая, когда принимаемый сигнал — моноцикл второго порядка, а ожидаемый сигнал — импульс Гаусса

$$\Delta_{1mg} = \left(1 + \sum_{i=1}^K q_i \varepsilon_i\right) / R_{s2}^2, \quad (60)$$

$$\Delta_{2mg} = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-2} / R_{s2}^2, \quad (61)$$

$$\Delta_{3mg} = \left(1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right)^{-1} / R_{s2}^2, \quad (62)$$

$$\Delta_{4mg} = \left(1 - \sum_{i=1}^K \frac{q_i \varepsilon_i}{1 + q_i}\right)^{-1} / R_{s2}^2. \quad (63)$$

Для сравнения эффективности рассмотренных алгоритмов обнаружения СШПС определим величины проигрыша в ОСШ вследствие воздействия помех. В качестве конкретного примера рассмотрим эффективность обнаружения СШПС вида прямоугольного импульса со спектром:  $S^*(j\omega) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$  при наличии помех в виде импульса Гаусса:  $f_1^*(x) = \sum_{i=0}^K a_{i1} f_{1i}(x)$

со спектральной плотностью:  $G_1^*(\omega) = \sum_{i=1}^K a_{i1}^2 G_{1i}(\omega)$  и моноцикла второго порядка:  $f_2^*(x) = \sum_{i=1}^K a_{i2} f_{2i}(x)$  со спектральной плотностью:  $G_2^*(\omega) = \sum_{i=1}^K a_{i2}^2 G_{2i}(\omega)$ .

Если амплитуды импульсов априори известны  $a_{1i} = a_{2i}$ , параметр  $q_i^*$  определяется выражением:  $q_i^* = \frac{2a_i^2}{N_0}$ .

Найдем теперь аналитические зависимости для проигрыша в ОСШ вследствие воздействия помех в виде импульса Гаусса.

При применении алгоритма LRT-Opt-1 проигрыш в ОСШ запишется, согласно (21), как

$$\chi_{1g} = 1 + q_i^* \frac{\sum_{i=1}^K \int_0^\infty G_{1i}(\omega) |S^*(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |S^*(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (64)$$

При применении алгоритма LRT-Opt-2 проигрыш в ОСШ запишется, согласно (49), как

$$\chi_{2g} = \int_0^{\infty} |S^*(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^{\infty} \frac{|S^*(j\omega)|^2}{1 + q_i^* \sum_{i=1}^K G_{1i}(\omega)} d\omega. \quad (65)$$

Аналогично, как в предыдущем случае найдем аналитические зависимости для проигрыша в ОСШ вследствие воздействия помех в виде моноцикла второго порядка.

Проигрыш в ОСШ запишется, согласно выражениям (21), (49), как

$$\chi_{1m} = 1 + q_i^* \frac{\sum_{i=1}^K \int_0^{\infty} G_{2i}(\omega) |S^*(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |S^*(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (66)$$

$$\chi_{2m} = \int_0^{\infty} |S^*(j\omega)|^2 d\omega / \int_0^{\infty} \frac{|S^*(j\omega)|^2}{1 + q_i^* \sum_{i=1}^K G_{2i}(\omega)} d\omega. \quad (67)$$

На рисунке 3, 4 показаны графики зависимости проигрыша в ОСШ от отношения длительностей ожидаемого и принимаемого сигналов при условии  $\varepsilon = 0,2$ ;  $q = 10$ .

Рассмотрим случай, когда принимаемый сигнал — импульс Гаусса, ожидаемый сигнал — моноцикл второго порядка на рисунке (3). И случай, когда принимаемый сигнал — моноцикл второго порядка, а ожидаемый сигнал — импульс Гаусса на рисунке (4). Сплошные (56), (60), пунктирные (57), (61), штриховые (58), (62) и штрих-пунктирные кривые (59), (63) на рисунках соответствуют случаям применения алгоритмов LRT-Opt-1, LRT-1, LRT-2 и LRT-Opt-2.

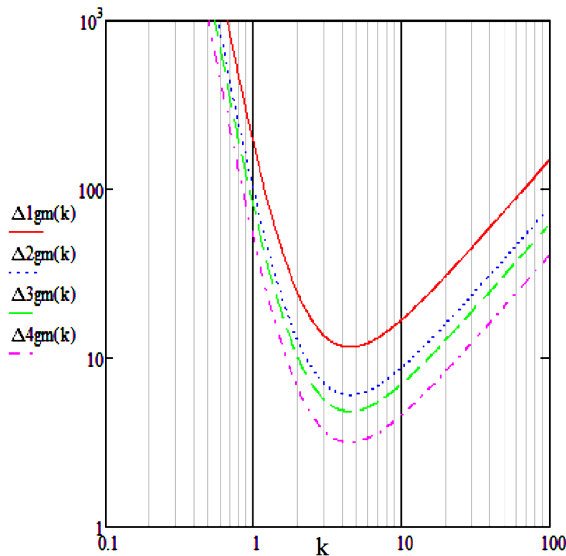


Рис. 3. Графики зависимости проигрыша в ОСШ от отношения эквивалентной длительности, когда принимаемый сигнал — импульс Гаусса, ожидаемый сигнал — моноцикл второго порядка.

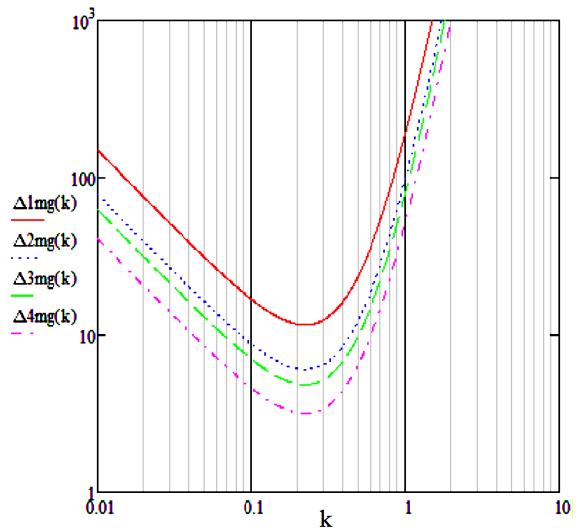


Рис. 4. Графики зависимости проигрыша в ОСШ от отношения эквивалентной длительности, когда принимаемый сигнал — моноцикл второго порядка, ожидаемый сигнал — импульс Гаусса.

Анализ графиков (3), (4) показывает, что при использовании алгоритма LRT-Opt-2 проигрыш в ОСШ (59), (63) будет минимальным. При применении алгоритмов LRT-1, LRT-2

проигрыш (57), (58), (61), (62) значительно меньше по сравнению с тем, когда используется алгоритм LRT-Opt-1 (56), (60). В случае, когда принимаемый сигнал — импульс Гаусса, а ожидаемый сигнал — моноцикл второго порядка при  $k = 4,5$  проигрыш в ОСШ  $\Delta_{1gm}(k) = 11,59$ ;  $\Delta_{2gm}(k) = 6,04$ ;  $\Delta_{3gm}(k) = 4,84$ ;  $\Delta_{4gm}(k) = 3,16$ . Для случая, когда принимаемый сигнал — импульс Гаусса, а ожидаемый сигнал — моноцикл второго порядка, минимальное значение проигрыша в ОСШ будет равно 3,16 (то есть  $\Delta_{gm\min}(k) = 3,16$  при  $k = 4,5$ ) и видно, что при  $\tau_2 > \tau_1$  (длительность ожидаемого больше длительности принимаемого сигнала) проигрыш растет медленнее, чем при  $\tau_1 > \tau_2$ . Таким образом, если точная длительность принятого сигнала неизвестна, приемник необходимо настраивать на сигнал с большей длительностью, чем принимаемый. В случае, когда принимаемый сигнал — моноцикл второго порядка, а ожидаемый сигнал — импульс Гаусса, минимальное значение проигрыша в ОСШ будет равно 3,16 (то есть  $\Delta_{mg\min}(k) = 3,16$  при  $k = 0,222$ ) и видно, что при  $\tau_1 > \tau_2$  проигрыш растет медленнее, чем при  $\tau_2 > \tau_1$ , то есть когда, точная длительность принятого сигнала неизвестна, приемник необходимо настраивать на сигнал с меньшей длительностью, чем принимаемый.

На рисунке 5 представлены графики зависимости проигрыша в ОСШ от отношения помеха–шум вследствие воздействия помех в виде импульса Гаусса и на рисунке 6 вследствие воздействия помех в виде моноцикла второго порядка. Сплошные (64), (66), пунктирные (65), (67) на рисунках соответствуют случаям применения алгоритмов LRT-Opt-1 и LRT-Opt-2.

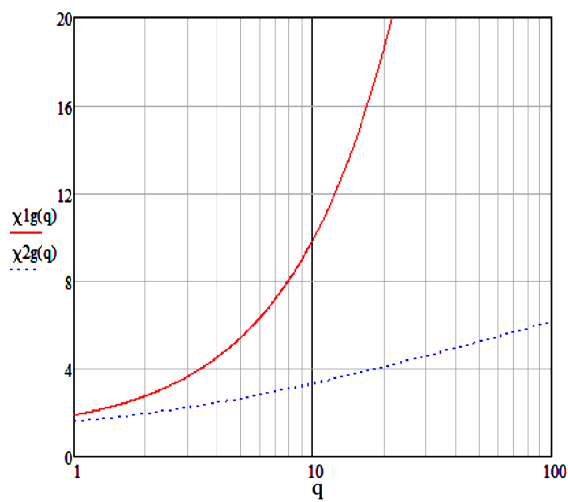


Рис. 5. Графики зависимости проигрыша в ОСШ  $\chi_g$  вследствие воздействия помех в виде импульса Гаусса от отношения помеха — шум  $q^*$ .

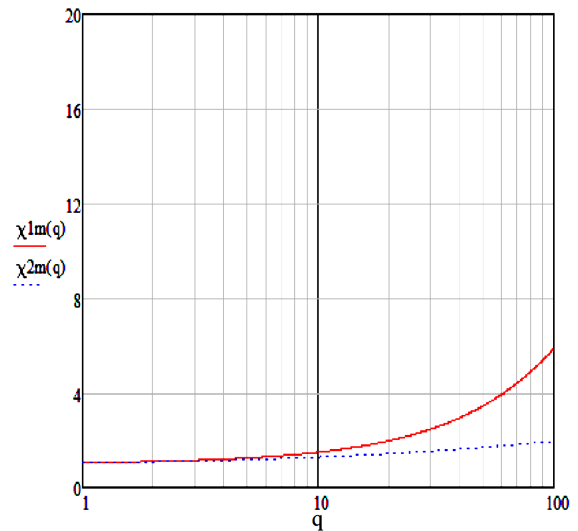


Рис. 6. Графики зависимости проигрыша в ОСШ  $\chi_l$  вследствие воздействия помех в виде моноцикла второго порядка от отношения помеха — шум  $q^*$ .

Анализ зависимостей, представленных на рисунках 5, 6 показывает, что в случае применения алгоритмов LRT-Opt-1 (64), (66) и LRT-Opt-2 (65), (67) для обнаружения СШПС вследствие воздействия помех в виде импульса Гаусса и моноцикла второго порядка, проигрыш в ОСШ зависит от значения отношения помеха–шум  $q^*$  и характеристик принимаемого сигнала. А в случае применения алгоритма LRT-Opt-2 для обнаружения СШПС вследствие воздействия ГУП, проигрыш в ОСШ (50), (52) зависит только от характеристик принимаемого сигнала. Следовательно, с увеличением интенсивности помех эффективность обнаружения СШПС при наличии ГУП выше, чем в случае приема СШПС на фоне помех вида импульса Гаусса и моноцикла второго порядка.

Анализируя графики видим, что в случае, когда принимаемый СШПС имеет вид прямо-

угольного импульса, при одном и том же значении отношения помеха–шум проигрыш в ОСШ вследствие воздействия помех в виде импульса Гаусса больше чем в случае, воздействия помех в виде моноцикла второго порядка (то есть  $\chi_{2g}=3,32; \chi_{2m}=1,28$  при  $q^* = 10; \chi_{2g} = 6,15, \chi_{2m} = 1,95$  при  $q^* = 100$ ). Это связано с тем, что при одном и том же значении амплитуды импульсов (рисунок (1), (2)) энергетический спектр импульса Гаусса больше чем энергетический спектр моноцикла второго порядка, соответственно коэффициент энергетической доступности помехи вида импульса Гаусса больше чем коэффициент энергетической доступности помехи вида моноцикла второго порядка. Следовательно, обнаружитель СШПС вида прямоугольного импульса вследствие воздействия помех в виде моноцикла второго порядка более эффективен, чем обнаружитель СШПС вида прямоугольного импульса вследствие воздействия помех в виде импульса Гаусса.

В ходе проведенных исследований показано, что при использовании алгоритма LRT-2 (с двумя режекторными фильтрами) для обнаружения СШПС возможно реализовать потенциально достижимую эффективность без априорного знания спектральных плотностей преднамеренных помех, а при использовании алгоритма LRT-Opt-2 для обнаружения СШПС эффективность максимальна, но требуется знание всех параметров помех.

Таким образом, найденные структуры и характеристики оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов обнаружения СШПС позволяют сделать обоснованный выбор структуры обнаружителя в зависимости от имеющейся априорной и получаемой в ходе мониторинга текущей информации о параметрах помех, а также в зависимости от требований, предъявляемых к эффективности аппаратуры обнаружения СШПС в различных условиях сигнально-помеховой обстановки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радзиевский, В. Г. Обработка сверхширокополосных сигналов и помех / В. Г. Радзиевский, П. А. Трифонов. — М. : Радиофизика, 2009. — 288 с.
2. Трифонов, П. А. Квазиоптимальное обнаружение сверхширокополосного сигнала при воздействии узкополосной помехи / П. А. Трифонов, И. В. Гушчин // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2013. — Т. 16, № 2. — С. 96–100.
3. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М. : Сов. радио, 1985. — 320 с.
4. Бакута, П. А. Теория обнаружения сигналов / П. А. Бакута. — М. : Сов. радио, 1984. — 440 с.
5. Трифонов, П. А. Квазиправдоподобное обнаружение сверхширокополосного сигнала неизвестной формы на фоне узкополосных помех и белого шума / П. А. Трифонов, И. В. Гушчин, М. Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 42–53.

## REFERENCES

1. Radziyevsky V.G., Trifonov P.A. Processing of superbroadband signals and hindrances. [Radziyevskij V.G., Trifonov P.A. Obrabotka sverxshirokopolosnyx signalov i pomex]. Moscow: Radio engineering, 2009, 288 p.
2. Trifonov P.A., Gushchin I.V. Quasi-optimal detection of an ultra-wideband signal under the influence of narrow-band interference. [Trifonov P.A., Gushchin I.V. Effektivnost' sverkhshirokopolosnogo obnaruzheniya i izmereniya dal'nosti i skorosti tseli]. *Fizika volnovykh processov i radiotekhnicheskie sistemy — Physics of wave processes and radio engineering systems*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 96–100.
3. Tikhonov V.I. Optimum signal reception. [Tikhonov V.I. Optimal'nyu priyem signalov]. Moscow, 1985, 320 p.
4. Bakuta P.A. Signal detection theory. [Bakuta P.A. Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow,

1984, 440 p.

5. Trifonov P.A., Gushchin I.V., Beshpalova M.B. Quasi-plausible detection of a UWB signal of unknown shape against the background of narrowband interference and white noise. [Trifonov P.A., Gushchin I.V., Beshpalova M.B. Kvazipravdopodobnoye obnaruzheniye sverkhshirokopolosnogo signala ne-izvestnoy formy na fone uzkopolosnykh pomekh i belogo shuma]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 42–53.

*Трифонов Павел Андреевич, доктор технических наук, доцент, профессор каф. радиоп физики ВГУ, Воронеж, Российская Федерация*  
E-mail: [bk\\_123@bk.ru](mailto:bk_123@bk.ru)

*Trifonov Pavel Andreevich, doctor of technical sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*  
E-mail: [bk\\_123@bk.ru](mailto:bk_123@bk.ru)

*Доан Тхе Туан, аспирант каф. радиоп физики ВГУ, Воронеж, Российская Федерация*  
E-mail: [doanhetuan30071996@gmail.com](mailto:doanhetuan30071996@gmail.com)

*Doan The Tuan, graduate student of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*  
E-mail: [doanhetuan30071996@gmail.com](mailto:doanhetuan30071996@gmail.com)

*Насим Надим Ахмад, адъюнкт, ВУНЦ ВВС “ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Российская Федерация*  
E-mail: [nasimakhmad@yandex.ru](mailto:nasimakhmad@yandex.ru)

*Nasem Nadem Ahmad, adjunct, MESC AF “N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, Voronezh, Russian Federation*  
E-mail: [nasimakhmad@yandex.ru](mailto:nasimakhmad@yandex.ru)