УДК 517

ПРИНИЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Ю. Сидельникова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.09.2018 г.

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о применимости процедуры усреднения в задаче о периодических решениях полулинейного стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. На основе работы G. Da Prato, C. Tudor при диссипативных условиях на правую часть доказывается, что среднеквадратично ограниченное на всей оси решение полулинейного стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами будет периодическим. На этой основе, в качестве основного результата статьи, доказывается принцип усреднения для стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: принцип усреднения, стохастическое эволюционное уравнение, периодические решения.

AVERAGING PRINCIPLE FOR PERIODIC SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

S. Y. Sidelnikova

Abstract. In this article we study averaging procedure for periodic solutions problem of a semilinear stochastic differential equation with periodic coefficients in a separable Hilbert space. We prove that the bounded on the whole axis solution of a semilinear stochastic differential equation with periodic coefficients is periodic. This fact deals with dissipative conditions on the right-hand side introduced by G. Da Prato and C. Tudor. The main result of this article is an averaging principle for a stochastic differential equation with periodic coefficients.

Keywords: averaging principle, stochastic evolution equation, periodic solutions.

В настоящей статье в сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается полулинейное стохастическое уравнение с периодическими коэффициентами. Приводятся условия существования периодических решений такого уравнения. Причем периодичность случайного процесса означает периодичность всех его конечномерных распределений по времени. В качестве основного результата доказывается принцип усреднения для периодических решений полулинейных стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве в случае быстро осциллирующей правой части.

Ранее задача об усреднении в задаче о почти периодических решений стохастических дифференциальных уравнений рассматривалась в работе M. I. Kamenskii, O. Mellah, P. R. de Fitte [1]. Задача существования периодических решений стохастических дифференциальных уравнений изучалась в работах G. Da Prato, C. Tudor [2], А. Дороговцева [5] и др. Смотри также имеющуюся в них библиографию.

Статья организована следующим образом: В первом разделе приводятся основные определения и предварительные сведения. Далее во втором разделе сформулированы основные предположения, необходимые для доказываемых теорем. В третьем разделе устанавливается существование периодического решения в случае, когда коэффициенты уравнения периодические. В четвертом разделе приводится теорема о принципе усреднения почти периодических решений, доказанную ранее в [1]. В пятом разделе в качестве основного результата статьи доказывается принцип усреднения для стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Приведем далее несколько необходимых нам определений, рассмотренных, в частности в [3].

Определение 1. Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega,\mathcal{F},P)$ элементами котрой являются: 1. Ω-множество исходов, пространство элементрных событий. 2. $\mathcal{F}$ σ-алгебра подмножеств Ω, называемых событиями. 3. P вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{F})$ будем называть σ-аддитивную функцию P, действующую из $\mathcal{F}$ в $[0,1]$, такую что $P(\Omega) = 1$

Определение 2. Пусть $\mathbb{E}$-метрическое пространство, тогда наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые(замкнутые) подмножества $\mathbb{E}$ называется борелевской σ-алгеброй и обозначается $\mathfrak{B}(\mathbb{E})$.

Определение 3. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ вероятностное пространство, а $\mathbb{E}$ банахово пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$. Измеримое отображение X из $(\Omega,\mathcal{F})$ в $(\mathbb{E},\mathfrak{B})$ называется случайной величиной.

Определение 4. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ вероятностное пространство и X некоторая случайная величина из $(\Omega,\mathcal{F})$ в $(\mathbb{E},\mathfrak{B})$. Если интеграл $\int_\Omega XdP$ конечен, то интеграл $E(X) = \int_\Omega XdP$ называется математическим ожиданием случайной величины.

Определение 5. Пусть $\mathbb{E}$-банахово пространство и $\mathfrak{B}(\mathbb{E})$ σ-алгебра борелевских подмножеств. Предположим, что задано $(\Omega,\mathcal{F},P)$ вероятностное пространство и $t \in [0,T]$. Семейство $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ со значениями в $\mathbb{E}$ будем называть стохастическим процессом (или случайным процессом), если $X(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ является случайной величиной (то есть измеримым отображением из Ω в $\mathbb{E}$). Говорят, что множество функций $X(\cdot,\omega), \omega \in \Omega$ образуют траектории стохастического процесса $X(t)$. Если функции непрерывные п.н., то говорят,что процесс X имеет непрерывные траектории.

Определение 6. Случайный процесс X измеримый, если отображение $X(\cdot,\cdot) : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{E}$ будет $\mathfrak{B}([0,T]) \times \mathcal{F}$ измеримо.

Определение 7. Процесс X прогрессивно измеримый, если для каждого $t \in [0,T]$ отображение

$$[0,t] \times \Omega \to \mathbb{E}, (s,\omega) \to X(s,\omega)$$

$\mathfrak{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-измеримо

Определение 8. Случайный процесс X стохастически непрерывен в $t_0 \in [0,T]$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует $\rho > 0$ такое что

$$P(\|X(t) - X(t_0)\| \geqslant \varepsilon) \leqslant \delta,$$

для любого $t \in [t_0 - \rho,t_0 + \rho] \cap [0,T]$

Определение 9. Пусть $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ вещественные сепарабельные гильбертовы пространства. Стохастический процесс $W_t, t \geqslant 0$ со значениями в $\mathbb{H}_1$ называется Q-винеровским процессом, если он обладает следующими свойствами:

1. процесс $W_0 = 0$,

2. процесс W имеет почти наверное непрерывные траектории,

3. процесс W имеет независимые приращения,

4. распределение $L(W_t - W_s) = N(0,(t-s)Q), t \geqslant s \geqslant 0$ где $L(W_t - W_s)$ является распределением, $N(0,(t-s)Q)$ невырожденное распределение Гаусса, с оператором ковариации $(t-s)Q$.

Определение 10. Любое семейство $S(t), t \in [0,+\infty)$- ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathbb{E}$, удовлетворяющих следующим условиям

1) $S(0) = I$,

2) $S(t+s) = S(t)S(s)$, для всех $t,s \in [0,+\infty)$, называется полугруппой.

Определение 11. Полугруппа $S(t)$, удовлетворяющая условию $S(t)x$ непрерывна на $[0,\infty)$, для всех $x \in \mathbb{E}$, называется C_0-полугруппой линейных операторов (сильно непрерывная полугруппа).

Определение 12. Пусть $S(t)$-C_0-полугруппа, тогда линейный оператор A, определяемый следующими соотношениями

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{E} : \lim_{t \to 0+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\},$$

$$A(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

для всех $x \in D(A)$, называют производящим оператором полугруппы $S(t)$.

Теорема(см.[3]). Пусть $A : D(A) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ линейный замкнутый оператор в $\mathbb{E}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны

(i) $A-$производящий оператор C_0-полугруппы $S(t)$ такой что $\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, для всех $t \geqslant 0$ и $M > 0$,

(ii) $D(A)$ плотно в $\mathbb{E}$, резольвентное множество $\rho(A)$ содержит отрезок $(\omega, +\infty)$ и выполняется следующая оценка

$$\left\| R^k(\lambda,A) \right\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^k},,k = 1,2,...,$$

где $R(n,A)$ резольвента оператора A.

Определение 13. Аппроксимацией Иосиды оператора A называется оператор A_n, определяемый формулой $A_n = nAR(n,A)$.

Определение 14. Пусть $L^2(P,\mathbb{H}_2)$ пространство $\mathbb{H}_2$-значных случайных величин с конечным среднеквадратичным. Говорят, что стохастический процесс $X : \mathbb{R} \to L^2(P,\mathbb{H}_2)$ среднеквадратично непрерывен, если для каждого $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to s} E \|X(t) - X(s)\|^2_{\mathbb{H}_2} = 0$$

Обозначим как $CUB(\mathbb{R},L^2(P,\mathbb{H}_2))$-банахово пространство среднеквадратичных равномерно ограниченных стохастических процессов с нормой

$$\|X\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} (E \|X(t)\|^2_{\mathbb{H}_2})$$

Далее рассмотрим необходимые нам предварительные сведения:

Пусть $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ сепарабельные гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_2}$ соответственно и $L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ (или $L(\mathbb{H}_1)$, если $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2$) - пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathbb{H}_1$ в $\mathbb{H}_2$ с нормой $\|\cdot\|_{L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)}$.

Обозначим через $L_2(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$- пространство всех операторов Гильберта-Шмидта, действующих из $\mathbb{H}_1$ в $\mathbb{H}_2$ с нормой Гильберта-Шмидта $\|\cdot\|_{L_2}$(см.[3]).

Если оператор $A \in L(\mathbb{H}_1)$, тогда через A^* обозначим сопряженный оператор, и если A ядерный оператор, то

$$|A|_{\mathcal{N}} = \sup\Big\{ \sum_i |\langle Ae_i, f_i\rangle|, \{e_i\}, \{f_i\} \text{ ортонормированные базисы на } \mathbb{H}_1 \Big\}$$

ядерная норма оператора A.

Пусть $W(t)_{t\in R}$ — Q-винеровский процесс, определенный на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и со значениями в $\mathbb{H}_1$, где $Q \in L_2(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_1)$ симметрический неотрицательный оператор с конечным следом. Процесс W определяется следующим образом: пусть $W_i(t) : t \geqslant 0$, $i = 1,2$ — независимые $\mathbb{H}_1$-значные Q-винеровские процессы, тогда

$$W(t) = \begin{cases} W_1(t), & t \geqslant 0, \\ W_2(-t), & t \leqslant 0 \end{cases}$$

будет Q-винеровским процессом на вещественной оси.

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через $P \circ f^{-1}$ распределение случайной величины $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to X$, и если X — банахово пространство, то математическое ожидание этой случайной величины будем обозначать $E(f)$.

Пусть $\mathbb{H}_0 = Q^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}_2$ и $L_2^0 = L_2(\mathbb{H}_0, \mathbb{H}_2)$ — сепарабельное Гильбертово пространство с нормой

$$\|\Psi\|^2_{L_2^0} = \left\|\Psi Q^{\frac{1}{2}}\right\|^2_2 = Trace(\Psi Q \Psi^*).$$

Рассмотрим полулинейное стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида:

$$dX_t = AX(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t) \tag{1}$$

где линейный оператор $A : D(A) \subset \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ действующий на $\mathbb{H}_2$ и $F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2, (t,x) \mapsto F(t,x)$ и $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to L_2^0, (t,x) \mapsto G(t,x)$.

Всюду ниже предполагается, что существует константа $\delta > 0$, такая что C_0-полугруппа $(S(t))_{t\geqslant 0}$, с производящим оператором A удовлетворяет следующей оценке:

$$\|S(t)\|_{L_2(\mathbb{H}_2)} \leqslant e^{-\delta t}, t \geqslant 0. \tag{2}$$

Обобщенным решением уравнения (1) с $\mathcal{F}_s$-измеримым начальным условием $X(s) = \xi_s$ на интервале $[s, +\infty[$ будем называть $\mathcal{F}_t$-прогрессивно измеримый процесс $\{X(t)\}_{t\geqslant s}$, такой что для каждого $t \geqslant s$ выполнено равенство

$$X(t) = S(t-s)\xi_s + \int_s^t S(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t S(t-\sigma)G(\sigma, X(\sigma))dW(\sigma)$$

Обобщенным решением уравнения (1) на $\mathbb{R}$ будем называть $\mathcal{F}_t$-прогрессивно измеримый процесс $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, для которого при каждом $t \geqslant s$ выполняется равенство

$$X(t) = S(t-s)X(s) + \int_s^t S(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t S(t-\sigma)G(\sigma, X(\sigma))dW(\sigma)$$

Приведем важные для нас понятия ограниченности и периодичности:

Определение. (см.[2]). Обобщенное решение $X(\cdot)$ уравнения (1) на $\mathbb{R}$ называется L^2-ограниченным, если выполнена оценка $\sup_{t\in\mathbb{R}} E(\|X(t)\|^2) < +\infty$.

Определение. (см.[2]). Обобщенное решение $X(\cdot)$ уравнения (1) на $\mathbb{R}$ называется T-периодическим, если для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$, выполняется равенство

$$P \circ (X(t_1 + T),...,X(t_n + T))^{-1} = P \circ (X(t_1),...,X(t_n))^{-1}$$

Пусть $(\mathbb{E},d)$ сепарабельное метрическое пространство. Обозначим через $C_b(\mathbb{E})$ банахово пространство непрерывных и ограниченных функций $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{E}}|f(x)|$ и через $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ множество всех вероятностных мер на борелевской σ-алгебре множества $\mathbb{E}$. Для $f \in C_b(\mathbb{E})$ определим(см. [1]):

$$\|f\|_L = \sup\{\frac{f(x) - f(y)}{d_{\mathbb{E}}(x,y)} : x \neq y\}$$

$$\|f\|_{BL} = max\{\|f\|_\infty , \|f\|_L\}$$

Введем пространство

$$BL(\mathbb{E}) = \{f \in C_b(\mathbb{E}) : \|f\|_{BL} < \infty\}$$

Для $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ определим

$$d_{BL}(\mu,\nu) = \sup_{\|f\|_{BL}\leqslant 1} |\int_{\mathbb{E}} f d(\mu - \nu)|$$

являющееся полной метрикой на $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ и порождает слабую топологию, то есть самую грубую топологию на $\mathcal{P}(\mathbb{E})$, такую что отображение $\mu \mapsto \mu(f)$ непрерывно для всех ограниченных и непрерывных $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$.

Приводим также определение почти периодической функции.

Пусть $(\mathbb{E}_1,d_1)$ и $(\mathbb{E}_2,d_2)$ сепарабельные полные метрические пространства. Пусть f непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{E}_2$ (соотв. из $\mathbb{R} \times \mathbb{E}_1$ в $\mathbb{E}_2$). Пусть $\mathcal{K}$ множество подмножеств $\mathbb{E}_1$. Говорят, что функция f почти периодическая (соответственно почти периодическая равномерная по x для каждого элемента из множества $\mathcal{K}$), если для каждого $\varepsilon > 0$ (соответственно для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого подмножества $K \in \mathcal{K}$), существует константа $l(\varepsilon,K) > 0$, такая что любой интервал длины $l(\varepsilon,K)$ содержит, по меньшей мере, одно число τ для которого

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d_2(f(t + \tau),f(t)) < \varepsilon$$

$$(\text{соответственно } \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} d_2(f(t + \tau, x),f(t, x)) < \varepsilon).$$

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ вероятностное пространство. Пусть $X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{H}_2$ — стохастический процесс. Обозначим через $P \circ (X(t))^{-1}$ распределение случайной величины $X(t)$. Следуя терминологии Тюдора [2], говорим, что X имеет почти периодические одномерные распределения, если отображение $t \mapsto P \circ (X(t))^{-1}$ из $\mathbb{R}$ в $(\mathcal{P}(\mathbb{H}_2),d_{BL})$ почти периодическое. Если X имеет непрерывные траектории, говорим, что X почти периодическое по распределению, если отображение $t \mapsto P \circ (X(t + .))^{-1}$ из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{P}(C(\mathbb{R}; \mathbb{H}_2))$ почти периодическое, где на $C(\mathbb{R}; \mathbb{H}_2)$ задана равномерная сходимость на компактных интервалах и на $\mathcal{P}(C(\mathbb{R}; \mathbb{H}_2))$ задано расстояние d_{BL}.

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пусть для операторов F и G, фигурирующих в правой части уравнения (1) выполнены следующие предположения:

Предположение 1.

A) Отображения $F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2, (t,x) \mapsto F(t,x)$ и $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to L_2^0, (t,x) \mapsto G(t,x)$ непрерывные.

B) Для некоторой положительной константы C_1 выполнено неравенство:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t,0)\| + \|G(t,0)\|_{L_2^0} \leqslant C_1$$

C) Для некоторой положительной константы C_2 выполняется следующее:

$$\|F(t,x) - F(t,y)\|^2 + \|G(t,x) - G(t,y)\|^2_{L_2^0} \leqslant C_2 \|x-y\|^2 ,$$

Для всех $t \in \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{H}_2$.

Предположение 2.

I) Оператор A диссипативный, то есть существует $\beta > 0$, такая что

$$\langle Ax,x\rangle \leqslant -\beta|x|^2, \text{ для всех } x \in D(A).$$

II) Пара F и G диссипативная, то есть существует $\beta_1 > 0$ такая что

$$\langle F(t,x) - F(t,y),x-y\rangle + \|G(t,x) - G(t,y)\|^2_{L_2^0} \leqslant \beta_1\|x-y\|^2, \text{ для всех } t \in \mathbb{R}, x,y \in \mathbb{H}_2.$$

III) Имеем $\omega = \beta - \beta_1 > 0$

3. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом разделе и далее будем рассматривать уравнение следующего вида:

$$dX_t = AX(t)dt + F(\frac{t}{\varepsilon},X(t))dt + G(\frac{t}{\varepsilon},X(t))dW(t) \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $A : D(A) \subset \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ линейный оператор на $\mathbb{H}_2$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ и $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to L_2^0$ нелинейные отображения. Везде далее будем считать, что коэффициенты F и G периодические, то есть $F(t+T,x) \equiv F(t,x)$ и $G(t+T,x) \equiv G(t,x)$, для любых $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{H}_2$.

Приведем далее необходимые для доказательства теоремы утверждения:

Утверждение 1. Пусть выполнены предположения 1,2 и ξ_s начальное условие такое что $E(\|\xi_s\|^2_{\mathbb{H}_2}) < \infty$, и пусть $X(t,s,\xi_s), t \geqslant s$ обобщенное решение на $[s, +\infty[$. Тогда существуют константы $\omega_1 \in]0,\omega[$ и $K_1 > 0$, зависящие только от β, β_1, C_1, C_2(и не зависящие от s), такие что выполняется следующая оценка:

$$E(\|X(t,s,\xi)\|^2_{\mathbb{H}_2}) \leqslant e^{-\omega_1(t-s)}E(\|\xi_s\|^2_{\mathbb{H}_2}) + K_1. \tag{4}$$

Доказательство. Как отмечено в [2] в силу предположения 2 выполнена оценка:

$$\langle A_n x,x\rangle \leqslant -\frac{n\beta}{n+\beta}\|x\|^2, \text{ для всех } x \in \mathbb{H}_2,$$

где A_n — аппроксимация Иосиды оператора A. Из предположения 1 для всех $x \in \mathbb{H}_2, t \in \mathbb{R}$ получаем следующее неравенство:

$$2\langle A_n x,x\rangle + 2\langle F(\frac{t}{\varepsilon},x),x\rangle + \left\|G(\frac{t}{\varepsilon},x)\right\|^2_{L_2^0} \leqslant -(\frac{n\beta}{n+\beta} - \beta_2)\|x\|^2 + K_1, \tag{5}$$

где $K_1, 0 < \beta_2 < \beta_1$ зависят только от β_1, C_1, C_2.

Пусть X_n — обобщенное решение (фактически сильное решение) следующего уравнения

$$X_n(t) = S_n(t-s)\xi_s + \int_s^t S_n(t-\sigma)F(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_n(\sigma))d\sigma + \int_s^t S_n(t-\sigma)G(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_n(\sigma))dW(\sigma),$$

где S_n полугруппа, порожденная оператором A_n.

Используя формулу Ито для $\|X_n(t)\|^2$ имеем равенство:

$$E(\|X_n(t)\|^2) = E(\|\xi_s\|^2) + 2\int_s^t E\langle[A_n X_n(\sigma) + F(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_n(\sigma))],X_n(\sigma)\rangle d\sigma +$$

$$+\int_s^t E\Big\|G(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_n(\sigma))\Big\|^2_{L_2^0} d\sigma$$

Теперь используя (5), получаем следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}E(\|X_n(t)\|^2) \leqslant -(\frac{n\beta}{n+\beta} - \beta_2)E\|X_n\|^2 + K_1$$

В силу теоремы о дифференциальных неравенствах получаем оценку:

$$E(\|X_n(t)\|^2) \leqslant E\,\|\xi_n(t)\|^2\, e^{\frac{n\beta}{n+\beta} - \beta_2(t-s)} + K_1 \frac{n+\beta}{n\beta - \beta_2(n+\beta)}$$

На основании [2, Proposition 3.1], утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть выполнены предположения 1,2, тогда (3) имеет потраекторно единственное L_2 — ограниченное непрерывное обобщенное решение $X(t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Доказательство. Используя формулу Ито для $\|X_k(t,-n,0) - X_k(t,-m,0)\|^2$ для $t \geqslant -m \geqslant -n$, и для любого ε, получаем:

$$E(\|X_k(t,-n,0) - X_k(t,-m,0)\|^2) = E(\|X_k(-m,-n,0)\|^2) +$$

$$+E\int_{-n}^t 2\langle[A_k[X_k(\sigma,-n,0) - X_k(\sigma,-m,0)] +$$

$$F(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_k(\sigma,-n,0)) - F(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_k(\sigma,-m,0))],\, X_k(\sigma,-n,0) - X_k(\sigma,-m,0)\rangle d\sigma$$

$$+\Big\|G(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_k(\sigma,-n,0)) - G(\frac{\sigma}{\varepsilon},X_k(\sigma,-m,0))\Big\|^2_{L_2^0} d\sigma.$$

Отсюда, рассуждая как в предыдущем утверждении, получаем:

$$\frac{d}{dt}E(\|X_k(t,-n,0) - X_k(t,-m,0)\|^2) \leqslant -(\frac{k\beta}{k+\beta} - \beta_1)E(\|X_k(t,-n,0) - X_k(t,-m,0\|)^2$$

В силу теоремы о дифференциальных неравенствах получаем оценку:

$$E(\|X_k(t,-n,0) - X_k(t,-m,0)\|^2) \leqslant E(\|X_k(-m,-n,0)\|^2)e^{-\frac{k\beta}{k+\beta} - \beta_1(t+n)}$$

Используем утверждение [2, Proposition 3.1] и Утверждение 1 и выводим что

$$E(\|X_k(t,-n,0) - X_k(t,-m,0)\|^2) \leqslant M_1 e^{-\omega(t+n)} \to 0,$$

следовательно,

$$X(t,-n,0) \xrightarrow{L^2} X(t).$$

Ясно, что решение $X(t)$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым и из (4) следует, что оно L^2-ограниченное. Так как $t \geqslant s \geqslant -n$, выполнено равенство:

$$X(t,-n,0) = S_n(t-s)X(s,-n,0) + \int_s^t S(t-\sigma)F(\frac{\sigma}{\varepsilon},X(\sigma,-n,0))d\sigma +$$

$$+\int_s^t S(t-\sigma)G(\frac{\sigma}{\varepsilon}X(\sigma,-n,0))dW(\sigma).$$

Переходя к пределу получаем, что $X(t)$ удовлетворяет следующему равенству

$$X(t) = S(t-s)X(s) + \int_s^t S(t-\sigma)F(\frac{\sigma}{\varepsilon},X(\sigma))d\sigma + \int_s^t S(t-\sigma)G(\frac{\sigma}{\varepsilon},X(\sigma))dW(\sigma).$$

В силу [3] и последнего равенства получаем, что $\{X(t)\}_{t\geqslant s}$ имеет непрерывные версии для каждого $s \in \mathbb{R}$, следовательно $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ имеет непрерывные версии.

Пусть X,Y — два L^2-ограниченных решения уравнения (3). С помощью формулы Ито и утверждения [2, Proposition 3.1] получаем для $t \geqslant -k$

$$E(\|X(t)-Y(t)\|^2) = \lim_{n\to\infty} E(\|X_n(t,-k,X(-k)) - X_n(t,-k,Y(-k))\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} E(\|X(-k)-Y(-k)\|^2)e^{-\frac{n\beta}{n+\beta}-\beta_1}(t+k) \leqslant M_2 e^{-\omega(t+k)} \to 0,$$

при $k \to \infty$.

Таким образом, получаем, что $X(t) = Y(t)$.

Далее докажем, что обобщенное решение стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами будет периодическим.

Теорема 1. Пусть предположения 1,2 выполнены. Тогда при каждом фиксированном ε, единственное L^2-ограниченное обобщенное решение $X(t)_{t\in\mathbb{R}}$ уравнения (3) будет εT-периодическим.

Доказательство. Из-за свойства Маркова и T-периодичности полугруппы $P_{s,t} = E[\varphi(X(t,s,x))], \varphi \in C_b(\mathbb{H}_2)$, достаточно доказать, что $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}(t+\varepsilon T)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Если $\varphi \in C_b(\mathbb{H}_2)$, мы имеем

$$\int_{\mathbb{H}_2} \varphi(x)\widehat{\mu}(t+\varepsilon T)(dx) = \int_\Omega \varphi(X(t+\varepsilon T))dP = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi(X(t+\varepsilon T,-n+\varepsilon T,0))dP =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(P_{t+\varepsilon T,-n+\varepsilon T}\varphi)(0) = \lim_{n\to\infty}(P_{t,-n}\varphi)(0) =$$

$$= \int_\Omega \varphi(X(t)dP = \int_{\mathbb{H}_2}\varphi(x)\widehat{\mu}(t)(dx)$$

Далее докажем следующую лемму:

Лемма 1. При любом фиксированном ε обобщенное εT-периодическое решение X^ε следующего уравнения:

$$X^\varepsilon(t) = S(t-\tau)X(s) + \int_\tau^t S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds + \int_\tau^t S(t-s)G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))dW(s) \qquad (6)$$

удовлетворяет интегральному уравнению следующего вида:

$$X^\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds + \int_{-\infty}^t S(t-s)G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))dW(s), \qquad (7)$$

при $\tau \to -\infty$.

Доказательство. Обобщенное периодическое решение X^ε удовлетворяет уравнению (6). Покажем, что каждый из интегралов этого уравнения сходится при $\tau \to -\infty$.

1. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds$$

Покажем, что этот интеграл сходится по критерию Коши:

$$\left\|\int_{s_1}^{s_2} S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds\right\| \leqslant \int_{s_1}^{s_2} e^{-\beta(t-s)} \left\|F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\| ds.$$

В силу того, что X^ε - периодическое, а значит ограниченное, и из предположения 1, получаем:

$$\int_{s_1}^{s_2} e^{-\beta(t-s)} \left\|F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\| ds \leqslant C_1 \int_{s_1}^{s_2} e^{-\beta(t-s)}ds = C_1 e^{-\beta(t-s)}\Big|_{s_1}^{s_2} = C_1(e^{-\beta(t-s_2)} - e^{-\beta(t-s_1)}).$$

Таким образом мы можем выбрать такой номер N, что для любых s_1 и s_2 будет выполнено

$$\left\|\int_{s_1}^{s_2} S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds\right\| < \gamma.$$

Отсюда получаем, что по критерию Коши интеграл $\int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds$ сходится, а это значит, что интеграл $\int_{\tau}^{t} S(t-s)F(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))ds$ сходится при $\tau \to -\infty$.

2. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))dW(s).$$

Применим тождество Ито и получим следующую оценку:

$$E\left(\left\|\int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))dW(s)\right\|^2\right) = E\int_{-\infty}^{t} e^{-2\beta(t-s)} \left\|G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\|^2 ds$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-2\beta(t-s)} E\left\|G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\|^2 ds$$

Покажем, что интеграл $\int_{s_1}^{s_2} e^{-2\beta(t-s)} E\left\|G(\frac{s}{\varepsilon}, X^\varepsilon(s))\right\|^2 ds$ сходится по критерию Коши.

Так как решение X^ε периодическое, а значит ограниченное, и в силу Предположения 1 для G, получаем что функция $G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))$ ограниченная, таким образом $\left\|G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\|^2 \leqslant C_1$. И отсюда $E\left\|G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\|^2 \leqslant M$.

Таким образом, можем найти такой номер N, что для любых $s_1, s_2 < -N$ будет выполнено:

$$\int_{s_1}^{s_2} e^{-2\beta(t-s)} E\left\|G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))\right\|^2 ds \leqslant \int_{s_1}^{s_2} Me^{-2\beta(t-s)}ds = M\frac{1}{2}(e^{-\beta(t-s_2)} - e^{-\beta(t-s_1)}) < \gamma$$

Критерий Коши выполнен, и из сходимости этого интеграла следует сходимость $\int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))dW(s)$.

Таким образом, интеграл $\int_{\tau}^{t} S(t-s)G(\frac{s}{\varepsilon},X^\varepsilon(s))dW(s)$ сходится при $\tau \to -\infty$.

3. Рассмотрим выражение $S(t-\tau)X(s)$, и покажем, что при $\tau \to -\infty$ оно стремится к 0

$$\|S(t-\tau)X(s)\| \leqslant e^{-\beta(t-\tau)} \|X(s)\|.$$

Так как решение X^ε периодическое, а значит ограниченное, то отсюда следует, что начальное условие $X(s)$ также периодическое, а значит ограниченное, то есть $\|X(s)\| \leqslant M_1$.

Отсюда следует:

$$e^{-\beta(t-\tau)}\,\|X(s)\| \leqslant M_1 e^{-\beta(t-\tau)}.$$

Последнее выражение стремится к 0 при $\tau \to -\infty$. Значит $S(t-\tau)X(s)$ стремится к 0 при $\tau \to -\infty$.

Таким образом, мы показали, что обобщенное периодическое решение X^ε удовлетворяет интегральному уравнению (7).

Прежде чем перейти к основному результату, рассмотрим следующую теорему:

4. ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для того, чтобы перейти к принципу усреднения периодических решений стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, рассмотрим следующую теорему об усреднении почти периодических решений, доказанную в [1].

Рассматриваем уравнение (1) и предположим дальше, что

(i) $W(t)$ это $\mathbb{H}_1$-значный Винеровский процесс с ядерным ковариационным оператором Q, определенный на стохастическом базисе $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}},P)$.

(ii) Существует константа K такая что отображения $F : \mathbb{R}\times\mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ и $G : \mathbb{R}\times\mathbb{H}_2 \to L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ удовлетворяют следующему неравенству

$$\|F(t,x)\|_{\mathbb{H}_2} + \|G(t,x)\|_{L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)} \leqslant K(1+\|x\|_{\mathbb{H}_2})$$

(iii) Функции F и G Липшицевы, то есть существует константа K такая что

$$\|F(t,x)-F(t,y)\|_{\mathbb{H}_2} + \|G(t,x)-G(t,y)\|_{L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)} \leqslant K\,\|x-y\|_{\mathbb{H}_2}$$

для всех $t\in\mathbb{R}$ и $x,y\in\mathbb{H}_2$.

Далее напомним утверждения, рассмотренные в [1]:

Утверждение [1, Proposition 2.4]. Пусть $\mathcal{K}$ множество подмножеств $\mathbb{H}_2$. Пусть $F:\mathbb{R}\times\mathbb{H}_2\to\mathbb{H}_2, (t,x)\mapsto F(t,x)$ почти периодическая, равномерная по x для каждого элемента из множества $\mathcal{K}$. Существует непрерывная функция $F_0:\mathbb{H}_2\to\mathbb{H}_2$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_k^{k+t} F(s,x)ds = F_0(x) \tag{8}$$

для каждого $k\in\mathbb{R}$, равномерная по x для каждого элемента из множества $\mathcal{K}$. Более того, если $F(t,x)$ липшицево по $x\in\mathbb{H}_2$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$, отображение F_0 также липшицево.

Утверждение [1, Proposition 2.5]. Пусть $\mathcal{K}$ множество подмножеств $\mathbb{H}_2$. Пусть $G:\mathbb{R}\times\mathbb{H}_2\to L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$, $t\mapsto G(t,x)$, почти периодическое равномерно по x для каждого элемента из множества $\mathcal{K}$, и пусть $Q\in L(\mathbb{H}_1)$ самосопряженный неотрицательный оператор. Пусть $H_0 = range(Q^{\frac{1}{2}})$, с заданным на нем $\langle x,y\rangle_{range(Q^{\frac{1}{2}})} = \langle Q^{-\frac{1}{2}}(x),Q^{-\frac{1}{2}}(y)\rangle$. Существует непрерывная функция $G_0:\mathbb{H}_2\to L(\mathbb{H}_0,\mathbb{H}_2)$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty}|\frac{1}{t}\int_k^{k+t} G(s,x)QG^*(s,x)ds - G_0(x)QG_0^*(x)|_{\mathcal{N}} = 0 \tag{9}$$

для всех $k\in\mathbb{R}$, равномерная по x для каждого элемента из множества $\mathcal{K}$, где $G^*(s,x) = (G(s,x))^*$ и $G_0^*(x) = (G_0(x))^*$.

Предположим также, что

(iv) Отображения $F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ и $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ удовлетворяют следующим условиям

(a) Для каждого компактного подмножества K из $\mathbb{H}_2$ множества

$$\{F(t,x); t \in \mathbb{R}, x \in K\} \text{ и } \{\Pi(t,x); t \in \mathbb{R}, x \in K\}$$

компактные.

(b) Существуют непрерывные функции $F_0 : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ и $G_0 : \mathbb{H}_2 \to L(\mathbb{H}_0,\mathbb{H}_2)$ удовлетворяющие (8) и (9) соответственно равномерно по x на компактных подмножествах $\mathbb{H}_2$.

Определим Гильбертово пространство $\mathbb{H}_0 = \mathrm{range}(Q^{\frac{1}{2}})$, где Q ковариационный оператор винеровского процесса W.

Напомним, что если X и Y два случайных вектора Банахова пространства $\mathbb{E}$, расстояние L^2-Вассерштейна между распределениями X и Y это

$$W^2(X,Y) = (\inf E(\left\|\widehat{X} - \widehat{Y}\right\|_{\mathbb{E}}^2)^{\frac{1}{2}}$$

где инфимум взят по всем распределениям случайных векторов $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$, удовлетворяющих соотношениям $P \circ (\widehat{X})^{-1} = P \circ (X)^{-1}$ и $P \circ (\widehat{Y})^{-1} = P \circ (Y)^{-1}$.

Если X и Y непрерывные $\mathbb{H}_2$-значные стохастические процессы, для любого интервала $[a,b]$ обозначим как $W^2_{[a,b]}$ расстояние L^2-Вассерштейна между распределениями X и Y, рассматриваемые как $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{H}_2)$-значные случайные величины.

Будем обозначать trQ след оператора Q (см.[3]).

Теперь сформулируем результат, доказательство которого приводится в [1,Theorem 4.2].

Теорема 2 [1, Theorem 4.2]. Пусть предположения (i), (ii), (iii), (iv) выполнены и константа $\theta' = \frac{4K^2}{\delta}(\frac{1}{\delta} + trQ) < 1$. Для каждого фиксированного $\varepsilon \in]0,1[$, пусть X^ε будет обобщенным решением уравнения (7) и пусть X^0 обобщенное решение уравнения

$$X^0(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F_0(X^0(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G_0(X^0(s))dW(s) \tag{10}$$

и является стационарным процессом. Тогда $W^2_{[a,b]}(X^\varepsilon,X^0) \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$ для любого компактного интервала $[a,b]$.

Можем перейти к основному результату статьи, принципу усреднения для периодических решений стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

5. ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1,2 и константа $\theta' = \frac{4{C_2}^2}{\delta}(\frac{1}{\delta} + trQ) < 1$. Тогда Для кажого фиксированного $\varepsilon \in]0,1[$, для обобщенного периодического решения X^ε уравнения (7) и стационарного решения X^0 уравнения (10) справедливо соотношение $W^2_{[a,b]}(X^\varepsilon,X^0) \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$ для любого компактного интервала $[a,b]$.

Доказательство. Достаточно заметить, что периодическое решение стохастического дифференциального уравнения является почти периодическим, следовательно мы можем свести доказательство к применению Теоремы 2 [1, Theorem 4.2]. Повторяя доказательство Теоремы 2 [1,Theorem 4.2], приходим к выводу, что для εT-периодического решения X^ε справедливо $W^2_{[a,b]}(X^\varepsilon,X^0) \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$ для любого компактного интервала $[a,b]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kamenskii, M. Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic coefficients / M. Kamenskii, O. Mellah, P. Raynaud de Fitte // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2015. — V. 427, № 1. — P. 336–364.

2. Prato, G. Da Periodic and almost periodic solutions for semilinear stochastic equations / G. Da Prato, C. Tudor // Stochastic Anal. Appl. — 1995. — V. 13, № 1. — P. 13–33.

3. Prato, G. Da Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — N. 44 in Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. — 454 p.

4. Vrkoc, I. Weak averaging of stochastic evolution equations / I. Vrkoc // Math. Bohem. — 1995. — V. 120, № 1. — P. 91–111.

5. Дороговцев, А. Я. Существование периодических решений абстрактного стохастического уравнения. Асимптотическая периодичность решений задачи Коши / А. Я. Дороговцев // Теория Вероятностей и математическая статистика. — 1988. — Т. 39. — С. 47–52.

6. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

7. Зверева, М. Б. Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием / М. Б. Зверева, М. И. Каменский, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 88–98.

8. Дифференциал Стилтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А. Д. Баев, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.

9. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.

10. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона–Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

11. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

REFERENCES

1. Kamenskii M., Mellah O., Raynaud de Fitte P. Weak averaging of semilinear stochastic differential equations with almost periodic coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, vol. 427, no. 1, pp. 336–364.

2. Prato G.Da, Tudor C. Periodic and almost periodic solutions for semilinear stochastic equations. Stochastic Anal. Appl., 1995, vol. 13, no. 1, pp. 13–33.

3. Prato G.Da, Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. no. 44 in Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 454 p.

4. Vrkoc I. Weak averaging of stochastic evolution equations. Math. Bohem., 1995, vol. 120, no. 1, pp. 91–111.

5. Dorogovtsev A.Y. Existence of periodic solutions for abstract stochastic equations. Asymptotic periodicity of the Cauchy problem. [Dorogovcev A.YA. Sushchestvovanie periodicheskih reshenij abstraktnogo stohasticheskogo uravneniya. Asimptoticheskaya periodichnost' reshenij zadachi Koshi]. *Teoria Veroyatnostei i Matematicheskaya Statistica*

— *Teoriya Veroyatnostej i matematicheskaya statistika*, 1988, vol. 39, pp. 47–52.

6. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

7. Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition. [Zvereva M.B., Kamenskij M.I., SHabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebanij struny s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88–98.

8. Baev A.D., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. The Stieltjes differential in modeling oscillations of a string with localized singularities. [Baev A.D., Zalukaeva ZH.O., Zvereva M.B., SHabrov S.A. Differencial Stilt'esa v modelirovanii kolebanij struny s lokalizovannymi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 73–83.

9. Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davidova M.B. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. [Shabrov S.A., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Davydova M.B. O chisle reshenij nelinejnoj granichnoj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 93–100.

10. Davydova M. B., Shabrov S. A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

11. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

Сидельникова Софья Юрьевна, аспирант, преподаватель кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: sofwik@mail.ru

Sidelnikova Sofya Yurievna, Postgraduate student, teacher of the Department of Functional analysis and operator equations of the Faculty of Mathematics of the Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: sofwik@mail.ru