УДК 517.922

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

И. В. Сапронов

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

Поступила в редакцию 09.10.2020 г.

Аннотация. Изучается интегральное уравнение Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в некотором банаховом пространстве с весом. Оно сводится к интегро-дифференциальному уравнению, в левой части которого стоят два слагаемых. Первому из них соответствует уравнение, для которого строится в явном виде многопараметрическое семейство решений. Для второго слагаемого получаем уравнение с оператором, норма которого в некотором банаховом пространстве сколь угодно мала вблизи нуля. Такое расщепление интегрального оператора позволяет в виде сходящихся рядов строить частное и общее решение интегро-дифференциального уравнения в соответствующем банаховом пространстве. Таким образом, при определенных ограничениях на операторный пучок, соответствующий данному интегральному оператору, ведется построение многопараметрического семейства решений для исходного интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, оператор, операторный пучок, спектр.

VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

I. V. Sapronov

Abstract. We study the Volterra integral equation of the first kind with a singularity and a sufficiently smooth kernel in some Banach space with weight. It reduces to an integro-differential equation, on the left side of which are two terms. The first of them corresponds to an equation for which an explicitly multiparameter family of solutions is constructed. For the second term, we obtain an equation with an operator whose norm in an arbitrary Banach space is arbitrarily small near zero. Such splitting of the integral operator allows one to construct a particular and general solution of the integro-differential equation in the corresponding Banach space in the form of convergent series. Thus, under certain restrictions on the operator bundle corresponding to a given integral operator, a multi-parameter family of solutions is being constructed for the original integral equation.

Keywords: integral equation, operator, operator beam, spectrum.

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на немалое число публикаций, посвященных изучению указанных уравнений, данная тематика остается актуальной и представляет известный интерес. Существенное развитие эта теория получила в серии работ [1]–[3], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и III рода, скалярные решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида. В последние годы исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в бесконечномерных банаховых пространствах [4]–[11].

Целью данной работы является исследование интегрального уравнения Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в некотором банаховом пространстве с весом.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $B([0,\delta],E)$ ограниченных на $[0,\delta]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{B([0,\delta],E)} = \sup_{0\leqslant x\leqslant\delta} \|\psi(x)\|_E.$$

Следуя Н. А. Магницкому [3], рассмотрим семейство банаховых пространств $M^{k,\alpha}_{q,\nu}$, $q \geqslant 1$, $\nu < 0$:

$$M^{k,\alpha}_{q,\nu} = \left\{ \varphi(x) : \varphi^{(i)}(x) = x^{\alpha-qi} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \omega_i(x), \omega_i \in B([0,\delta],E), \|\varphi\|_{M^{k,\alpha}_{q,\nu}} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \|\psi_i\|_{B([0,\delta],E)} \right\}.$$

Рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \delta \tag{1}$$

с интегральным оператором второго порядка. Ядро $K(x,t)$ является заданной функцией со значениями в $L(E)$, $\varphi(x) = \vartheta''(x)$ $\left(\vartheta(x) \in M^{2,-q}_{q,\nu}\right)$ является искомой функцией со значениями в E.

Пусть существуют пределы $C_0 = \lim\limits_{x\to+0} \frac{K(x,x)}{x^{2q}}$, $C_1 = \lim\limits_{x\to+0} \frac{(-1)K'_t(x,x)}{x^q}$, $C_2 = \lim\limits_{x\to+0} \frac{K''_{tt}(x,x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1}.

Это означает, что при достаточно малом x

$$\left\|\frac{K(x,x)}{x^{2q}} - C_0\right\|_{L(E)} < \varepsilon, \quad \left\|\frac{(-1)K'_t(x,x)}{x^q} - C_1\right\|_{L(E)} < \varepsilon, \quad \left\|K''_{tt}(x,x) - C_2\right\|_{L(E)} < \varepsilon. \tag{2}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) = \vartheta''(x)$, где $\vartheta(x) \in M^{2,-q}_{q,\nu}$ тогда и только тогда, когда интегро-дифференциальное уравнение*

$$A\vartheta + D\vartheta = f(x) \tag{3}$$

имеет решение $\vartheta(x) \in M^{2,-q}_{q,\nu}$, где

$$A\vartheta = C_0x^{2q}\vartheta' + C_1x^q\vartheta + C_2\int\limits_0^x \vartheta(t)dt + qC_0x^{2q-1}\vartheta, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} D\vartheta = \left[K(x,x) - C_0x^{2q}\right]\vartheta' + \left[-K'_t(x,x) - C_1x^q\right]\vartheta + \\ + \int\limits_0^x \left[K''_{tt}(x,t) - C_2\right]\vartheta(t)dt - qC_0x^{2q-1}\vartheta. \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство леммы можно легко провести интегрируя по частям $\int\limits_0^x K(x,t)\vartheta''(x)dx$ и используя свойства пространства $M_{q,\nu}^{2,-q}$.

Лемма 2. *Пусть операторный пучок*

$$B_\nu = -C_0\nu + C_1 - C_2\frac{1}{\nu}$$

имеет характеристическое число $\nu < 0$, которому соответствует собственный вектор e_0 и цепочка присоединенных векторов e_1, e_2, ... , e_m, тогда для уравнения $A\vartheta = 0$ существует $m+1$ решений вида

$$\vartheta_p = \frac{1}{x^q} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_p + \bar{e}_{p-1}\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} + ... + \bar{e}_0 \left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^p \right], \quad p = 0,1,...,m. \tag{6}$$

Доказательство. Подставляя (6) в уравнение $A\vartheta = 0$ получаем

$$-C_0\nu e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_p + \bar{e}_{p-1}\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} + ... + \bar{e}_0 \left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^p \right] -$$

$$-C_0 e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_{p-1} + 2\bar{e}_{p-2}\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} + 3\bar{e}_{p-3}\left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^2 + ... + p\bar{e}_0 \left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^{p-1} \right] +$$

$$+C_1\frac{1}{x^q} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \left[\bar{e}_p + \bar{e}_{p-1}\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} + ... + \bar{e}_0 \left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^p \right] -$$

$$-C_2 \left\{ \sum_{d=0}^{p} \bar{e}_{p-d} \sum_{k=0}^{d} (-1)^k e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \frac{d!}{(d-k)!} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{k+1} \left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^{d-k} \right\} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \left(\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q} \right)^k$ $(k = p, p-1, ..., 0)$, получаем следующую систему уравнений

1) $k = p$

$B_\nu\bar{e}_0 = 0$

2) $k = p-1$

$B_\nu\bar{e}_1 + pB'_\nu\bar{e}_0 = 0$

3) $k = p-2$

$\frac{B_\nu^{(2)}}{2!}(p-1)p\bar{e}_0 + \frac{B'_\nu}{1!}(p-1)\bar{e}_1 + B_\nu\bar{e}_2 = 0$

4) $k = p-z$ $(z = 3, \dots, p)$

$\frac{B_\nu^{(z)}}{z!}(p-z+1)\cdot\ldots\cdot p\bar{e}_0 + \frac{B_\nu^{(z-1)}}{(z-1)!}(p-z+1)\cdot\ldots\cdot(p-1)\bar{e}_1 +$

$+\frac{B_\nu^{(z-2)}}{(z-2)!}(p-z+1)\cdot\ldots\cdot(p-2)\bar{e}_2 + \ldots + B'_\nu(p-z+1)\bar{e}_{z-1} + B_\nu\bar{e}_z = 0.$

Решая последовательно данную систему уравнений, получаем $\bar{e}_k = \frac{p!}{(p-k)!}e_k$. Лемма доказана.

Замечание 1. *Пусть для операторного пучка B_ν все характеристические числа отрицательны $\nu_i < 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, k_i - кратность ν_i, $\nu^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\nu_i\}$. Тогда для уравнения $A\vartheta = 0$ существует k линейно независимых решений, принадлежащих пространству $M^{2,-q}_{q,\nu}$, где $k = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$, $\nu^* \leqslant \nu \leqslant 0$.*

Лемма 3. *Операторы A и D действуют из $M^{2,-q}_{q,\nu}$ в $M^{1,0}_{q,\nu}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\|D\|_{M^{2,-q}_{q,\nu} \to M^{1,0}_{q,\nu}} < \varepsilon \quad \text{\textit{при}} \quad 0 \leqslant x \leqslant \delta.$$

Доказательство. Если $\vartheta(x) \in M^{2,-q}_{q,\nu}$, то $\vartheta'(x) \in M^{1,-2q}_{q,\nu}$, $x^{2q}\vartheta' \in M^{1,0}_{q,\nu}$, $x^q\vartheta(x) \in M^{2,0}_{q,\nu} \in M^{1,0}_{q,\nu}$, $\int\limits_0^x \vartheta(t)dt \in M^{3,0}_{q,\nu} \in M^{1,0}_{q,\nu}$, $x^{2q-1}\vartheta(x) \in M^{2,0}_{q,\nu} \in M^{1,0}_{q,\nu}$.
Таким образом, $A\vartheta \in M^{1,0}_{q,\nu}$, $D\vartheta \in M^{1,0}_{q,\nu}$.

1) Оценим норму оператора $-C_0qx^{2q-1}\vartheta$ пространстве $M^{1,0}_{q,\nu}$.

Пусть $\vartheta(x) = \frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_0(x)$, $\vartheta'(x) = \frac{1}{x^{2q}}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_1(x)$, $\vartheta''(x) = \frac{1}{x^{3q}}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_2(x)$ и $\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}} = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant 2} \|\bar{\omega}_i(x)\|_{B([0,\delta],E)}$.

$x^{2q-1}\vartheta(x) = e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_0(x)$, $\left(x^{2q-1}\vartheta(x)\right)' = \frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_1(x)$ и
$\|x^{2q-1}\vartheta\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant 1} \|\bar{\omega}_i(x)\|_{B([0,\delta],E)}$.

Тогда
$e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_0(x) = x^{q-1}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_0$, $\|\omega_0\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \delta^{q-1}\|\bar{\omega}_0\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \delta^{q-1}\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$,

$(2q-1)x^{2q-2}\frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_0(x) + x^{2q-1}\frac{1}{x^{2q}}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_1(x) = \frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_1(x)$,
$(2q-1)x^{2q-2}\bar{\omega}_0(x) + x^{q-1}\bar{\omega}_1(x) = \omega_1(x)$.

Следовательно,
$\|\omega_1\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant (2q-1)\delta^{2q-2}\|\bar{\omega}_0\|_{B([0,\delta],E)} + \delta^{q-1}\|\bar{\omega}_1\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant$
$\leqslant \left((2q-1)\delta^{2q-2} + \delta^{q-1}\right)\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$.

Значит, $\|C_0qx^{2q-1}\vartheta\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} \leqslant q\|C_0\|\left((2q-1)\delta^{2q-2} + \delta^{q-1}\right)\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}} < \varepsilon\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$, если δ удовлетворяет неравенству $q\|C_0\|\left((2q-1)\delta^{2q-2} + \delta^{q-1}\right) < \varepsilon$.

2) Оценим норму оператора $\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^{2q}} - C_0\right]x^{2q}\vartheta'\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}$.

Используя тот факт, что $\lim\limits_{x \to +0}\left\|\frac{K(x,x)}{x^{2q}} - C_0\right\|_{L(E)} = 0$, получаем
$\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^{2q}} - C_0\right]x^{2q}\vartheta'\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} \leqslant \varepsilon_1\left\|x^{2q}\vartheta'\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}$.

Пусть $x^{2q}\vartheta' = e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\bar{\omega}}_0(x)$, $\left(x^{2q}\vartheta'\right)' = \frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\bar{\omega}}_1(x)$, тогда
$x^{2q}\frac{1}{x^{2q}}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_1(x) = e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\bar{\omega}}_0(x)$, $\bar{\omega}_1(x) = \bar{\bar{\omega}}_0(x)$.

Следовательно,

$$\|\bar{\bar{\omega}}_0\|_{B([0,\delta],E)} = \|\bar{\omega}_1\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$$

$$2qx^{2q-1}\vartheta' + x^{2q}\vartheta'' = \frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\bar{\omega}}_1(x) \quad \text{или}$$

$$2qx^{2q-1}\frac{1}{x^{2q}}e^{\nu\int\limits_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_1(x)+x^{2q}\frac{1}{x^{3q}}e^{\nu\int\limits_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_2(x)=\frac{1}{x^q}e^{\nu\int\limits_x^\delta\frac{dt}{t^q}}\bar{\bar{\omega}}_1(x).$$

Отсюда получаем

$$2qx^{q-1}\bar{\omega}_1(x)+\bar{\omega}_2(x)=\bar{\bar{\omega}}_1(x),$$

$$\|\bar{\bar{\omega}}_1\|_{B([0,\delta],E)}\leqslant\|2qx^{q-1}\bar{\omega}_1\|_{B([0,\delta],E)}+\|\bar{\omega}_2\|_{B([0,\delta],E)}\leqslant\left(2q\delta^{q-1}+1\right)\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}.$$

Следовательно,

$$\|x^{2q}\vartheta'\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}\leqslant\left(2q\delta^{q-1}+1\right)\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}\text{ и}$$

$$\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^{2q}}-C_0\right]x^{2q}\vartheta'\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}\leqslant\varepsilon_1\left(2q\delta^{q-1}+1\right)\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}<\varepsilon\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$$

при достаточно малом δ $(0\leqslant x\leqslant\delta)$.

3) Аналогично доказывается, что $\left\|\left[-\frac{K'_t(x,x)}{x^q}-C_1\right]x^q\vartheta\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}<\varepsilon\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$ при достаточно малом δ.

4) Оценим норму оператора $\left\|\int\limits_0^x\left[K''_{tt}(x,t)-C_2\right]\vartheta(t)dt\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}$.

Используя тот факт, что $\lim\limits_{x\to+0}\|[K''_{tt}(x,x)-C_2]\|_{L(E)}=0$ и $\left\|\int\limits_0^x\vartheta(t)dt\right\|_{M^{k+1,\alpha+q}_{q,\nu}}\leqslant C(\nu)\|\vartheta\|_{M^{k,\alpha}_{q,\nu}}$, получаем

$\left\|\int\limits_0^x\left[K''_{tt}(x,t)-C_2\right]\vartheta(t)dt\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}\leqslant\varepsilon_2\left\|\int\limits_0^x\vartheta(t)dt\right\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}\leqslant\varepsilon_2C(\nu)\|\vartheta\|_{M^{0,-q}_{q,\nu}}\leqslant\varepsilon_2C(\nu)\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое что

$$\|D\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}\to M^{1,0}_{q,\nu}}<\varepsilon\quad\text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\delta.$$

Лемма доказана.

Пусть I — тождественный оператор в E, O — нулевой оператор в E.

Лемма 4. *При любой $f(x)\in M^{1,0}_{q,\nu}$ уравнение $A\vartheta=f$ имеет частное решение $\vartheta\in M^{2,-q}_{q,\nu}$, удовлетворяющее условию*

$$\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}}\leqslant\bar{C}_0\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Доказательство. Сведем уравнение $A\vartheta=f$ к системе уравнений, для этого введем новые функции $\int\limits_0^x\vartheta(t)dt=z_1(x)$, $x^q\vartheta(x)=z_2(x)$, тогда получим следующую систему уравнений

$$x^qz'+Bz=\bar{f}(x),\tag{7}$$

где $z=z(x)=\begin{pmatrix}z_1(x)\\z_2(x)\end{pmatrix}$, $B_{E\times E\to E\times E}=\begin{pmatrix}O&-I\\C_0^{-1}C_2&C_0^{-1}C_1\end{pmatrix}$, $\bar{f}(x)=\begin{pmatrix}0\\C_0^{-1}f(x)\end{pmatrix}$ — функция со значениями в пространстве $E\times E$.

Разрешающий оператор уравнения

$$x^q\vartheta'+B\vartheta=0$$

Имеет вид $U(x,s)=e^{\left\{\int\limits_x^s\frac{dt}{t^q}B\right\}}$. Если спектр оператора B лежит в полуплоскости $Re\lambda\leqslant\nu^*<0$, то справедлива оценка

$$\|U(x,s)\|\leqslant Ne^{-\gamma\int\limits_x^s\frac{dt}{t^q}},\quad 0\leqslant x\leqslant s\leqslant\delta,\quad \nu^*<-\gamma<0,\quad N>0,$$

N не зависит от x, s [12].

Так как все характеристические числа ν_i $(i = 1, \ldots, m)$ операторного пучка

$$B_\nu = -\nu C_0 + C_1 - \frac{1}{\nu} C_2$$

отрицательны и спектр операторов B состоит из них, то для разрешающего оператора $U(x,s)$ справедлива соответствующая оценка.

Норму в пространстве $E \times E$ введем следующим образом

$$\|(u_1,u_2)\|_{E\times E} = \|u_1\|_E + \|u_2\|_E.$$

Рассмотрим решение уравнения (7) вида

$$z(x) = \int\limits_\delta^x U(x,s)\bar{f}(s)\frac{ds}{s^q} = \int\limits_\delta^x e^{\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q} B}\bar{f}(s)\frac{ds}{s^q}. \tag{8}$$

Пусть $\vartheta(x) = \frac{1}{x^q} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_0(x)$, $\vartheta'(x) = \frac{1}{x^{2q}} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_1(x)$, $\vartheta''(x) = \frac{1}{x^{3q}} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\omega_2(x)$ $(\vartheta(x) \in M^{2,-q}_{q,\nu})$, $f(x) = e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_0(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x^q} e^{\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}}\bar{\omega}_1(x)$ $(f(x) \in M^{1,0}_{q,\nu})$.

Пусть $-\gamma < \nu < 0$, тогда

$$\left\| \left(e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \int\limits_0^x \vartheta(t)dt, \omega_0(x) \right) \right\|_{E\times E} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_x^\delta N e^{-\gamma\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q}} e^{-\nu\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q}} \frac{ds}{s^q} \left\|C_0^{-1}\right\| \|\bar{\omega}_0\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \int\limits_x^\delta N e^{(-\gamma-\nu)\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q}} \frac{ds}{s^q} \left\|C_0^{-1}\right\| \|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} =$$

$$= -N\frac{1}{\gamma+\nu} e^{(-\gamma-\nu)\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q}} \Bigg|_x^\delta \cdot \left\|C_0^{-1}\right\| \|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} =$$

$$= \left(N\frac{1}{\gamma+\nu} - N\frac{1}{\gamma+\nu} e^{(-\gamma-\nu)\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q}} \right) \left\|C_0^{-1}\right\| \|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{\gamma+\nu} \left\|C_0^{-1}\right\| \|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} = \bar{C}_1 \|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}, \quad \bar{C}_1 = \frac{N}{\gamma+\nu} \left\|C_0^{-1}\right\|.$$

Следовательно,

$$\|\omega_0\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \left\| \left(e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \int\limits_0^x \vartheta(t)dt, \omega_0(x) \right) \right\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \bar{C}_1 \|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Дифференцируя (8), получаем

$$\begin{pmatrix} \vartheta(x) \\ qx^{q-1}\vartheta(x) + x^q\vartheta'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x^q}\bar{f}(x) - \int\limits_\delta^x \frac{1}{x^q} B e^{\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q} B}\bar{f}(s)\frac{ds}{s^q}, \tag{9}$$

тогда

$$\begin{pmatrix} e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} x^q \vartheta(x) \\ e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} q x^{2q-1}\vartheta(x) + \omega_1(x) \end{pmatrix} = e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar f(x) - \int\limits_\delta^x e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} B e^{\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q} B} \bar f(s)\frac{ds}{s^q},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0(x) \\ -qx^{q-1}\omega_0(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_0^{-1}\bar\omega_0(x) \end{pmatrix} - \int\limits_\delta^x B e^{\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q} B} e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar f(s)\frac{ds}{s^q}.$$

Следовательно,

$$\|\omega_1(x)\|_E = \|(0,\omega_1(x))\|_{E\times E} \leqslant \left\|\left(\omega_0(x), qx^{q-1}\omega_0(x)\right)\right\|_{E\times E} + \left\|\left(0, C_0^{-1}\bar\omega_0(x)\right)\right\|_{E\times E} +$$

$$+\left\|\int\limits_\delta^x B e^{\int\limits_x^s \frac{dt}{t^q} B} e^{-\nu\int\limits_x^\delta \frac{dt}{t^q}} \bar f(s)\frac{ds}{s^q}\right\|_{E\times E} \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega_0(x)\|_E + \left\|qx^{q-1}\omega_0(x)\right\|_E + \left\|C_0^{-1}\bar\omega_0(x)\right\|_E + \bar C_2\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega_0(x)\|_E + q\delta^{q-1}\|\omega_0(x)\|_E + \left\|C_0^{-1}\right\|\|\bar\omega_0(x)\|_E + \bar C_2\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}} \leqslant C\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|\omega_1(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant C\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Дифференцируя (9) еще раз и проводя рассуждения аналогичные предыдущим, мы получим оценку для $\omega_2(x)$

$$\|\omega_2(x)\|_{B([0,\delta],E)} \leqslant \bar C\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Следовательно, существует число $\bar C_0$, такое что

$$\|\vartheta\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}} = \max\left\{\|\omega_0\|_{B([0,\delta],E)}, \|\omega_1\|_{B([0,\delta],E)}, \|\omega_2\|_{B([0,\delta],E)}\right\} \leqslant \bar C_0\|f\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть порядок интегрального оператора* $K\varphi = \int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$ *равен 2,* $K(x,t)$ *удовлетворяет дополнительному условию* $C_0 = \lim\limits_{x\to+0}\frac{K(x,x)}{x^{2q}}$,
$C_1 = \lim\limits_{x\to+0}\frac{(-1)K'_t(x,x)}{x^q}$, $C_2 = \lim\limits_{x\to+0}\frac{K''_{tt}(x,x)}{x^0}$, *причем* C_0 *имеет ограниченный обратный* C_0^{-1}*, операторный пучок* $B_\nu = -C_0\nu + C_1 - \frac{1}{\nu}C_2$ *удовлетворяет условию замечания 1,* $f(x)$ *принадлежит пространству* $M^{1,0}_{q,\nu}$*. Тогда при некотором* $\nu^* < \nu < 0$ *существует такое* $\delta > 0$*, что в окрестности* $0 \leqslant x \leqslant \delta$ *уравнение (1) имеет* k *- параметрическое семейство решений* $\varphi(x) = \vartheta''(x)$*, где* $\vartheta(x) \in M^{2,-q}_{q,\nu}$.

Доказательство. Будем искать частное решение уравнения (3) в пространстве $M^{2,-q}_{q,\nu}$ в виде суммы ряда

$$\bar\vartheta(x) = \sum_{h=0}^\infty \bar\vartheta_h(x), \tag{10}$$

где $\bar\vartheta_h(x)$ — частное решение уравнения $A\vartheta_h = f_h$, удовлетворяющее в силу леммы 4 неравенству

$$\left\|\bar\vartheta_h\right\|_{M^{2,-q}_{q,\nu}} \leqslant C\|f_h\|_{M^{1,0}_{q,\nu}}.$$

Такое решение существует при любом h, так как полагаем $f_0(x) = f(x) \in M^{1,0}_{q,\nu}$ и $f_h(x) = -D\bar\vartheta_{h-1} \in M^{1,0}_{q,\nu}$ при $h > 1$.

Покажем, что при достаточно малом x $(0 \leqslant x \leqslant \delta)$ ряд (10) сходится в пространстве $M_{q,\nu}^{2,-q}$. Действительно,

$$\left\|\bar{\vartheta}_h\right\|_{M_{q,\nu}^{2,-q}} \leqslant C \left\|f_h\right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leqslant C\varepsilon \left\|\bar{\vartheta}_{h-1}\right\|_{M_{q,\nu}^{2,-q}} \leqslant \ldots \leqslant (C\varepsilon)^h \left\|\bar{\vartheta}_0\right\|_{M_{q,\nu}^{2,-q}} \leqslant (C\varepsilon)^h C \left\|f\right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}}.$$

Для сходимости ряда (10) достаточно взять δ таким, чтобы $C\varepsilon < 1$. Нетрудно заметить, что функция $\bar{\vartheta}(x)$ удовлетворяет уравнению (3). Действительно,

$$A\bar{\vartheta} + D\bar{\vartheta} = \sum_{h=0}^{\infty}(f_h - f_{h+1}) = f_0(x) = f(x).$$

Общее решение уравнения

$$A\vartheta + D\vartheta = 0$$

в пространстве $M_{q,\nu}^{2,-q}$ будем искать в виде $\omega(x)+W(x)$, где $W(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i\vartheta_i(x)$ - общее решение уравнения $A\vartheta = 0$, поэтому $A\omega + D\omega = -DW \in M_{q,\nu}^{1,.0}$.

Методом, изложенным выше, найдем частное решение ω_i каждого из уравнений $A\omega_i + D\omega_i = -D\vartheta_i$ в пространстве $M_{q,\nu}^{2,-q}$. При этом

$$\left\|\omega_i\right\|_{M_{q,\nu}^{2,-q}} \leqslant \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m} C(C\varepsilon)^i \left\|D\vartheta_i\right\|_{M_{q,\nu}^{1,0}} \leqslant \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon C}\left\|\vartheta_i\right\|_{M_{q,\nu}^{2,-q}}.$$

Следовательно, $\omega_i \neq -\vartheta_i$, взяв δ таким, чтобы $C\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Таким образом, общее решение уравнения $A\vartheta + D\vartheta = 0$ в пространстве $M_{q,\nu}^{2,-q}$ будет иметь вид $\vartheta_0(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} C_i(\omega_1(x)+\vartheta_i(x))$ и нетрудно заметить, что функции $\omega_i(x)+\vartheta_i(x), \quad i = 1,\ldots,k$, линейно независимы.

Следовательно,

$$\varphi(x) = \vartheta''(x) = \left[\bar{\vartheta}(x) + \sum_{i=1}^{k} C_i(\vartheta_i(x) + \omega_i(x))\right]''$$

будет k-параметрическим семейством решений уравнения (1) в пространстве $M_{q,\nu}^{0,-3q}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магницкий, Н. А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра I-го рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. — 1977. — Т. 235, № 4. — С. 772–774.

2. Магницкий, Н. А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 2. — С. 268–271.

3. Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журнал выч. мат. и мат. физ. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 970–988.

4. Крейн, С. Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // Докл. РАН. — 1997. — Т. 355, № 4. — С. 450–452.

5. Крейн, С. Г. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями / С. Г. Крейн, И. В. Сапронов // УМН. — 1995. — Т. 50, вып. 4. — С. 140.

6. Krein, S. G. Singular integral Volterra equations / S. G. Krein // International Congress of Mathematics. Abstracts. — Zurich, 3–11 August, 1994. — P. 125.

7. Krein, S. G. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity / S. G. Krein, I. V. Sapronov // Укр. мат. ж. — 1997. — Т. 49, № 3. — С. 424–432.

8. Сапронов, И. В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2004. — № 6. — С. 48–58.

9. Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2005. — № 2. — С. 81–83.

10. Сапронов, И. В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 11. — С. 45–55.

11. Сапронов, И. В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве / И. В. Сапронов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2011. — № 1. — С. 59–71.

12. Глушко, В. П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения / В. П. Глушко. — Воронеж, 1972.

REFERENCES

1. Magnitsky N.A. On the existence of multiparameter families of solutions of the Volterra integral equation of the first kind. [Magnickij N.A. O sushchestvovanii mnogoparametricheskih semejstv reshenij integral'nogo uravneniya Vol'terra I-go roda]. *DAN SSSR — DAN SSSR*, 1977, vol. 235, no. 4, pp. 772–774.

2. Magnitsky N.A. Multiparameter families of solutions of Volterra integral equations. [Magnickij N.A. Mnogoparametricheskie semejstva reshenij integral'nyh uravnenij Vol'terra]. *DAN SSSR — DAN SSSR*, 1978, vol. 240, no. 2, pp. 268–271.

3. Magnitsky N.A. Volterra Linear Integral Equations of the First and Third Kind. [Magnickij N.A. Linejnye integral'nye uravneniya Vol'terra I i III roda]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 4, pp. 970–988.

4. Krein S.G., Sapronov I.V. On the completeness of the system of solutions of the Volterra integral equation with singularity. [Krejn S.G., Sapronov I.V. O polnote sistemy reshenij integral'nogo uravneniya Vol'terra s osobennost'yu]. *Dokl. RAN — Dokl. RAS*, 1997, vol. 355, no. 4, pp. 450–452.

5. Krein S.G., Sapronov I.V. On Volterra integral equations with singularities. [Крейн С.Г., Сапронов И.В. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1995, vol. 50, iss. 4, pp. 140.

6. Krein S.G. Singular integral Volterra equations. International Congress of Mathematics. Abstracts. Zurich. 3–11 August. 1994. p. 125.

7. Krein S.G., Sapronov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity. [Krein S.G., Sapronov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity]. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal — Ukrainian Mathematical Journal*, 1997, vol. 49, no. 3, pp. 424–432.

8. Sapronov I.V. On a class of solutions of the Volterra equation of the second kind with a regular singularity in a Banach space. [Sapronov I.V. Ob odnom klasse reshenij uravneniya Vol'terra II roda s regulyarnoj osobennost'yu v banahovom prostranstve]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika — Bulletin of Higher Education. Maths*, 2004, no. 6, pp. 48–58.

9. Sapronov I.V. A multi-parameter family of solutions of the Volterra integral equation with a singularity in a Banach space. [Sapronov I.V. Mnogoparametricheskoe semejstvo reshenij integral'nogo uravneniya Vol'terra s osobennost'yu v banahovom prostranstve]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika — Bulletin of Higher Education. Maths*, 2005, no. 2, pp. 81–83.

10. Sapronov I.V. Volterra equation with a singularity in a Banach space. [Sapronov I.V.

Uravnenie Vol'terra s osobennost'yu v banahovom prostranstve]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika — Bulletin of Higher Education. Maths*, 2007, no. 11, pp. 45–55.

11. Sapronov I.V. A multi-parameter family of solutions of the Volterra integral equation with a singularity in a Banach space. [Sapronov I.V. Mnogoparametricheskoe semejstvo reshenij integral'nogo uravneniya Vol'terra s osobennost'yu v banahovom prostranstve]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika — Bulletin of Higher Education. Maths*, 2011, no. 1, pp. 59–71.

12. Glushko V.P. Linear degenerate differential equations. [Glushko V.P. Linejnye vyrozhdayushchiesya differencial'nye uravneniya]. Voronezh, 1972.

Сапронов Иван Васильевич, зав. кафедрой, доцент, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vglta311@mail.ru

Sapronov Ivan Vasilevich, associate professor, Voronezh State Forestry University of G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vglta311@mail.ru