УДК 517.958+519.21+004.7

МОМЕНТЫ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головко

Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С. О. Макарова;
Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет;
Дальневосточный федеральный университет

Поступила в редакцию 01.11.2020 г.

Аннотация. Исследуется система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого λ представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α,β. Доказано необходимое условие существования стационарного режима и неотрицательности стационарных характеристик числа заявок в рассматриваемой СМО. Разработан численный метод решения бесконечных систем дифференциальных уравнений относительно нестационарного и стационарного распределения числа заявок. Найдены моменты числа заявок в стационарном режиме СМО.

Ключевые слова: система массового обслуживания, диффузионный процесс, дважды стохастический пуассоновский входной поток заявок, стационарный режим.

MOMENTS OF REQUESTS NUMBER IN THE QUEUING SYSTEM WITH THE DIFFUSIVE INTENSITY OF THE INPUT STREAM

D. B. Prokopeva, T. A. Zhuk, N. I. Golovko

Abstract. The paper investigates a Queuing system with an infinite storage, one maintenance device and exponential maintenance. The Queuing system input receives twice stochastic a Poisson flow whose intensity λ is a diffusion process with a zero drift coefficient $a = 0$, the diffusion coefficient b and elastic boundaries α,β. The necessary condition for the existence of a stationary mode and for non-negativity of stationary characteristics of the applications number is obtained. A numerical method for solving infinite systems of differential equations with respect to non-stationary and stationary distribution of the applications number is developed. The moments of the requests number are found in stationary mode.

Keywords: Queuing system, diffusion process, double stochastic Poisson input applications stream, stationary regime.

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания применяются в качестве аналитических моделей информационных систем и их элементов, в медицинском обслуживании, при эксплуатации транспортных систем и т. д. Различные типы СМО исследованы и описаны в теории массового обслуживания [1–5]. Актуально моделирование и исследование систем массового обслуживания в информационных сетях. Основными элементами СМО являются входящий поток требований, каналы обслуживания, очередь требований, выходящий поток требований. Процесс поступления требований в СМО является случайным. Фундаментальные исследования в области случайных процессов принадлежат А. Н. Колмогорову, А. Я. Хинчину, Б. В. Гнеденко. Хорошо исследованы марковские случайные процессы, пуассоновские потоки в [6–9]. При моделировании систем массового обслуживания большое внимание уделяется изучению дважды стохастических потоков, как правило, пуассоновских [10]. Исследование динамики крупномасштабных СМО с бесконечным числом обслуживающих приборов, с моментами накопления в очереди представлено в [11, 12]. В данных работах рассмотрен дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого представляет собой марковский процесс со счетным множеством состояний.

При моделировании узлов локальных вычислительных сетей используют системы обслуживания со скачкообразной интенсивностью входного пуассоновского потока [10]. Вывод и анализ уравнений СМО со скачкообразной интенсивностью входного пуассоновского потока представлен в [13–15]. Анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного пуассоновского потока [10]. Системы дифференциальных уравнений относительно нестационарных и стационарных характеристик незавершенной работы представлены в [16] с нулевым и в [17] с ненулевым коэффициентом сноса диффузионной интенсивности входного потока.

Дифференциальные уравнения типа Колмогорова–Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера–Планка относительно нестационарных, стационарных характеристик числа заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного пуассоновского потока получены в [18] с нулевым и в [19] с ненулевым коэффициентом сноса.

В [20] выполнен операторный анализ характеристик числа заявок СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного пуассоновского потока, получено необходимое и достаточное условие существования, единственности и неотрицательности решения системы интегральных уравнений.

В данной работе рассмотрена СМО с диффузионной интенсивностью входного дважды стохастического пуассоновского потока с нулевым коэффициентом сноса, бесконечным накопителем и экспоненциальным обслуживанием на одном приборе. Исследовано необходимое условие существования стационарного режима и неотрицательности характеристик числа заявок, разработан численный метод расчета распределения числа заявок, получены моменты числа заявок в СМО.

ОПИСАНИЕ СМО

Рассматривается система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого λ изменяется на промежутке $[\alpha,\beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α,β.

Согласно определению диффузионный процесс представляет собой марковский случайный процесс второго порядка с независимыми приращениями, диффузионные операторные моменты первого и второго порядка которого равны соответственно коэффициенту сноса a и коэффициенту диффузии b [7].

В дальнейшем интенсивность входного потока в нестационарном режиме будем обозначать через $\lambda(t)$, в стационарном через $\widehat{\lambda}$. Пусть $Q_k(t,x)dx = \mathsf{P}\{\nu(t) = k, x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t, $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\widehat{\nu} = k, x \leqslant \widehat{\lambda} < x + dx\}$, где $\widehat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t,x)$, $q_k(x)$ — плотности по x, представляют собой нестационарные и стационарные характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(t,x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}$, $f(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \widehat{\lambda} < x + dx\}$, $f(t,x), f(x)$ — нестационарная и стационарная плотности интенсивности входного потока, $x \in [\alpha,\beta]$.

Интегралы $\int_\alpha^\beta Q_k(t,x)dx = P_k(t)$, $\int_\alpha^\beta q_k(x)dx = p_k$, $k \geqslant 0$, представляют собой нестационарное и стационарное распределение числа заявок соответственно.

Будем рассматривать функции $f(x)$, $q_k(x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha,\beta]$, функции $f(t,x)$, $Q_k(t,x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $\mathcal{L}$. Функции в $\mathcal{L}$ являются непрерывными и ограниченными при $\{t \geqslant 0,\ x \in [\alpha,\beta]\}$, непрерывными и ограниченными являются их частные производные по t, по x первого и второго порядков при $\{t \geqslant 0,\ x \in (\alpha,\beta)\}$. Будем считать частные производные по x функций первого и второго порядка непрерывно продолжаемыми при $x \to \alpha, x \to \beta$. В дальнейшем будем использовать частные производные данных функций, повторно не оговаривая указанные свойства.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

В [18] получена система дифференциальных уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок $q_k(x), k \geqslant 0$:

1) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) + \frac{b}{2}q_0''(x) = 0, \tag{1}$$

$$xq_{k-1}(x) - (x+\mu)\, q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) + \frac{b}{2}q_k''(x) = 0,\ k \geqslant 1, \tag{2}$$

2) в граничных точках α, β краевые условия

$$q_k'(\alpha) = 0, \quad q_k'(\beta) = 0, \quad k \geqslant 0, \tag{3}$$

3) условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) = f(x). \tag{4}$$

Введем производящую функцию

$$R(x,z) = \sum_{k \geqslant 0} q_k(x) z^k, \qquad |z| \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Обозначим область определения производящей функции

$$D_{xz} = \{(x,z) : x \in [\alpha,\beta],\ |z| \leqslant 1,\ z \in \mathbb{C}\}.$$

Заметим, что ряд $R(x,z)$ равномерно сходится при $|z| \leqslant 1$, так как

$$\left|R(x,z)\right| = \left|\sum_{k\geqslant 0} q_k(x)z^k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} q_k(x)|z^k| = \sum_{k\geqslant 0} q_k(x)|z|^k \leqslant \sum_{k\geqslant 0} q_k(x) = f(x), |z| \leqslant 1.$$

Следовательно, $|R(x,z)| \leqslant f(x)$ при $|z| \leqslant 1$, т. е. производящая функция $R(x,z)$ сходится равномерно по x,z на границе области D_{xz} и внутри ее.

Теорема 1. *Производящая функция $R(x,z)$ удовлетворяет уравнению:*

$$R(x,z)\Big[xz^2 - (x+\mu)z + \mu\Big] + \frac{b}{2} z R''_{xx}(x,z) = (1-z)\mu q_0(x). \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая каждое уравнение в (2) на z^{k+1}, суммируя по индексу $k \geqslant 1$ и добавляя уравнение (1), умноженное на z, получим уравнение относительно производящей функции

$$xz^2R(x,z) - (x+\mu)z\left(R(x,z) - q_0(x)\right) + \mu(R(x,z) -$$

$$-q_0(x) - zq_1(x)) + \frac{b}{2}zR''_{xx}(x,z) - xzq_0(x) + \mu zq_1(x) = 0.$$

Приведение подобных слагаемых дает уравнение (6). *Теорема доказана.*

Аналогичным образом из краевых условий (3) и определения (5) функции $R(x,z)$ получаются краевые условия относительно $R(x,z)$:

$$R'_x(\alpha,z) = 0, R'_x(\beta,z) = 0. \tag{7}$$

Обозначим через Φ_0 оператор

$$\Phi_0 R(x,z) = q_0(x). \tag{8}$$

С учетом обозначения (8) из уравнения (6) и краевых условий для $R(x,z)$ вытекает краевая задача относительно $R(x,z)$:

$$R\,(x,z)\left[xz^2 - (x+\mu)\,z + \mu\right] + \frac{b}{2}zR''_{xx}\,(x,z) - (1-z)\mu\Phi_0 R(x,z) = 0, \tag{9}$$

$$R'_x(\alpha,z) = 0, R'_x(\beta,z) = 0. \tag{10}$$

Из условия нормировки (4) следует

$$R(x,1) = \sum_{k\geqslant 0} q_k(x) = f(x). \tag{11}$$

В результате суммирования уравнений (1) – (3) получим краевую задачу относительно $f(x)$

$$f''(x) = 0, f'(\alpha) = 0,\ f'(\beta) = 0,$$

решение которой представляет собой плотность равномерного распределения

$$f(x) = 1/(\beta - \alpha). \tag{12}$$

Обозначим $\bar{\lambda} = \int_\alpha^\beta xf\,(x)dx$ — среднее значение интенсивности входного потока в стационарном режиме.

Теорема 2. *Необходимое условие существования стационарного режима и неотрицательности характеристик* $q_k(x), k \geqslant 0,$ *имеет вид*

$$\bar{\lambda} < \mu, \tag{13}$$

причем вероятность простоя СМО в стационарном режиме равна

$$p_0 = \int\limits_\alpha^\beta q_0(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta (1 - x/\mu)f(x)\,dx. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представив выражение $xz^2 - (x+\mu)z + \mu$ в виде

$$x(z-1)(z - \frac{\mu}{x}) = (1-z)(\mu - xz)$$

преобразуем уравнение (6) к виду

$$(1-z)(\mu - xz)R(x,z) + \frac{b}{2}zR''_{xx}(x,z) = (1-z)\mu q_0(x). \tag{15}$$

Из граничных условий следует

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} R''_{xx}(x,z)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(R'_x(x,z)\big)'_x\,dx = R'_x(x,z)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \sum_{k\geqslant 0} q'_k(x)z^k\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = 0.$$

Проинтегрировав уравнение (15) по $x \in [\alpha,\beta]$ и разделив уравнение на $1-z,$ получим

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\mu - xz)R(x,z)\,dx = \mu\int\limits_{\alpha}^{\beta} q_0(x)\,dx. \tag{16}$$

При $z = 1$ с учетом (11) равенство (16) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\mu - x)f(x)\,dx = \mu\int\limits_{\alpha}^{\beta} q_0(x)\,dx, \tag{17}$$

откуда

$$p_0 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} q_0(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(1 - x/\mu)f(x)\,dx. \tag{18}$$

Представим уравнение (16) в виде

$$\mu\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sum_{k\geqslant 0} q_k(x)z^k\,dx - z\int\limits_{\alpha}^{\beta} x\sum_{k\geqslant 0} q_k(x)z^k\,dx = \mu\int\limits_{\alpha}^{\beta} q_0(x)\,dx,$$

откуда после приведения подобных слева и справа при z^0 в результате простейших преобразований получим

$$\sum_{k\geqslant 1} z^k\int\limits_{\alpha}^{\beta} q_k(x)\,dx = \sum_{k\geqslant 1} z^k\int\limits_{\alpha}^{\beta}(x/\mu)\,q_{k-1}(x)\,dx.$$

Из последнего равенства при z^k следуют вероятности

$$p_k = \int\limits_{\alpha}^{\beta} q_k(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x/\mu)q_{k-1}(x)\,dx, k \geqslant 1,$$

или

$$p_{k+1} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} q_{k+1}(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(x/\mu)q_k(x)\,dx, k \geqslant 0. \tag{19}$$

Покажем, что при условии (13) вероятность p_0 того, что в СМО в стационарном режиме нет заявок, строго положительна.

Если $p_0 < 0$, то из (18) следует $\bar{\lambda} > \mu$, что противоречит условию (13).

Предположим, что $p_0 = 0$, тогда в (18) либо $q_0(x) \equiv 0$ либо $q_0(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha,\ \beta]$.

При $q_0(x) \equiv 0$ из (19) вытекает $p_1 = 0$. При этом либо $q_1(x) \equiv 0$ либо $q_1(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha,\ \beta]$.

Продолжая рассуждения, из (19) получим, что $q_k(x) \equiv 0, k \geqslant 1$, влечет $p_{k+1} = 0, k \geqslant 1$. При этом либо $q_{k+1}(x) \equiv 0$, либо $q_{k+1}(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha,\ \beta]$.

Если $q_k(x) \equiv 0, k \geqslant 0$, и $p_k = 0, k \geqslant 0$, то это противоречит условию нормировки $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Если $p_0 = 0$, т. е. $\bar{\lambda} = \mu$, функции $q_k(x), k \geqslant 0$, могут принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$, то отсюда следует, что условие $\bar{\lambda} = \mu$ не является необходимым условием неотрицательности $q_k(x), k \geqslant 0$. Следовательно, необходимым условием неотрицательности характеристик $q_k(x), k \geqslant 0$, является условие $\bar{\lambda} < \mu$, т. е. (13). При этом неотрицательные характеристики $q_k(x), k \geqslant 0$, удовлетворяют уравнениям (15),(16).

Таким образом, показано, что существует решение $R(x,z)$ краевой задачи (9)–(11) в виде ряда с неотрицательными коэффициентами $q_k(x), k \geqslant 0$, т. е. показано, что (13) является необходимым условием существования стационарного режима в СМО. *Теорема доказана.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК

В [18] получена система дифференциальных уравнений относительно нестационарных характеристик числа заявок $Q_k(t,x)$, $k \geqslant 0$:

1) во внутренних точках $x \in (\alpha,\beta)$ нестационарные уравнения типа Колмогорова–Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера–Планка [19]

$$\frac{\partial Q_0(t,x)}{\partial t} = -xQ_0(t,x) + \mu Q_1(t,x) + \frac{b}{2}\frac{\partial^2 Q_0(t,x)}{\partial x^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial Q_k(t,x)}{\partial t} = xQ_{k-1}(t,x) - (x+\mu)Q_k(t,x) + \mu Q_{k+1}(t,x) + \\ + \frac{b}{2}\frac{\partial^2 Q_k(t,x)}{\partial x^2}, k \geqslant 1, \tag{21}$$

2) в граничных точках $r_1 = \alpha$, $r_2 = \beta$ краевые условия

$$\frac{b}{2}\frac{\partial Q_k(t,r_i)}{\partial x} = 0,\ k \geqslant 0, i = 1,2, \tag{22}$$

3) начальные условия с начальными плотностями $\xi_k(x)$

$$Q_k(0,x) = \xi_k(x),\ \xi_k(x) \geqslant 0, \int_\alpha^\beta \xi_k(x)\,dx = 1,\ k \geqslant 0, \tag{23}$$

4) условие нормировки

$$\sum_{k \geqslant 0} Q_k(t,x) = f(t,x),\ t \geqslant 0,\ x \in [\alpha,\beta]. \tag{24}$$

Применив к системе уравнений (20)–(24) метод, используемый для вывода (6)–(7), получим уравнение относительно производящей функции $R(t,x,z) = \sum\limits_{k \geqslant 0} Q_k(t,x)z^k$, $|z| \leqslant 1$, $z \in \mathbb{C}$:

$$R(t,x,z)\Big[xz^2 - (x+\mu)z + \mu\Big] + \frac{b}{2}zR''_{xx}(t,x,z) = zR'_t(t,x,z) + (1-z)\mu Q_0(t,x)$$

с краевыми условиями

$$R'_x(t,\alpha,z) = 0,\ R'_x(t,\beta,z) = 0$$

и начальным условием

$$R(0,x,z) = \sum_{k \geqslant 0} Q_k(0,x)z^k.$$

Для наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров, обоснования наблюдаемых свойств стационарных характеристик, сравнения стационарного распределения числа заявок рассматриваемой СМО и классической СМО с интенсивностью входного потока $\bar{\lambda} = (\alpha + \beta)/2$ и экспоненциальным обслуживанием необходимо применить численный метод расчета характеристик числа заявок.

Нестационарное и стационарное распределения числа заявок предлагается вычислять с применением метода Эйлера для решения задачи Коши относительно производящей функции $R(t,x,z)$.

Согласно методу Эйлера значения функции $R(t,x,z)$ для сеточных значений t,x,z вычисляются последовательно в моменты времени $\triangle t, 2\triangle t, 3\triangle t, \ldots$ через значения $R(0,x,z)$ в начальный момент времени $t = 0$. На каждом шаге по t значения функции $R(t+\triangle t,x,z)$ вычисляются по формуле Эйлера

$$R(t + \triangle t,x,z) = R(t,x,z) + \Bigg[R(t,x,z)[xz^2 - (x + \mu)z + \mu] + \frac{b}{2} z R''_{xx}(t,x,z) -$$

$$- (1 - z)\mu Q_0(t,x)\Bigg]\triangle t/z,$$

при этом на каждом шаге по t плотности $Q_k(t,x)$ вычисляются по формуле обратного преобразования Лорана

$$Q_k(t,x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\rho} \frac{R(t,x,\xi)}{\xi^{k+1}}\, d\xi, k \geqslant 0,$$

где i — мнимая единица.

Нестационарное $P_k(t), k \geqslant 0$, и стационарное $q_k(x), p_k$, $k \geqslant 0$, распределения числа заявок вычисляются по формулам

$$P_k(t) = \int_\alpha^\beta Q_k(t,x) dx,$$

$$q_k(x) = \lim_{t\to\infty} Q_k(t,x), p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t). \tag{25}$$

Рассмотренный численный метод назван методом Эйлера–Лорана. Метод Эйлера–Лорана позволяет выполнить численный анализ нестационарного и стационарного распределения числа заявок для значений параметров СМО при различных начальных распределениях числа заявок в СМО. Для применения метода Эйлера–Лорана предварительно необходимо доказать, что при определенных (достаточных) условиях существуют пределы в (25), не зависящие от начальных условий, т. е. существует стационарный режим СМО.

СРЕДНЕЕ И ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК

Рассмотрим моменты числа заявок в СМО. Обозначим через $\mathsf{M}\widehat{\nu}$ — среднее число (математическое ожидание числа) заявок в СМО в стационарном режиме, $\mathsf{M}\widehat{\nu}(x) = E(x)$ — плотность распределения среднего числа заявок по интенсивности λ в стационарном режиме:

$$E(x)dx = \sum_{k\geqslant 1} k\mathsf{P}\{\widehat{\nu} = k, dx < \widehat{\lambda} < x + dx\} = \sum_{k\geqslant 1} k q_k(x)\, dx, \tag{26}$$

где, согласно введенным ранее обозначениям, $\widehat{\nu}$ — количество заявок в стационарном режиме, $\widehat{\lambda}$ — интенсивность входного потока $\lambda(t)$ в стационарном режиме, соответственно. Среднее число заявок равно

$$\mathsf{M}\widehat{\nu} = \sum_{k\geqslant 1} k p_k.$$

Среднее число заявок выражается через плотность распределения среднего числа заявок:

$$\mathsf{M}\widehat{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} E(x)\,dx, E(x) = \sum_{k\geqslant 1} kq_k(x). \tag{27}$$

Обозначим через $\mathsf{D}\widehat{\nu}$ — дисперсию числа заявок в стационарном режиме, $D(x)$ — плотность распределения дисперсии числа заявок по интенсивности $\widehat{\lambda}$ в стационарном режиме:

$$D(x)\,dx = \sum_{k\geqslant 0}(k - \mathsf{M}\widehat{\nu})^2 \mathsf{P}\{\widehat{\nu} = k, x < \widehat{\lambda} < x + dx\} =$$

$$= \sum_{k\geqslant 0}(k - \mathsf{M}\widehat{\nu})^2 q_k(x)\,dx. \tag{28}$$

Дисперсия числа заявок выражается через плотность дисперсии следующим образом:

$$\mathsf{D}\widehat{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} D(x)\,dx, D(x) = \sum_{k\geqslant 0}(k - \mathsf{M}\widehat{\nu})^2 q_k(x).$$

Для применения численного метода расчета характеристик СМО моменты числа заявок можно выразить через производящую функцию $R(x,z)$.

Теорема 3. *В стационарном режиме плотности $E(x)$ и $D(x)$ выражаются через производящую функцию $R(x,z)$ следующим образом:*

$$E(x) = R'_z(x,1), \tag{29}$$

$$D(x) = R''_{zz}(x,1) + R'_z(x,1) - 2R'_z(x,1)\mathsf{M}\widehat{\nu} + (\mathsf{M}\widehat{\nu})^2 f(x). \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем производящую функцию (5) по переменной z

$$R'_z(x,z) = \sum_{k\geqslant 1} kq_k(x)z^{k-1}.$$

При $z = 1$ получим

$$R'_z(x,1) = \sum_{k\geqslant 1} kq_k(x) = E(x).$$

Равенство (29) доказано.

Преобразуем плотность распределения дисперсии числа заявок $D(x)$ диффузионного процесса в (28) к виду

$$D(x) = \sum_{k\geqslant 0} k^2 q_k(x) - 2\sum_{k\geqslant 0} k(\mathsf{M}\widehat{\nu})q_k(x) + \sum_{k\geqslant 0}(\mathsf{M}\widehat{\nu})^2 q_k(x).$$

Так как $\sum_{k\geqslant 1} kq_k(x) = E(x)$ и $\sum_{k\geqslant 0} q_k(x) = f(x)$, то

$$D(x) = \sum_{k\geqslant 0} k^2 q_k(x) - 2E(x)\mathsf{M}\widehat{\nu} + (\mathsf{M}\widehat{\nu})^2 f(x). \tag{31}$$

Вторая производная $R(x,z)$ по z равна

$$R''_{zz}(x,z) = \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)q_k(x)z^{k-2} = \sum_{k\geqslant 2} k^2 q_k(x)z^{k-2} - \sum_{k\geqslant 2} kq_k(x)z^{k-2}.$$

При $z = 1$:

$$R''_{zz}(x,1) = \sum_{k\geqslant 2} k^2 q_k(x) - \sum_{k\geqslant 2} kq_k(x).$$

Прибавим и вычтем $q_1(x)$ в правой части последнего равенства:

$$R''_{zz}(x,1) = \sum_{k\geqslant 2} k^2 q_k(x) + q_1(x) - \sum_{k\geqslant 2} k q_k(x) - q_1(x) = \sum_{k\geqslant 1} k^2 q_k(x) - \sum_{k\geqslant 1} k q_k(x).$$

Следовательно,

$$\sum_{k\geqslant 1} k^2 q_k(x) = R''_{zz}(x,1) + E(x). \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31) и учитывая (29) получим (30). *Теорема доказана.*

Теорема 3 позволяет избежать бесконечных сумм с вероятностями при вычислении моментов числа заявок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена СМО с бесконечным накопителем, экспоненциальным обслуживанием на одном приборе, входным дважды стохастическим пуассоновским потоком заявок с диффузионной интенсивностью с нулевым коэффициентом сноса. Доказано необходимое условие существования стационарного режима и неотрицательности стационарных характеристик числа заявок в СМО. Разработан численный метод расчета распределения числа заявок, названный методом Эйлера–Лорана. Получены моменты числа заявок в стационарном режиме и стационарная вероятность простоя СМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М. : Машиностроение, 1979. — 432 с.

2. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — М. : Наука, 1987. — 336 с.

3. Ивченко, Г. И. Теория массового обслуживания / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. — М. : Высшая школа, 1982. — 256 с.

4. Климов, Г. П. Теория массового обслуживания / Г. П. Климов. — М. : Изд–во Московского университета, 2011. — 312 с.

5. Карташевский, В. Г. Основы теории массового обслуживания / В. Г. Карташевский. — М. : Горячая линия – Телеком, 2013. — 130 с.

6. Булинский, А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 408 с.

7. Баруча - Рид, А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча - Рид. — М. : Наука, 1969. — 511 с.

8. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихомирова, М. А. Миронов. — М. : Советское радио, 1977. — 488 с.

9. Ширяев, А. Н. Вероятностно–статистические методы теории принятия решений / А. Н. Ширяев. — М. : МЦНМО, 2014. — 144 с.

10. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. XI, № 2 (34). — С. 50–64.

11. Vasilyev, S. A. Analysis of Queueing Systems with an Infinite Number of Servers and a Small Parameter / S. A. Vasilyev, G. O. Tsareva // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2018. — V. 26, No 2. — P. 167–175.

12. Massey, W. A. Dinamic rate Erlang-A Queues // W. A. Massey, J. Pender // Queueing Systems. — 2018. — V. 89, No 1. — P. 127–164.

13. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / О. В. Бондрова, Д. С. Крылова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 89–100.

14. Крылова, Д. С. Анализ СМО с резервным прибором и скачкообразной интенсивностью входного потока / Д. С. Крылова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 109–123.

15. Бондрова, О. В. Вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с интегральным оператором / О. В. Бондрова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Дальневосточный математический журнал. — 2017. — Т. 17, № 2. — С. 135–146.

16. Фролова, Е. С. Незавершенная работа в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым коэффициентом сноса / Е. С. Фролова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 1. — С. 32–45.

17. Фролова, Е. С. Вывод уравнений типа Такача с оператором Фоккера – Планка / Е. С. Фролова, Т. А. Жук, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2020. — № 1. — С. 94–107.

18. Прокопьева, Д. Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головко // Известия Калининградского гос. технич. ун-та. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

19. Прокопьева, Д. Б. Вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с оператором Фоккера – Планка / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головко // Дальневосточный математический журнал. — 2020. — Т. 20, № 1. — С. 90–107.

20. Бондрова, О. В. Анализ уравнений СМО со скачкообразной интенсивностью входного потока / О. В. Бондрова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Математические заметки СВФУ. — 2018. — Т. 25, № 3. — С. 18–32.

REFERENCES

1. Kleinrock L. Queueing theory. [Klejnrok L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 1979, 432 p.

2. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Introduction to queueing theory. [Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 1987, 336 p.

3. Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N. Queueing theory. [Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N. Teoriya massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 1982, 256 p.

4. Klimov G.P. Queueing theory. [Klimov G.P. Teoriya massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 2011, 312 p.

5. Kartashevsky V.G. Fundamentals of Queuing theory. [Kartashevsky V.G. Osnovy teorii massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 2013, 130 p.

6. Bulinsky A.V., Shiryaev A.N. Theory of random processes. [Bulinskij A.V., Shiryaev A.N. Teoriya sluchajnyh processov]. Moscow, 2005, 408 p.

7. Bharucha - Reid A.T. Elements of the theory of Markov processes and their applications. [Баруча - Рид, А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения]. Moscow, 1969, 511 p.

8. Tikhonov V.I. Markov processes. [Tihonov V.I. Markovskie processy]. Moscow, 1977, 488 p.

9. Shiryaev A.N. Probabilistic – statistical methods of decision theory. [Shiryaev A.N. Veroyatnostno – statisticheskie metody teorii prinyatiya resheniy]. Moscow, 2014, 144 p.

10. Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonyuk I.I. Research of models of Queuing systems in information networks. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonyuk I.I. Issledovanie modeley sistem massovogo obsluzhivaniya v informacionnyh setyah]. *Sibirskij*

matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal, 2008, vol. XI, no. 2 (34), pp. 50–64.

11. Vasilyev S.A., Tsareva G.O. Analysis of Queueing Systems with an Infinite Number of Servers and a Small Parameter. Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science, 2018, vol.26, no. 2, pp. 167–175.

12. Massey W. A. Dinamic rate Erlang-A Queues. Queueing Systems, 2018, vol. 89, no. 1, pp. 127–164.

13. Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Derivation of equations for Queuing systems with infinite storage and jump-like input flow intensity. [Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravneniy dlya sistem massovogo obsluzhivaniya s beskonechnym nakopitelem i skachkoobraznoy intensivnostyu vhodnogo potoka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 89–100.

14. Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Analysis of the Queueing System with a backup device and a jump-like intensity of the input stream. [Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Analiz SMO s rezervnym priborom i skachkoobraznoy intensivnost'yu vhodnogo potoka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 109–123.

15. Bondrova O.V., Golovko N.I., Zhuk T.A. Derivation of Kolmogorov-Chapman type equations with integral operator. [Bondrova O.V., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravneniy tipa Kolmogorova – Chepmena s integral'nym operatorom]. *Дальневосточный математический журнал — Far Eastern mathematical journal*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 135–146.

16. Frolova E.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Unfinished work in a Queueing System with a diffusive intensity of the input stream with a zero drift coefficient. [Frolova E.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Nezavershennaya rabota v SMO s diffuzionnoy intensivnost'yu vhodnogo potoka s nulevym koefficientom snosa]. *Математические заметки СВФУ — Mathematical notes of North-Eastern Federal University*, 2019, vol. 26, no. 1, pp. 32–45.

17. Frolova E.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Derivation of Takach-type equations with the Fokker – Planck operator. [Frolova E.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravneniy tipa Takacha s operatorom Fokkera – Planka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2020, no. 1, pp. 94–107.

18. Prokopeva D.B., Golovko N.I., Zhuk T.A. Derivation of equations for Queuing systems with diffusive input flow intensity and zero coefficient of demolition. [Prokop'eva D.B., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravneniy dlya sistem massovogo obsluzhivaniya s diffuzionnoy intensivnost'yu vhodnogo potoka i nulevym koefficientom snosa]. *Известия Калининградского гос. технич. ун-та — Izvestiya Kaliningrad state technical University*, 2017, no. 46, pp. 184–193.

19. Prokopeva D.B., Golovko N.I., Zhuk T.A. Derivation of Kolmogorov-Chapman type equations with the Fokker-Planck operator. [Prokop'eva D.B., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravneniy tipa Kolmogorova – Chepmena s operatorom Fokkera – Planka]. *Дальневосточный математический журнал — Far Eastern mathematical journal*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 90–107.

20. Bondrova O.V., Golovko N.I., Zhuk T.A. Analysis of a Queueing System equations with a jump-like intensity of the input stream. [Bondrova O.V., Golovko N.I., Zhuk T.A. Analiz uravneniy SMO so skachkoobraznoy intensivnost'yu vhodnogo potoka]. *Математические заметки СВФУ — Mathematical notes of North-Eastern Federal University*, 2018, vol. 25, no. 3, pp. 18–32.

Прокопьева Дина Борисовна, Доцент кафедры математики, Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С. О. Макарова, Владивосток, Россия
E-mail: prokopievad@yandex.ru

Prokopeva D. B., Docent of the Department mathematics, Pacific Higher Naval School, Vladidostok, Russia
E-mail: prokopievad@yandex.ru

Жук Татьяна Алексеевна, Кандидат физико-математических наук, Доцент кафедры высшей математики, Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток, Россия
E-mail: Tatyana_zhukdv@mail.ru

Zhuk T. A., Docent of the Department higher mathematics, Far Eastern state technical fisheries University, Vladidostok, Russia
E-mail: Tatyana_zhukdv@mail.ru

Головко Николай Иванович, Доктор технических наук, Профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
E-mail: golovko.ni@dvfu.ru

Golovko N. I., doctor of technical sciences, Professor of the Department of algebra, geometry and analysis Far Eastern Federal University, Vladidostok, Russia
E-mail: golovko.ni@dvfu.ru