УДК 517.929

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДРОБНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ, ОБОБЩАЮЩЕГО УРАВНЕНИЕ ТИПА БУССИНЕСКА*

**Г. Г. Петросян**

*Воронежский государственный университет инженерных технологий;*
*Воронежский государственный педагогический университет*

Поступила в редакцию 30.04.2021 г.

**Аннотация**. в настоящей работе доказывается существование решений и компактность множества всех решений задачи Коши для дифференциального включения дробного порядка $1 < \alpha < 2$, обобщающего дробно-дифференциальное уравнение типа Буссинеска, в банаховом пространстве. Статья состоит из трех разделов. Во введении обосновывается актуальность данной проблематики и излагается история вопроса, затем мы приводим необходимые предварительные сведения из теории дробного интегродифференцирования и теории многозначных уплотняющих отображений. В третьем пункте формулируются условия, накладываемые на задачу, и доказываются локальная и глобальная теоремы о существовании интегральных решений, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений.

**Ключевые слова**: дифференциальное включение, дробная производная, задача Коши, уравнение типа Буссинеска, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

# ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A FRACTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSION GENERALIZING A BUSSINESK TYPE EQUATION

**G. G. Petrosyan**

**Abstract**. In this paper we prove the existence of solutions and the compactness of the set of all solutions of the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order $1 < \alpha < 2$, generalizing a fractional differential Boussinesq type equation, in Banach space. The article is divided into three sections. The introduction substantiates the relevance of this problem and outlines the history of the issue, then we give the necessary preliminary information from the theory of fractional integrodifferentiation and the theory of multivalued condensing maps. In the third section we formulate the conditions imposed on the problem and we prove local and global theorems of the existence of mild solutions using the topological degree theory of condensing multivalued maps.

**Keywords**: differential inclusion, fractional derivative, the Cauchy problem, Boussinesq type equation, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился,

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011 и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [1], [2], [3], [4], статьи [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] и др.). Одним из примеров такого рода приложений служит уравнение для движения шара массой $m$ и радиуса $a$ под действием внешней силы $F(t)$ в вязкой среде:

$$mv'(t) = F(t) + W(t), \tag{1}$$

где $W(t)$ — сила сопротивления, которую мы будем считать заданной по формуле

$$W(t) = -6\pi\eta a v(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 v'(t) - 6\pi\eta a^2\sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}}\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{-1/2}v''(s)ds. \tag{2}$$

Здесь первое слагаемое представляет из себя формулу Стокса, второе — инерционную составляющую сопротивления, $\rho$ — плотность среды, $\eta$ — вязкость среды. Если до момента времени $t = 0$ тело покоилось, то нижний предел в интеграле из третьего слагаемого можно заменить нулем. Тогда мы в третьем слагаемом можем обнаружить дробную производную Капуто порядка $3/2$ :

$$6\pi\eta a^2\sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}}\int_0^t(t-s)^{-1/2}v''(s)ds = 12\pi a^2\sqrt{\rho\eta}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t(t-s)^{-1/2}v''(s)ds = 12\pi a^2\sqrt{\rho\eta}\,{}^C D_0^{3/2}v(t). \tag{3}$$

Формулу (2) называют формулой типа Буссинеска, а уравнение (1) уравнением типа Буссинеска или дробно-дифференциальным уравнением Ньютона (см. [17], [18]). Подставляя преобразованное выражение для $W(t)$ в уравнение (1) и перегруппировывая слагаемые мы придем к уравнению:

$${}^C D_0^{3/2}v(t) = \frac{1}{12\pi a^2\sqrt{\rho\eta}}\left(F(t) - 6\pi\eta a v(t) - \left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right)v'(t)\right), \tag{4}$$

которое можно в более общем виде переписать как

$${}^C D_0^{3/2}v(t) = h(t,v(t),v'(t)). \tag{5}$$

В свою очередь последнее уравнение является частным случаем дифференциального включения дробного порядка $\alpha \in (1,2)$ :

$${}^C D_0^{\alpha}x(t) \in H(t,x(t),x'(t)). \tag{6}$$

В настоящей работе мы рассматриваем задачу Коши для дифференциального включения дробного порядка (6) в сепарабельном банаховом пространстве $E$, считая $H : [0,T] \times E \times E \multimap E$ многозначным нелинейным оператором, а начальное условие заданным в виде

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0'. \tag{7}$$

Мы, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см. [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29]), доказываем локальную и глобальную теоремы о существовании интегральных решений, а также компактность множества решений задачи Коши (6)-(7) и тем самым, в частности, устанавливаем существование траектории движения подчиняющегося уравнению (4).

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

### 1.1. Дробный интеграл и дробная производная

Приведем определения дробного интеграла и дробной производной Капуто порядка $\alpha > 0$ (см., например, [1], [2], [3]).

**Определение 1.** Дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds,$$

где $\Gamma$ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

**Определение 2.** Дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (N-1,N]$ от функции $g \in C^N([0,T];E)$, называется функция ${}^C D_0^\alpha g$ следующего вида:

$${}^C D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s)\,ds.$$

### 1.2. Многозначные отображения

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Введем следующие обозначения:
$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$;
$Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A -$ ограниченно$\}$;
$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A -$ выпукло$\}$;
$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A -$ компактно$\}$;
$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$.

**Определение 3.** (см., например, [24], [28]) Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\text{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\text{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки $\Omega$.

Мера некомпактности $\beta$ называется:
1) *монотонной*, если для любых $\Omega_0,\Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$;
если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то $\beta$ называется:
3) *правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$, $\beta(\Omega) = 0$;
4) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

**Определение 4.** (см., например, [24], [28]) Пусть $X$ — метрическое пространство, многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.св.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество $X$ для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x,y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобятся в дальнейшем следующее утверждение (см. [28]).

**Лемма 1.** *Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.св.*

**Определение 5.** (см., например, [24]) Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно мнк $\beta$ ($\beta$ - уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено:

$$\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega).$$

Справедливы следующие теоремы о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см. [24]).

**Теорема 6.** *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — $\beta$ - уплотняющее мультиотображение, где $\beta$ — монотонная несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$: $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ — непустое множество.*

**Теорема 7.** *Пусть $X$ — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$, $\beta$ – монотонная мера некомпактности в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : X \to K(\mathcal{E})$ — замкнутое мультиотображение, которое является $\beta$-уплотняющим, где $\beta$ — монотонная несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Если множество неподвижных точек $\mathcal{F}$: $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ ограничено, то оно компактно.*

### 1.3. Измеримые мультифункции

Напомним некоторые понятия (см., например, [24], [28]). Пусть $E$ — банахово пространство.

**Определение 8.** Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$, для $p \geqslant 1$, называется:

•$L^p$ *-интегрируемой*, если она допускает $L^p$ - интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p\left([0,T]; E\right)$, такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$;

•$L^p$ *-интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\left\{\|g\|_E : g \in G(t)\right\} \leqslant \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех $L^p$ - интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Мультифункция $G$ называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция $G$ называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t),G(t)) = 0,$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства $E$, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если $G$ сильно измерима и $L^p$ - интегрально ограничена, то она $L^p$ - интегрируема. Для $L^p$-интегрируемой мультифункции $G$ определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{\int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G\right\},$$

для любого $t \in [0,T]$.

**Определение 9.** Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E), p \geqslant 1$, называется $L^p$-полукомпактной, если она $L^p$-интегрально ограничена, то есть

$$\|\xi_n(t)\|_E \leqslant v(t) \text{ для всех } n = 1,2,... \text{ и п.в. } t \in [0,T],$$

где $v \in L^p_+([0,T])$, и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в $E$ для п.в. $t \in [0,T]$.

**Лемма 2.** *(см. [24], Теорема 4.2.3.) Пусть $E$ — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ $L^1$ - интегрируемая и $L^1$ - интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leqslant q(t),$$

*для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L^1_+([0,T])$. Тогда*

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leqslant \int_0^t q(s)ds,$$

*для всех $t \in [0,T]$. В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и $L^p$ - интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем:*

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leqslant \int_0^t \chi(G(s))ds,$$

*для всех $t \in [0,T]$.*

**Лемма 3.** *(см. [24], Теорема 4.2.1.) Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0,T];E)$ для всех $n = 1,2,...$ и п.в. $t \in [0,T]$, является $L^1$- интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \leqslant \alpha(t)$$

*для п.в. $t \in [0,T]$, где $\alpha \in L^1_+([0,T])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$ и множество $m_\delta \subset [0,T]$, с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$, а также множество функций $G_\delta \subset L^1([0,T];E)$ со значениями в $K_\delta$, такое, что для каждого $n \geqslant 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой*

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leqslant 2\alpha(t) + \delta, \qquad t \in [0,a]\backslash m_\delta.$$

*Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на $m_\delta$ и эта последовательность слабо компактна.*

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Пространство непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[0,T]$ со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $E$, будем классически обозначать $C^1([0,T];E)$ и считать для $x \in C^1([0,T];E)$ :

$$\|x\|_{C^1([0,T];E)} = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_E + \max_{t\in[0,T]} \|x'(t)\|_E.$$

Из классической теоремы Арцела–Асколи вытекает, что множество $\Omega \subset C^1([0,T];E)$ относительно компактно в пространстве $C^1([0,T];E)$ тогда и только тогда, когда $\Omega$ и $\Omega' = \{x'|x \in \Omega\}$ равностепенно непрерывны на $[0,T]$ и множества $\Omega(t) = \{x(t)|x \in \Omega\}$, $\Omega'(t) = \{x'(t)|x \in \Omega\}$ относительно компактны в пространстве $E$ при каждом $t \in [0,T]$.

Пусть мультиотображение $H : [0,T]\times E\times E \to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(H1)$ для всех $(\eta, \xi) \in E \times E$ мультифункция $H(\cdot,\eta,\xi) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(H2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $H(t,\cdot,\cdot) : E \times E \to Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

$(H3)$ для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что

$$\|H(t,\eta,\xi)\|_E = \sup\{\|h\|_E : h \in H(t,\eta,\xi)\} \leqslant \omega_r(t),$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и всех $(\eta,\xi) \in E \times E$ таких, что $\|\eta\|_E + \|\xi\|_E \leqslant r$.

$(H4)$ существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любых ограниченных множеств $Q,\Delta \subset E$ мы имеем:

$$\chi(H(t,Q,\Delta)) \leqslant \mu(t)\left(\chi(Q) + \chi(\Delta)\right),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где $\chi$ — мера некомпактнотсти Хаусдорфа в $E$.

Для $x \in C^1([0,T];E)$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_H : [0,T] \to Kv(E), \qquad \Phi_H(t) = H(t,x(t),x'(t)).$$

Из условий $(H1)-(H3)$ следует (см. [24], Теорема 1.5.22), что мультифункция $\Phi_H$ является $L^p$-интегрируемой для любого $p \geqslant 1$. Пусть $\mathcal{P}^\infty_H : C^1([0,T];E) \multimap L^\infty([0,T];E)$ — суперпозиционное мультиотображение заданное следующим образом

$$\mathcal{P}^\infty_H(x) = \mathcal{S}^\infty_{\Phi_H}.$$

**Определение 10.** Интегральным решением задачи Коши (6)–(7) на промежутке $[0,\tau]$ называется функция $x \in C^1([0,\tau];E)$:

$$x(t) = x_0 + x_0' t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \qquad t \in [0,\tau],$$

где $h \in \mathcal{P}^\infty_H(x)$.

Для нахождения интегральных решений задачи (6)–(7) введем в рассмотрение следующие отображения:

$$S = S^0 : L^\infty([0,T];E) \to C([0,T];E),\ S^1 = \frac{d}{dt}S : L^\infty([0,T];E) \to C([0,T];E),$$

$$S(h)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,\ S^1(h)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}h(s)ds.$$

**Лемма 4.** *Пусть последовательность* $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ *ограниченная и* $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ *в* $L^1([0,T];E)$. *Тогда* $S^i(\eta_n) \rightharpoonup S^i(\eta_0)$, $i = 0,1$, *в* $C([0,T];E)$.

*Доказательство.* Для $d > 0$ и $i = 0,1$, рассмотрим операторы $S^i_d : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ :

$$S^i_d(\eta_n) = \begin{cases} 0,\ t \leqslant d, \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-i-1}\eta_n(s)ds,\ t > d \end{cases} \tag{8}$$

поскольку интеграл в последнем выражении является непрерывной функцией на $[0,t-d]$, то

$$S^i_d(\eta_n) \rightharpoonup S^i_d(\eta_0),\ i = 0,1, \tag{9}$$

в пространстве $C([0,T];E)$. Пусть $\psi$ — непрерывный линейный функционал на $C([0,T];E)$, т.е., $\psi \in C^*([0,T];E)$, тогда для него справедливо представление

$$\left(\psi,S^i(\eta_n)\right) = \left(\psi,S^i_d(\eta_n)\right) + \left(\psi,S^i(\eta_n) - S^i_d(\eta_n)\right),\ i = 0,1,\ n = 0,1,2,... \tag{10}$$

Из формул определяющих операторы $S_d^i$, мы получаем:

$$\left(S^i\left(\eta_n\right)-S_d^i\left(\eta_n\right)\right)(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-i-1}\eta_n(s)ds,\ t\leqslant d,\\ \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{t-d}^t(t-s)^{\alpha-i-1}\eta_n(s)ds,\ \ t>d.\end{cases}$$

Тогда, имеют место следующие оценки:

$$\left\|S^i\left(\eta_n\right)-S_d^i\left(\eta_n\right)\right\|_{C([0,T];E)}\leqslant\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-i-1}\|\eta_n(s)\|_E ds,\ t\leqslant d,\\ \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{t-d}^t(t-s)^{\alpha-i-1}\|\eta_n(s)\|_E ds,\ \ t>d,\end{cases}$$

$$\leqslant\frac{d^{\alpha-i}}{(\alpha-i)\Gamma(\alpha-i)}\|\eta_n\|_{L^\infty}.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon>0$, мы можем выбрать такое число $d>0$, что выполняется оценка:

$$\left\|S^i\left(\eta_n\right)-S_d^i\left(\eta_n\right)\right\|_{C([0,T];E)}\leqslant\frac{\varepsilon}{4\left\|\psi\right\|_{C*([0,T];E)}}. \tag{11}$$

Используя (9), мы получаем, что $\left(\psi,S_d^i\left(\eta_n\right)\right)\to\left(\psi,S_d^i\left(\eta_0\right)\right)$, но тогда для заданного $\varepsilon$, мы можем выбрать номер $n_0$ такой, что

$$\left(\psi,S_d^i\left(\eta_{n_0}\right)-S_d^i\left(\eta_0\right)\right)<\varepsilon/2. \tag{12}$$

Теперь, учитывая (10), (11), (12), мы получаем:

$$\left(\psi,S^i\left(\eta_n\right)-S^i\left(\eta_0\right)\right)=\left(\psi,S_d^i\left(\eta_n\right)-S_d^i\left(\eta_0\right)\right)+$$

$$+\left(\psi,S^i\left(\eta_n\right)-S_d^i\left(\eta_n\right)\right)+\left(\psi,S_d^i\left(\eta_0\right)-S^i\left(\eta_0\right)\right)<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+2\left\|\psi\right\|_{C*([0,T];E)}\frac{\varepsilon}{4\left\|\psi\right\|_{C*([0,T];E)}}=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

**Лемма 5.** *Для любого компактного множества $K\subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\}\subset L^\infty([0,T];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\}\subset K$ для п.в. $t\in[0,T]$, слабая сходимость $\eta_n\rightharpoonup\eta_0$ в $L^1([0,T];E)$ влечет сходимость $S^i(\eta_n)\to S^i(\eta_0),\ i=0,1,$ в $C([0,T];E)$.*

*Доказательство.* Вначале заметим справедливость оценки:

$$\chi\Bigg(\left\{S^i\left(\eta_n\right)(t)\right\}\Bigg)\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-i-1}\chi(\{\eta_n\})ds=0,$$

из которой следует, что множества $\left\{S^i\left(\eta_n\right)(t)\right\}_{n=1}^\infty\subset E, i=0,1,$ — относительно компактны при каждом $t\in[0,T]$.

С другой стороны, если мы возьмем $t_1,t_2\in[0,T]$ такие, что $0<t_1<t_2\leqslant T$, то мы имеем:

$$\left\|S^i(\eta_n)\left(t_2\right)-S^i(\eta_n)\left(t_1\right)\right\|_E$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\left\|\int_0^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha-i-1}\eta_n(s)ds-\int_0^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha-i-1}\eta_n(s)ds\right\|_E$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-i-1} \eta_n(s) ds \right\|_E + \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_0^{t_1} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) \eta_n(s) ds \right\|_E$$
$$= Z_{1,i} + Z_{2,i},$$

где

$$Z_{1,i} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-i-1} \eta_n(s) ds \right\|_E,$$

$$Z_{2,i} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_0^{t_1} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) \eta_n(s) ds \right\|_E.$$

Используя условие $(H3)$, мы можем для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ подобрать $\delta_{1,i} > 0$ такое, что при $|t_2 - t_1| < \delta_{1,i}$ выполняется оценка:

$$Z_{1,i} \leqslant \frac{\|\omega_K\|_\infty}{\Gamma(\alpha-i-1)} \frac{(t_2-t_1)^{\alpha-i}}{\alpha-i} < \varepsilon_1.$$

Для оценки $Z_{2,i}$, возьмем константу $d_i > 0$, для которой мы имеем:

$$Z_{2,i} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_0^{t_1-d_i} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) \eta_n(s) ds \right\|_E$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_{t_1-d_i}^{t_1} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) \eta_n(s) ds \right\|_E = I_{1,i} + I_{2,i},$$

где

$$I_{1,i} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_0^{t_1-d_i} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) \eta_n(s) ds \right\|_E,$$

$$I_{2,i} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \left\| \int_{t_1-d_i}^{t_1} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) \eta_n(s) ds \right\|_E.$$

Рассмотрим функцию $v : [d_i,T] \to \mathbb{R}, v(\tau) = \tau^{\alpha-i-1}$. Данная функция непрерывна на промежутке $[d_i,T]$, поэтому, в силу теоремы Кантора, она равномерно непрерывна на этом отрезке, т.е., для каждого $\gamma > 0$ найдется $\delta_{2,i} > 0$ такое, что как только $|\tau_2 - \tau_1| < \delta_{2,i} < d_i$, $\tau_1,\tau_2 \in [d_i,T]$, имеет место оценка:

$$\left| \tau_2^{\alpha-i-1} - \tau_1^{\alpha-i-1} \right| < \gamma.$$

Теперь, считая $\tau = t - s$, мы получаем:

$$I_{1,i} \leqslant \frac{\|\omega_K\|_\infty \gamma \, (t_1 - d_i)}{\Gamma(\alpha-i)} < \varepsilon_2.$$

В свою очередь, для $I_{2,i}$ справедлива следующая оценка:

$$I_{2,i} \leqslant \frac{\|\omega_K\|_\infty d_i^{\alpha-i} \left(2 + 2^{\alpha-i}\right)}{(\alpha-i)\Gamma(\alpha-i)} < \varepsilon_3.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать $\delta_i = min\{\delta_{1,i},\delta_{2,i}\}$ такое, что

$$\left\| S^i(\eta_n)(t_2) - S^i(\eta_n)(t_1) \right\|_E \leqslant Z_{1,i} + Z_{2,i} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \varepsilon.$$

Следовательно, множества $\left\{S^i(\eta_n)\right\}$, $i = 0{,}1,$ — равностепенно непрерывны. Из теоремы Арцела–Асколи следует, что $\left\{S^i(\eta_n)\right\} \subset C([0,T];E)$ относительно компактные множества. Из леммы 4 известно, что слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ влечет $S^i(\eta_n) \rightharpoonup S^i(\eta_0)$. Поскольку последовательности $\left\{S^i(\eta_n)\right\}$, $i = 0{,}1,$ относительно компактны, то мы можем утверждать, что $S^i(\eta_n) \to S^i(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$. □

Рассмотрим мультиотображение $G : C^1([0,T];E) \multimap C^1([0,T];E)$, заданное следующим образом:

$$G(x)(t) = x_0 + x_0't + (S \circ \mathcal{P}_H^\infty(x))(t),\ t \in [0,T].$$

Ясно, что функция $x \in C^1([0,T];E)$ — интегральное решение задачи (6)–(7) на промежутке $[0,T]$ тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиотображения $G$. Нашей задачей является показать, что $G$ имеет неподвижную точку.

Для доказательства, того факта, что мультиотображение $G$ является уплотняющим, введем в пространстве $C^1([0,T];E)$ векторную меру некомпактности

$$\nu : Pb(C^1([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, определенную как:

$$\nu(\Omega) = \left(\psi(\Omega), mod_C(\Omega)\right),$$

где

$$\psi(\Omega) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-pt}(\chi(\Omega(t)) + \chi(\Omega'(t))),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для $d_0,d_1 > 0$ и удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{d_0^\alpha}{\alpha} \leqslant \frac{1}{8},\ \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{d_1^{\alpha-1}}{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{13}$$

выполняется следующая оценка:

$$\frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{pd_0^{1-\alpha}} + \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{1}{pd_1^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{4}. \tag{14}$$

Вторая компонента нами определенной меры некомпактности $\nu$, суть модуль равностепенной непрерывности, который определяется в следующем виде:

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\max_{0\leqslant i\leqslant 1}\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}\|x^i(t_1) - x^i(t_2)\|,$$

где для $x \in \Omega:\ x^0(t) = x(t),\ x^1(t) = x'(t),\ t \in [0,T]$.

**Лемма 6.** *Мультиотображение $G$ является уплотняющим относительно меры некомпактности $\nu$.*

*Доказательство.* Пусть $\Omega \subset C^1([0,T];E)$ непустое ограниченное множество и

$$\nu(G(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega), \tag{15}$$

покажем, что $\Omega$ — относительно компактное множество.

Очевидно, что нам достаточно доказать лемму для мультиотображения $S \circ \mathcal{P}_H^\infty$.

Из неравенства (15) следует, что

$$\psi(S \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)) \geqslant \psi(\Omega). \tag{16}$$

Теперь, применяя условие регулярности $(H4)$, мы имеем:

$$\chi(\{h(s) : h \in \mathcal{P}_H^\infty(x),\ x \in \Omega\}) \leqslant \mu(s) \cdot (\chi(\{x(s) : x \in \Omega\}) + \chi(\{(x'(s) : x \in \Omega\}) =$$

$$= e^{ps}\mu(s) \cdot e^{-ps}(\chi(\{x(s) : x \in \Omega\}) + \chi(\{x'(s) : x \in \Omega\}) \leqslant$$

$$\leqslant e^{ps}\mu(s)\psi(\Omega).$$

Воспользовавшись последним неравенством, мы получаем следующие оценки для $i = 0{,}1$:

$$e^{-pt}\chi(S^i \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)) \leqslant e^{-pt}\frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha - i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-i-1} e^{ps}\psi(\Omega)ds$$

$$\leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha - i)}\psi(\Omega)\left(e^{-pt}\int_0^{t-d_i} (t-s)^{\alpha-i-1} e^{ps}ds + e^{-pt}\int_{t-d_i}^t (t-s)^{\alpha-i-1} e^{ps}ds\right)$$

$$\leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha - i)}\psi(\Omega)\left(e^{-pt}\frac{1}{d_i^{1+i-\alpha}}\frac{e^{p(t-d_i)}-1}{p} + \frac{d_i^{\alpha-i}}{\alpha-i}\right)$$

$$\leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha - i)}\psi(\Omega)\left(\frac{1}{d_i^{1+i-\alpha}}\frac{e^{-pd_i}}{p} + \frac{d_i^{\alpha-i}}{\alpha-i}\right)$$

$$\leqslant \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha - i)}\psi(\Omega)\left(\frac{1}{pd_i^{1+i-\alpha}} + \frac{d_i^{\alpha-i}}{\alpha-i}\right).$$

теперь, используя неравенства (13) и (14), мы для последней оценки имеем:

$$\psi(S \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-pt}(\chi(S \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega) + S^1 \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)))$$

$$\leqslant \Big(\frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{pd_0^{1-\alpha}} + \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{d_0^\alpha}{\alpha} + \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{1}{pd_1^{2-\alpha}} + \frac{\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{d_1^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big)\psi(\Omega)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\psi(\Omega).$$

Учитывая неравенство (16) вместе с последним, мы получаем:

$$\psi(\Omega) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\Omega),$$

поэтому

$$\psi(\Omega) = 0,$$

более того

$$\chi(\Omega(t)) = 0$$

для всех $t \in [0,T]$.

Из неравенства (15) следует, что

$$mod_C(S \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)) \geqslant mod_C(\Omega). \tag{17}$$

Теперь докажем, что

$$mod_C\,(S \circ \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)) = 0.$$

Для этого покажем, что множества

$$M = \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds : h \in \mathcal{P}_H^\infty(x),\ x \in \Omega\right\},$$

$$M^1 = \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} h(s)ds : h \in \mathcal{P}_H^\infty(x),\ x \in \Omega \right\},$$

равностепенно непрерывны.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $t_1, t_2 \in [0,T]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, тогда для произвольного $h \in \mathcal{P}_H^\infty(\Omega)$ и $i = 0,1$, мы имеем:

$$\left\| S^i(h)(t_2) - S^i(h)(t_1) \right\|_E$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-i-1} h(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-i-1} h(s)ds \right\|_E$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-i-1} h(s)ds \right\|_E$$

$$+ \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) h(s)ds \right\|_E = Z_{1,i} + Z_{2,i},$$

где

$$Z_{1,i} = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-i-1} h(s)ds \right\|_E,$$

$$Z_{2,i} = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) h(s)ds \right\|_E.$$

Используя условие $(H3)$, мы можем подобрать такое $\delta_{1,i} > 0$, что из неравенства $|t_2 - t_1| < \delta_{1,i}$ для $h \in \mathcal{P}_F^\infty(x), x \in \Omega$ вытекает оценка:

$$Z_{1,i} \leqslant \frac{\|\omega_{r\Omega}\|_\infty}{\Gamma(\alpha-i)} \frac{(t_2-t_1)^{\alpha-i}}{\alpha-i} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Для оценки $Z_{2,i}$ подберем

$$d_i < \delta_{2,i} := \left[ \frac{\frac{\varepsilon}{6}(\alpha-i)\Gamma(\alpha-i)}{\|\omega_{r\Omega}\|_\infty (2^{\alpha-i}+1)} \right]^{\frac{1}{\alpha-i}}.$$

Тогда для $t_1 < d_i$ и $t_2 - t_1 < d_i$, мы имеем

$$Z_{2,i} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-i-1} \|h(s)\|_E ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-i-1} \|h(s)\|_E ds$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-i-1} \|h(s)\|_E ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-i-1} \|h(s)\|_E ds$$

$$\leqslant \frac{\|\omega_{r\Omega}\|_\infty}{\Gamma(\alpha-i)} \left(2^{\alpha-i}+1\right) \frac{d_i^{\alpha-i}}{\alpha-i} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Для $t_1 > d_i$ мы получаем:

$$Z_{2,i} \leqslant \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-i)} \int_0^{t_1-d_i} \left( (t_2-s)^{\alpha-i-1} - (t_1-s)^{\alpha-i-1} \right) h(s)ds \right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{t_1-d_i}^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)h(s)ds\right\|_E=I_{1,i}+I_{2,i},$$

где

$$I_{1,i}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^{t_1-d_i}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)h(s)ds\right\|_E,$$

$$I_{2,i}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{t_1-d_i}^{t_1}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)h(s)ds\right\|_E.$$

Возьмем $d_i$ настолько малым, что

$$I_{2,i}\leqslant\frac{\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty d_i^{\alpha-i}\left(2+2^{\alpha-i}\right)}{(\alpha-i)\Gamma(\alpha-i)}<\frac{\varepsilon}{6}.$$

Поскольку $\chi(\Omega(t))\equiv 0$ и $\chi(\Omega'(t))\equiv 0$, по лемме 3 для каждого $\delta_{3,i}>0$ существует компактное множество $K_{\delta_{3,i}}\subset E$, множество $m_{\delta_{3,i}}\subseteq[0,T]$ с лебеговой мерой $mes(m_{\delta_{3,i}})<\delta_{3,i}$, и множество функций $\Delta\subset L^1([0,T];E)$ со значениями в $K_{\delta_{3,i}}$ такое, что существует функция $b\in\Delta$ для которой

$$\|h(t)-b(t)\|_E\leqslant\delta_{3,i}, t\in[0,T]\backslash m_{\delta_{3,i}}. \tag{18}$$

Более того, функцию $b\in\Delta$ можно выбрать такой, что $b(t)\equiv 0$ на $m_{\delta_{3,i}}$ и множество $\Delta$ слабо компактно в $L^1([0,T];E)$.

Тогда для $I_{1,i}$ справедливы оценки:

$$I_{1,i}\leqslant\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^{t_1-d_i}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s)+b(s))\,ds\right\|_E$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^{t_1-d_i}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_0^{t_1-d_i}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)b(s)ds\right\|_E$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\backslash m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\cap m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\backslash m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)b(s)ds\right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\cap m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)b(s)ds\right\|_E$$

$$=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\backslash m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\cap m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E$$

$$+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\setminus m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)b(s)ds\right\|_E$$
$$=N_{1,i}+N_{2,i}+N_{3,i},$$

где

$$N_{1,i}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\setminus m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E,$$

$$N_{2,i}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\cap m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)(h(s)-b(s))\,ds\right\|_E,$$

$$N_{3,i}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-i)}\int_{[0,t_1-d_i]\setminus m_{\delta_{3,i}}}\left((t_2-s)^{\alpha-i-1}-(t_1-s)^{\alpha-i-1}\right)b(s)ds\right\|_E.$$

Используя (18) мы можем подобрать $\delta_{3,i}>0$ настолько малое, что из неравенства $mes(m_{\delta_{3,i}})<2\frac{\varepsilon}{6}d_i^{1+i-q}$ следует, что $N_{1,i}<\frac{\varepsilon}{6}$ и $N_{2,i}<\frac{\varepsilon}{6}$.

Заметим, что функции из множества $\Delta$ принимают свои значения в $K_{\delta_{3,i}}$, следовательно $\Delta\subset L^\infty([0,T];E)$. Тогда по лемме 5 мы можем выбрать $\delta_{4,i}>0$ таким, что если $|t_2-t_1|<\delta_{4,i}$, то $N_{3,i}<\frac{\varepsilon}{6}$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ мы можем подобрать $\delta_i=min\{\delta_{1,i},\delta_{2,i},\delta_{3,i},\delta_{4,i}\}$ такое, что

$$\left\|S^i(h)(t_2)-S^i(h)(t_1)\right\|_E\leqslant Z_{1,i}+Z_{2,i}\leqslant Z_{1,i}+I_{1,i}+I_{2,i}\leqslant Z_{1,i}+I_{2,i}+N_{1,i}+N_{2,i}+N_{3,i}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon$$

для каждого $h\in\mathcal{P}_H^\infty(\Omega)$ и $|t_2-t_1|<\delta_i$, то есть множества $M$ и $M^1$ являются равностепенно непрерывными.

Таким образом, мы заключаем, что $\Omega$ — относительно компактное множество, а мультиотображение $G$ является уплотняющим относительно меры некомпактности $\nu$. $\square$

**Лемма 7.** *Мультиотображение $G$ является п.н.св.*

*Доказательство.* Легко видеть, что лемму достаточно доказать для мультиоператора $S\circ\mathcal{P}_H^\infty$. Пусть $d>0$ — константа такая, что $\frac{\|\omega_r\|_\infty d^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}<\varepsilon$. Тогда оператор $S$ можно представить в виде:

$$S(h)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-d}^{t}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C([0,T];E)$, такую, что $x_n\to x_0$. Тогда для каждой последовательности $h_n\in\mathcal{P}_H^\infty(x_n)$, $n\geqslant 1$ для п.в. $t\in[0,T]$, множество $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, по условию $(H4)$, относительно компактно в $L^1([0,T];E)$, поэтому $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ — $L^1$-полукомпактна. В силу критерия Дистеля (см. [30]) мы можем предположить, без ограничения общности, что $h_n\xrightarrow{L^1}h_0$. Учитывая, что $L^\infty\subset L^1$, по лемме Мазура существует двойная последовательность $\{\beta_{ik}\}_{i=1}^\infty{}_{k=1}^\infty$, такая что $\beta_{ik}\geqslant 0,\Sigma_{k=i}^\infty\beta_{ik}=1$, $\beta_{ik}=0$, для $k\geqslant k_0(i)$ и $\widetilde{h}_i=\Sigma_{k=i}^\infty\beta_{ik}h_k\xrightarrow{L^1}h_0$. В силу леммы 5 $h_0\in\mathcal{S}_{\Phi_H}^1$, но последовательность $h_n$ ограничена, поэтому $h_0\in\mathcal{S}_{\Phi_H}^\infty$. Рассмотрим теперь последовательность $z_n=S\widetilde{h}_n$, $n\geqslant 1$ :

$$z_n(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}\widetilde{h}_n(s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-d}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\widetilde{h}_n(s)ds.$$

Так как $\left\{\widetilde{h}_n\right\} \subset L^\infty([0,T];E)$, то переходя к пределу в последнем, при $n \to \infty$, и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, в силу малости $\varepsilon$ мы имеем:

$$z_0(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}h_0(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-d}^{t}(t-s)^{\alpha-1}h_0(s)ds,$$

следовательно $z_0 \in S \circ \mathcal{P}_H^\infty(x_0)$, кроме того, так как $\left\{\widetilde{h}_n\right\}_{n=1}^\infty$ $L^1$-полукомпактная последовательность, то $\left\{S\widetilde{h}_n\right\}_{n=1}^\infty \subset C([0,T];E)$ относительно компактное множество. Таким образом мы получаем, что мультиотображение $S \circ \mathcal{P}_H^\infty$ является замкнутым с компактными значениями, а так же квазикомпактным, поэтому, в силу леммы 1, $S \circ \mathcal{P}_H^\infty$ — п.н.св. □

Теперь мы в состоянии доказать локальную теорему о существовании решений.

**Теорема 11.** *При выполнении условий* $(H1)-(H4)$ *существует* $\tau \in (0,T]$ *такое, что множество интегральных решений задачи Коши* (6) - (7) $\Sigma_{x_0}^H[0,\tau]$ *на промежутке* $[0,\tau]$ *является непустым подмножеством пространства* $C^1([0,\tau];E)$.

*Доказательство.* Возьмем $r > 0$ и подберем $0 < \tau_1 < T$ такое, что

$$\left\|x_0' \cdot t\right\|_E \leqslant r/2 \text{ для всех } t \in [0,\tau_1]. \tag{19}$$

Пусть $B[x_0, R] \subset E$ — замкнутый шар с центром $x_0$ и радиусом $R = \|x_0\|_E + r$. Возьмем $\tau_2, \tau_3 \in (0,T]$ такими, что

$$\frac{\|\omega_R\|_\infty \tau_2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \leqslant r/4,\ \frac{\|\omega_R\|_\infty \tau_3^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} \leqslant r/4, \tag{20}$$

где $\omega_R$ — функция из условия $(H3)$.

Из лемм 6 и 7 известно, что мультиоператор $G$ п.н.св. и $\nu$-уплотняющий. Возьмем $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ и рассмотрим замкнутый шар $B[x^0,r] \subset C^1([0,\tau];E)$, где $x^0$ — функция тождественно равная $x_0$. Покажем теперь, что мультиоператор $G$ преобразует шар $B[x^0,r]$ в себя. Если $x \in B[x^0,r]$, то $\|x\|_{C^1([0,\tau];E)} \leqslant R$ и из условия $(H3)$ мы имеем

$$\|h(t)\|_E \leqslant \omega_R(t),\ \text{ п.в. } t \in [0,\tau],$$

для всех $h \in \mathcal{P}_H^\infty(x)$. Если $y \in G(x)$, то

$$y(t) = x_0 + x_0' \cdot t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,\ h \in \mathcal{P}_H^\infty(x).$$

Используя неравенства (19) и (20), мы получаем следующие оценки:

$$\left\|y(t) - x^0\right\|_E \leqslant \left\|x_0' \cdot t\right\|_E + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|h(s)\|_E\, ds$$

$$\leqslant \left\|x_0' t\right\|_E + \frac{\|\omega_R\|_\infty \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \leqslant r/2 + r/4 \leqslant 3r/4;$$

$$\left\|y'(t)\right\|_E \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\|h(s)\|_E\, ds \leqslant \frac{\|\omega_R\|_\infty \tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} \leqslant r/4.$$

Тогда

$$\rho_{C^1}(y,x^0) = \max_{t\in[0,\tau]}\left\|y(t) - x^0\right\|_E + \max_{t\in[0,\tau]}\left\|y'(t)\right\|_E \leqslant 3r/4 + r/4 = r,$$

следовательно $y \in B[x^0,r]$. Теперь, ссылаясь на теорему 6, мы получаем желаемый результат. □

Перейдем к доказательству глобальной теоремы о существовании решений.

**Теорема 12.** *При выполнении условий* $(H1)$, $(H2)$, $(H4)$, *и условия подлинейного роста*

$(H'3)$ *существует функция* $\gamma \in L^{\infty}_{+}([0,T])$ *такая, что*

$$\|H(t,x,y)\|_E \leqslant \gamma(t)(1 + \|x\|_E + \|y\|_E) \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

*множество всех интегральных решений задачи Коши* (6) - (7) $\Sigma^H_{x_0}[0,T]$ *является непустым компактным подмножеством пространства* $C^1([0,T];E)$.

*Доказательство.* Ведем эквивалентную норму в пространстве $C^1([0,T];E)$ :

$$\|x\|_* = \max_{t\in[0,T]} e^{-pt}\,\|x(t)\|_E + \max_{t\in[0,T]} e^{-pt}\,\|x'(t)\|_E\,,$$

где константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1}{pd^{2-\alpha}}\left(\frac{d}{\alpha}+1\right)+\frac{d^\alpha}{\alpha^2}+\frac{d^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right) \leqslant N < 1$$

В пространстве $C^1([0,T];E)$ с нормой $\|\cdot\|_*$, рассмотрим замкнутый шар

$$B[0,r] = \left\{x \in C^1([0,T];E) |\, \|x\|_* \leqslant r\right\},$$

где $r > 0$ выбрано таким, что

$$r \geqslant \left(\|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot(T+1) + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T}{\alpha}+1\right)\right)(1-N)^{-1}.$$

Заметим, что из последнего неравенства, вытекает следующая оценка:

$$\|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot(T+1) + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T}{\alpha}+1\right) + Nr \leqslant r.$$

Докажем, что мультиотображение $G$ преобразует шар $B[0,r]$ в себя. Пусть $x \in B[0,r]$ и $y \in G(x)$, тогда для каждого $h \in \mathcal{P}^{\infty}_{H}(x)$ справедливы следующие оценки

$$e^{-pt}\,\|y(t)\|_E \leqslant e^{-pt}\,\|x_0\|_E + e^{-pt}\,\|x_0'\cdot t\|_E + e^{-pt}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\|h(s)\|_E\,ds$$

$$\leqslant \|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot T + e^{-pt}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(t)(1+\|x(s)\|_E + \|x'(s)\|_E)ds$$

$$\leqslant \|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot T + e^{-pt}\frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{ps}e^{-ps}(\|x(s)\|_E + \|x'(s)\|_E)ds\right)$$

$$\leqslant \|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot T + e^{-pt}\frac{\|\gamma\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_*\frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{ps}ds$$

$$\leqslant \|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot T + \frac{\|\gamma\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_*\frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}e^{-pt}\left(\int_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}e^{ps}ds + \int_{t-d}^t (t-s)^{\alpha-1}e^{ps}ds\right)$$

$$\leqslant \|x_0\|_E + \|x_0'\|_E\cdot T + \frac{\|\gamma\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_*\frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-\alpha}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p} + \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)$$

$$\leqslant \left\|x_0\right\|_E + \left\|x_0'\right\|_E \cdot T + \frac{\|\gamma\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}} + \frac{d^\alpha}{\alpha}\right).$$

Аналогичным образом мы получаем оценку для производной функции $y \in G(x)$

$$e^{-pt}\left\|y'(t)\right\|_E \leqslant e^{-pt}\left\|x_0'\right\|_E + e^{-pt}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\left\|h(s)\right\|_E ds$$

$$\leqslant \left\|x_0'\right\|_E + e^{-pt}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\gamma(t)(1+\left\|x(s)\right\|_E + \left\|x'(s)\right\|_E)ds$$

$$\leqslant \left\|x_0'\right\|_E + e^{-pt}\frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-2}e^{ps}e^{-ps}(\left\|x(s)\right\|_E + \left\|x'(s)\right\|_E)ds\right)$$

$$\leqslant \left\|x_0'\right\|_E + e^{-pt}\frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}e^{ps}ds$$

$$\leqslant \left\|x_0'\right\|_E + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}e^{-pt}\left(\int_0^{t-d} (t-s)^{\alpha-2}e^{ps}ds + \int_{t-d}^t (t-s)^{\alpha-2}e^{ps}ds\right)$$

$$\leqslant \left\|x_0'\right\|_E + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{2-\alpha}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p} + \frac{d^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right)$$

$$\leqslant \left\|x_0'\right\|_E + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1}{pd^{2-\alpha}} + \frac{d^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right).$$

Таким образом

$$\|y\|_* \leqslant \left\|x_0\right\|_E + \left\|x_0'\right\|_E \cdot T + \frac{\|\gamma\|_\infty T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}} + \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)$$

$$+ \left\|x_0'\right\|_E + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1}{pd^{2-\alpha}} + \frac{d^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right)$$

$$\leqslant \left\|x_0\right\|_E + \left\|x_0'\right\|_E \cdot (T+1) + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T}{\alpha}+1\right)$$

$$+ \|x\|_* \frac{\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1}{p\alpha d^{1-\alpha}} + \frac{d^\alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{pd^{2-\alpha}} + \frac{d^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right)$$

$$\leqslant \left\|x_0\right\|_E + \left\|x_0'\right\|_E \cdot (T+1) + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T}{\alpha}+1\right) + \|x\|_* N \leqslant r.$$

Из лемм 6 и 7 известно, что мультиоператор $G$ п.н.св. и $\nu$-уплотняющий. Используя теорему 6, мы получаем, что множество $\Sigma_{x_0}^H[0,T]$ не пусто.

Покажем теперь, что множество $\Sigma_{x_0}^H[0,T]$ априори ограниченно. Действительно, из выше полученных оценок следует, что для $x \in \Sigma_{x_0}^H[0,T]$ и $h \in \mathcal{P}_H^\infty(x)$ мы имеем:

$$\|x\|_* \leqslant \left\|x_0\right\|_E + \left\|x_0'\right\|_E \cdot (T+1) + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T}{\alpha}+1\right) + \|x\|_* N,$$

из которой следует, что

$$\|x\|_* \leqslant \left(\left\|x_0\right\|_E + \left\|x_0'\right\|_E \cdot (T+1) + \frac{\|\gamma\|_\infty T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T}{\alpha}+1\right)\right)(1-N)^{-1}.$$

Применяя теорему 7, мы получаем, что множество $\Sigma_{x_0}^H[0,T]$ компактно. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baleanu, D. Fractional Calculus Models and Numerical Methods / D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo. — New York : World Scientific Publishing, 2012. — 400 p.

2. Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam : North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B. V., 2006. — 540 p.

3. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999. — 340 p.

4. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays / T. D. Ke, V. Obukhovskii, N.-C. Wong, J.-C. Yao // Applicable Analysis. — 2013. — V. 92, № 1. — P. 115–137.

5. Петросян, Г. Г. О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка / Г. Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 123. — С. 524–530.

6. Петросян, Г. Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г. Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1355–1358.

7. Петросян, Г. Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования / Г. Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, № 131. — С. 284–289.

8. Петросян, Г. Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве / Г. Г. Петросян// Уфимский математический журнал. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 71–82.

9. Петросян, Г. Г. Об одной задаче управляемости для дифференциального включения с дробной производной Капуто / Г. Г. Петросян, О. Ю. Королева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 124. — С. 679–684.

10. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space / M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2019. — V. 20, № 9. — P. 1919–1935.

11. Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. 2019. — V. 30, № 2.

12. Kamenskii, M. The Semidiscretization method for differential inclusions of fractional order / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 125–130.

13. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2019. — V. 7, № 12. — P. 5–19.

14. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space / M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Mathematics. — 2021. — V. 9, iss. 2. — P. 136–154.

15. Kamenskii, M. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space / M. Kamenskii, G. Petrosyan, C.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2021. — V. 5, № 1. — P. 155–177.

16. Petrosyan, G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order / G. Petrosyan // The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics. — 2020. — V. 34. — P. 51–66.

17. Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск : Артишок,

2008. — 512 с.

18. Работников, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работников. — М. : Наука, 1966. — 752 с.

19. Ахмеров, Р. Р. Ко второй теореме Н. Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10, № 3. — С. 537.

20. Каменский, М. И. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Каменский, О. Ю. Макаренков, П. Нистри // Доклады Академии наук. — 2003. — Т. 388, № 4. — С. 439–442.

21. Каменский, М. И. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети / М. И. Каменский, О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный // Доклады Академии наук. — 1999. — Т. 368, № 2. — С. 157–159.

22. Gurova, I. N. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations / I. N. Gurova, M. I. Kamenskii // Differential Equations. — 1996. — V. 32, № 1. — P. 106–112.

23. Johnson, R. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods / R. Johnson, P. Nistri, M. Kamenskii // Journal of Differential Equations. — 1997. — V. 140, № 1. — P. 186–208.

24. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 2001.

25. Kamenskii, M. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2011. — V. 23, № 3. — P. 425–435.

26. Kamenskii, M. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii // Nonlinear Analysis. — 1993. — V. 20, № 7. — P. 781–792.

27. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation / M. Kamenskii, P. Nistri, P. Zecca, V. Obukhovskii // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1994. — V. 82, № 3. — P. 503–517.

28. Obukhovskii, V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gelman. — Singapore: World Scientific, 2020.

29. On asymptotics of solutions for some classes of differential inclusions via the generalized guiding functions method / V. Obukhovskii, M. Kamenskii, S. Kornev, Y. C. Liou // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2017. — V. 18, № 5. — P. 967–975.

30. Diestel, J. Weak Compactness in $L^1(\mu,X)$, / J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 118. — P. 447–453.

## REFERENCES

1. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. Fractional Calculus Models and Numerical Methods. New York, World Scientific Publishing, 2012, 400 p.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., 2006, 540 p.

3. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego, Academic Press, 1999, 340 p.

4. Ke T.D., Obukhovskii V.V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays. Applicable Analysis, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115–137.

5. Petrosyan G.G. On the formal representation of solutions of differential equations of fractional order. [Petrosyan G.G. O formal'nom predstavlenii resheniy differentsial'nyh uravneniy drobnogo poryadka]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki — Tambov*

*University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 524–530.

6. Petrosyan G.G. A theorem on the weak closure of superposition multioperators. [Petrosyan G.G. Ob odnoy teoreme o slaboy zamknutosti superpozicionogo multioperatora]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki — Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1355–1358.

7. Petrosyan G.G. On adjoint operators for fractional differentiation operators. [Petrosyan G.G. O sopryazhennykh operatorakh dlya operatorov drobnogo differentsirovaniya]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika — Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 284–289.

8. Petrosyan G. On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space. [Petrosyan G.G. Ob antiperiodicheskoj kraevoj zadache dlya polulinejnogo differencial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s otklonyayushchimsya argumentom v banahovom prostranstve]. *Ufimskij matematicheskij zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 71–82.

9. Petrosyan G.G, Koroleva O.Yu. On a controllability problem for a differential inclusion with fractional derivatives of Caputo. [Petrosyan G.G, Koroleva O.Yu. Ob odnoy zadache upravlyaemosti dlya differentsial'nogo vklyucheniya s drobnoy proizvodnoy Kaputo]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki — Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 679–684.

10. Afanasova M., Liou Y. Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 1919–1935.

11. Kamenskii M., Obukhoskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions. Fixed Point Theory and Applications, 2019, vol. 30, no. 2.

12. Kamenskii M., Obukhoskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. The Semidiscretization method for differential inclusions of fractional order. Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 125–130.

13. Kamenskii M., Obukhoskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. Mathematics, 2019, vol. 7, no. 12, pp. 5–19.

14. Kamenskii M., Obukhoskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. Mathematics, 2021, vol. 9, iss. 2, pp. 136–154.

15. Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen C.-F. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 2021, vol. 5, no. 1, pp. 155–177.

16. Petrosyan G. Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order. The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics, 2020, vol. 34, pp. 51–66.

17. Uchaikin V.V. Fractional derivative method. [Uchaikin V.V. Metod drobnih proizvodnih]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 512 p.

18. Rabotnikov Yu.N. Creep of structural elements. [Rabotnikov Yu.N. Polzuchest elementov konstrukcii]. Moscow, Nauka, 1966, 752 p.

19. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I. To the second theorem of N.N. Bogolyubov in the averaging principle for functional differential equations of neutral type. [Akhmerov R.R., Kamenskii M.I. Ko vtoroi teoreme N.N. Bogolyubova v principe usredneniya dlya funkcionalno-differencialnikh uravneniy]. *Differencialnie uravneniya — Differential Equations*, 1974, vol. 10, no. 3, p. 537.

20. Kamenskii M.I., Makarenkov O.Yu., Nistri P. A new approach to the theory of ordinary

differential equations with a small parameter. [Kamenskii M.I., Makarenkov O.Yu., Nistri P. Ob odnom podhode v teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2003, vol. 388, no. 4, pp. 439–442.

21. Kamenskii M.I., Penkin O.M., Pokornyi Yu.V. A semigroup in the diffusion problem on a spatial mesh. [Kamenskii M.I., Penkin O.M., Pokornyi Yu.V. O polugruppe v zadache diffuzii na prostranstvennoj seti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 368, no. 2, pp. 157–159.

22. Gurova I.N., Kamenskii M.I. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations. Differential Equations, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 106–112.

23. Johnson R., Nistri P., Kamenskii M. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods. Journal of Differential Equations, 1997, vol. 140, no. 1, pp. 186–208.

24. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin–New-York, Walter de Gruyter, 2001.

25. Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2011, vol. 23, no. 3, pp. 425–435.

26. Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1993, vol. 20, no. 7, pp. 781–792.

27. Kamenskii M.I., Nistri P., Zecca P., Obukhovskii V.V. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, vol. 82, no. 3, pp. 503–517.

28. Obukhovskii V., Gelman B. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. Singapore, World Scientific, 2020.

29. Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.C. On asymptotics of solutions for some classes of differential inclusions via the generalized guiding functions method. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 967–975.

30. Diestel J., Ruess W.M., Schachermayer W. Weak Compactness in $L^1(\mu,X)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, vol. 118, pp. 447–453.

*Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет инженерных технологий, ведущий научный сотрудник, Научно-образовательный центр; Воронежский государственный педагогический университет, доцент кафедры высшей математики*
*E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru*

*Petrosyan Garik, Candidate of Physical and Mathematical Science, Voronezh State University of Engineering Technologies, Leading Researcher, Research and Educational Center; Voronezh State Pedagogical University, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh, Russia*
*E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru*