УДК 517.911.5

О СЛУЧАЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛАХ И АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ*

С. В. Корнев, М. М. Кулманакова, Е. Л. Ульянова

Воронежский государственный педагогический университет;
ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина";
Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.

Аннотация. В работе представлено исследование асимптотического поведения решений случайного функционально-дифференциального включения вида

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega,t,x_t) \quad \text{п.в.} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для всех $\omega \in \Omega$, где мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию типа подлинейного роста и является случайным u-мультиоператором, т. е. оно измеримо относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$, и $F(\omega, \cdot, \cdot) \colon \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$.

На основе метода случайных негладких интегральных направляющих потенциалов получена односторонняя оценка решений такого типа случайных функционально-дифференциальных включений.

Ключевые слова: случайное мультиотображение, случайное функционально-дифференциальное включение, случайный негладкий интегральный направляющий потенциал, асимптотическое поведение решений.

ON RANDOM INTEGRAL GUIDING POTENTIALS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO RANDOM FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

S. V. Kornev, M. M. Kulmanakova, E. L. Ulianova

Abstract. The paper presents the investigation of the asymptotic behavior of solutions to a random functional differential inclusion of the form

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega,t,x_t) \quad \text{a.e.} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

for all $\omega \in \Omega$, where the multivalued map $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies the sublinear growth type condition and it is a random u-multioperator, i.e. it is measurable with respect to σ-algebra $\Sigma \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, where $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ denotes the σ-algebra of Borel subsets of $\mathbb{R}^n$, and $F(\omega, \cdot, \cdot) \colon \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ is upper semicontinuous for all $\omega \in \Omega$.

On the basis of the method of random nonsmooth integral guiding potentials, a one-sided estimate for solutions of this type of random functional differential inclusions is obtained.

Keywords: random multimap, random functional differential inclusion, random nonsmooth integral guiding potential, asymptotic behavior of solutions.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-0640-2020-0009).

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что дифференциальные включения являются весьма полезным математическим аппаратом для описания систем автоматического управления, нелинейных систем управления с обратной связью, с импульсными характеристиками и других объектов современной физики, механики, техники, биологии, экономики и других областей современного естествознания. В последние десятилетия при моделировании стохастических воздействий на динамические системы, описываемые дифференциальными включениями, широко применяется метод введения случайного параметра (см., например, [1]–[5]).

Метод направляющих функций, основу которого заложили М. А. Красносельский и А. И. Перов (см. [6]–[8]), первоначально применялся для изучения периодических и ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем метод направляющих функций был распространен на случай дифференциальных включений (см., например, [9]–[11]), дифференциальных включений с каузальными операторами (см., например, [12]–[14]), функционально-дифференциальных уравнений и включений (см., например, [15]–[17]) и другие объекты (см., например, [18]–[21]). Сфера приложений расширилась до изучения качественного поведения и бифуркаций решений (см., например, [21]–[23]) и асимптотики решений (см., например, [24]–[30]).

В настоящей работе вводится новый метод решения задачи об асимптотике траекторий управляемых систем, описываемых случайными функционально-дифференциальными включениями. В качестве основного инструмента исследования проблемы используется метод случайных негладких интегральных направляющих потенциалов. Применение этого метода позволяет установить оценки норм траекторий для указанных систем.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (см., например, [9], [11], [31]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X,d_X) и (Y,d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y), C(Y)$, $K(Y)$ обозначим множества всех непустых и, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y. Если Y — нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$, $Kv(Y)$ обозначаются множества всех непустых выпуклых замкнутых или, соответственно, компактных подмножеств Y. Пусть I — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега μ.

Определение 1. Мультиотображение $F\colon X \to K(Y)$ называется *полунепрерывным сверху (пн.св.) в точке* $x_0 \in X$, если для каждого открытого множества $W \subset Y$ такого, что $F(x_0) \subset W$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0,x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset W$. Мультиотображение $F\colon X \to K(Y)$ называется *полунепрерывным сверху (пн. св.)*, если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 2. Мультифункция $F\colon I \to K(Y)$ называется *измеримой*, если для каждого открытого множества $W \subset Y$, его прообраз $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ является измеримым подмножеством I.

Замечание 3. Пн.св. мультифункция измерима. Каждая измеримая мультифункция $F\colon I \to K(Y)$ имеет измеримое сечение, т. е. существует измеримая функция $f\colon I \to Y$ такая, что $f(t) \in F(t)$ для п.в. $t \in I$.

Напомним некоторые понятия негладкого анализа (см. [32]).

Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — локально липшицева функция. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ *обобщенная производная Кларка* $V^0(x_0;\nu)$ функции V в точке x_0 по направлению ν определяется формулой

$$V^0(x_0;\nu) = \varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0+}} \frac{V(x+t\nu) - V(x)}{t},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда *обобщенный градиент Кларка* $\partial V(x)$ функции V в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\partial V(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \quad \langle x,\nu\rangle \leqslant V^0(x_0;\nu) \quad \text{для всех} \ \ \nu \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Локально липшицева функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *регулярной*, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x,\nu)$ и она совпадает с $V^0(x;\nu)$.

Лемма 1. *(см. [24]) Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – регулярная функция, $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $V(x(t))$ также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:*

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s),x'(s))ds, \ t \in [a,b],$$

где V^0 — обобщенная производная Кларка.

Пусть (Ω,Σ) — измеримое пространство. Для каждого $h > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-h,0];\mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций $x : [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ с обычной нормой. Для функции $x(\cdot) \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

Пусть $\psi : \Omega \times [-h,0) \to \mathbb{R}^n$ — заданная начальная функция такая, что оператор $\omega \in \Omega \to \psi(\omega,\cdot) \in \mathcal{C}$ измерим. Обозначим символом $\mathcal{D}_\psi$ множество всех функций $x : \Omega \times [-h,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что:

(i) $x(\cdot,t)$ измерима п.в. $t \in [-h,+\infty)$;

(ii) для каждого $\omega \in \Omega$ сужение $x(\omega,\cdot)$ на $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ является абсолютно непрерывным;

(iii) для каждого $\omega \in \Omega$ имеем $x(\omega,t) = \psi(\omega,t), \ t \in [-h,0)$.

Приведем определения понятий, используемых в дальнейшем (см. [1], [33]).

Определение 4. Мультиотображение $F\colon \Omega \times X \to C(Y)$ называется *случайным мультиоператором*, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, где $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ — наименьшая σ-алгебра на $\Omega \times X$, включающая все множества $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$ и $\mathbb{B}(X)$ обозначает Борелевскую σ-алгебру на X. Если, кроме того, $F(\omega,\cdot)\colon X \to C(Y)$ пн. св. для всех $\omega \in \Omega$, то F – случайный u-мультиоператор. В случае, если $f\colon \Omega \times X \to Y$ является однозначным случайным оператором и $f(\omega,\cdot) : X \to Y$ является непрерывным для всех $\omega \in \Omega$, то f называется случайным c-оператором.

Определение 5. Пусть $A \subset Y$ — замкнутое подмножество и $F\colon \Omega \times A \to P(X)$ — случайный мультиоператор. Случайной неподвижной точкой ξ мультиоператора F называется измеримое отображение $\xi\colon \Omega \to A$ такое, что

$$\xi(\omega) \in F(\omega,\xi(\omega)) \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega.$$

Теорема 6. *Пусть Y — сепарабельное банахово пространство, $F\colon \Omega \times Y \to C(X)$ — случайный и-мультиоператор. Если для каждого $\omega \in \Omega$ множество*

$$FixF_\omega := \{y \in Y : y \in F(\omega, y)\}$$

неподвижных точек мультиоператора $F_\omega = F(\omega, \cdot)$ непусто и замкнуто, то F имеет случайную неподвижную точку.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши для случайного функционально-дифференциального включения вида:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega,t,x_t) \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$x(\omega, t) = \psi(\omega, t), \qquad t \in [-h,0) \tag{2.2}$$

для всех $\omega \in \Omega$, где $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям:

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{F}\colon \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является случайным u-мультиоператором;

($\mathcal{F}2$) существует отображение $c : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такое что $c(\omega,\cdot)$ – локально интегрируемо на $\mathbb{R}_+$, $c(\cdot,t)$ – измеримо п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, и мы имеем

$$\|\mathcal{F}(\omega,t,\varphi)\| := \sup\{|z|\colon z \in \mathcal{F}(\omega,t,\varphi)\} \leqslant c(\omega, t)(1 + |\varphi|),$$

для всех $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Для заданной начальной функции ψ под *случайным решением* задачи (2.1), (2.2) понимается функция $\xi \in D_\psi$, удовлетворяющая для каждого $\omega \in \Omega$ включению (2.1) п.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 7. Из условий ($\mathcal{F}1$), ($\mathcal{F}2$) следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_\mathcal{F}\colon \Omega \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) \to P(L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, u) = \{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) : f(t) \in \mathcal{F}(\omega, t, u_t) \quad \text{п.в.} \quad t \in \mathbb{R}_+\},$$

корректно определен и является случайным (см., например, [1], [18]), а для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [11], [31]).

Легко видеть, что мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ является каузальным. Кроме того, соответствующий интегральный мультиоператор

$$j \circ \mathcal{P}_\mathcal{F}\colon \Omega \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) \to P(C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)),$$

где $j\colon L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ — оператор интегрирования, заданный как

$$j(f)(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

является случайным каузальным u-мультиоператором, множество неподвижных точек которого для каждого $\omega \in \Omega$ непусто и компактно(см., например, [34]-[36]).

Тогда из Теоремы 6 следует, что интегральный мультиоператор $j \circ \mathcal{P}_\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку, которая является случайным решением задачи (2.1), (2.2).

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Определение 8. Отображение $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *случайным негладким потенциалом*, если выполняются следующие условия:

(j) $V(\cdot,z) : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримо для каждого $z \in \mathbb{R}^n$;

(jj) $V(\omega,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является для любого $\omega \in \Omega$ регулярной функцией.

Обозначим $\mathfrak{V}$ набор всех случайных негладких потенциалов $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих для каждого $\omega \in \Omega$ *условию коэрцитивности*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} V(\omega,x) = -\infty. \tag{3.1}$$

Заметим, что для каждого $\omega \in \Omega$ для данной функции $V \in \mathfrak{V}$ для каждого $r_\omega > 0$ существует $k_\omega(r_\omega) > r_\omega$ такое, что если

$$\alpha_{r_\omega} := \inf\{V(\omega,x),\, \|x\| \leqslant r_\omega\}, \tag{3.2}$$

то

$$V(\omega,x) < \alpha_{r_\omega},\ \|x\| \geqslant k_\omega(r_\omega). \tag{3.3}$$

Пусть теперь $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – заданная функция такая, что:

(g_1) $g(\cdot,t)$ — измерима п.в. $t \in \mathbb{R}_+$;

(g_2) $g(\omega,\cdot)$ — абсолютно непрерывна;

(g_3) $\inf\{g(\omega,t) :\ \omega \in \Omega,\, t \in \mathbb{R}\} \geqslant 1$.

Развивая понятия, введенные в [24], [25], [28], дадим следующее определение.

Определение 9. Случайный негладкий потенциал $V \in \mathfrak{V}$ называется *случайным негладким интегральным направляющим потенциалом* для включения (2.1) вдоль функции g, если для каждого $\omega \in \Omega$ существует

$$r_{V_\omega} > g(\omega,0)\|\psi(\omega,0)\| \tag{3.4}$$

такое, что для каждой функции $x \in \mathcal{D}_\psi$, удовлетворяющей условиям:

(l) существует наибольшее конечное число $\tau_1 := \tau_1(\omega,x) > 0$ такое, что

$$g(\omega,t)\|x(\omega,t)\| \leqslant r_{V_\omega} \quad \text{для всех } t \in [0,\tau_1);$$

(ll) существует конечное число $\tau_* := \tau_*(\omega,x) > \tau_1$ такое, что

$$g(\omega,\tau_*)\|x(\omega,\tau_*)\| = k_{V_\omega} := k_\omega(r_{V_\omega});$$

(lll) $\|x'(\omega,t)\| \leqslant \|\mathcal{F}(\omega,t,x_t)\|$ п.в. $t \in \mathbb{R}_+$,

найдется измеримое сечение $\upsilon(s) \in \partial V(\omega, g(\omega,s)x(\omega,s))$ такое, что

$$\int_{\tau_\sharp}^{\tau_*} \big\langle \upsilon(s), g'(\omega,s)x(\omega,s) + g(\omega,s)f(s)\big\rangle ds \geqslant 0 \tag{3.5}$$

для любого суммируемого сечения $f(s) \in \mathcal{F}(\omega,s,x_s)$, где

$$\tau_\sharp := \sup\{\tau \in [\tau_1,\tau_*),\, \|g(\omega,\tau)x(\omega,\tau)\| = r_{V_\omega}\}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 10. *Если $V \in \mathfrak{V}$ – случайный негладкий интегральный направляющий потенциал для включения (2.1) вдоль функции g, то каждое решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет оценке*

$$\|x(\omega,t)\| \leqslant k_{V_\omega} \cdot \frac{1}{g(\omega,t)}, \quad \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $x(\cdot,\cdot)$ — некоторое решение задачи (2.1), (2.2) на $\mathbb{R}_+$.

Из (3.4) следует, что для каждого $\omega \in \Omega$ существует наибольшее $\tau_1 = \tau_1(\omega,x) > 0$ такое, что

$$g(\omega,t)\|x(\omega,t)\| \leqslant r_{V_\omega} < k_{V_\omega},\ t \in [0,\tau_1). \tag{3.7}$$

Если $\tau_1 = +\infty$ для каждого $\omega \in \Omega$, то

$$\|x(\omega,t)\| < k_{V_\omega} \cdot \frac{1}{g(\omega,t)}, \quad \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.8}$$

и утверждение истинно.

Если $\tau_1 = \tau_1(\omega^*,x) < +\infty$ для некоторого $\omega^* \subset \Omega$, то оценка (3.7) справедлива только на ограниченном интервале. Покажем, что

$$g(\omega^*,t)\|x(\omega^*,t)\| \leqslant k_{V_{\omega^*}},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.9}$$

Предположим противное, что найдется $\tau_2(\omega^*,x) = \tau_2 > \tau_1$ такое, что

$$g(\omega^*,\tau_2)\|x(\omega^*,\tau_2)\| > k_{V_{\omega^*}}. \tag{3.10}$$

Из (3.7) и (3.10) следует, что существует наименьшее $\tau_1 < \tau^* = \tau^*(\omega^*,x) < \tau_2$, для которого

$$g(\omega^*,\tau_*)\|x(\omega^*,\tau_*)\| = k_{V_{\omega^*}}. \tag{3.11}$$

Возмем

$$\tau_\sharp = \sup\{\tau \in [\tau_1,\tau_*),\ g(\omega^*,\tau)\|x(\omega^*,\tau)\| = r_{V_{\omega^*}}\},$$

имеем

$$g(\omega^*,\tau_\sharp)\|x(\omega^*,\tau_\sharp)\| = r_{V_{\omega^*}}.$$

Из (3.3) получаем оценку

$$V(\omega^*, g(\omega^*,\tau_\sharp)x(\omega^*,\tau_\sharp)) \geqslant \alpha_{r_{V_{\omega^*}}}. \tag{3.12}$$

Согласно лемме 1 и определению 9 имеем

$$V(\omega^*, g(\omega^*,\tau_*)x(\omega^*,\tau_*)) - V(\omega^*, g(\omega^*,\tau_\sharp)x(\omega^*,\tau_\sharp)) =$$

$$= \int_{\tau_\sharp}^{\tau_*} V^0(\omega^*, g(\omega^*,s)x(\omega^*,s), g'(\omega^*,s)x(\omega^*,s) + g(\omega^*,s)x'(\omega^*,s))ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\tau_\sharp}^{\tau_*} \big\langle \upsilon(s), g'(\omega^*,s)x(\omega^*,s) + g(\omega^*,s)x'(\omega^*,s)\big\rangle ds \geqslant 0,$$

где $\upsilon(s) \in \partial V(\omega^*, g(\omega^*,s)x(\omega^*,x))$ – измеримое сечение, удовлетворяющее (3.5).

С учетом соотношений (3.3), (3.11) и (3.12) имеем

$$\alpha_{r_{V_{\omega^*}}} > V(\omega^*, g(\omega^*,\tau_*)x(\omega^*,\tau_*)) \geqslant V(\omega^*, g(\omega^*,\tau_\sharp)x(\omega^*,\tau_\sharp)) \geqslant \alpha_{r_{V_{\omega^*}}}.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость оценки (3.9).

Следствие 11. *Оценка (3.6) для решений задачи Коши (2.1), (2.2) справедлива и в случае, когда $V \in \mathfrak{V}$ является случайным гладким интегральным направляющим потенциалом для включения (2.1), т. е. $V(\omega,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцирцемая функция для любого $\omega \in \Omega$.*

Замечание 12. Нетрудно показать справедливость аналогичной (3.6) оценки для решений случайного функционально-дифференциального уравнения вида

$$x'(\omega, t) = f(\omega,t,x_t) \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathbb{R}_+,$$

где $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ является случайным c-оператором, удовлетворяющим условию подлинейного роста:

существует отображение $\beta : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, такое что $\beta(\omega,\cdot)$ – локально интегрируемо на $\mathbb{R}_+$, $\beta(\cdot,t)$ – измеримо п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, и мы имеем

$$\|f(\omega,t,\varphi)\| \leqslant \beta(\omega, t)(1 + |\varphi|),$$

для всех $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Авторы глубоко признательны профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andres, J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Gorniewicz // Topol. Meth. Nonlin. Anal. — 2012. — V. 40, № 2. — P. 337–358.

2. Engl, H. W. Random fixed point theorems for multivalued mappings / H. W. Engl // Pacific J. Math. — 1978. — V. 76. — P. 351–360.

3. Itoh, S. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces / S. Itoh // J. Math. Anal. Appl. — 1979. — V. 67. — P. 261–273.

4. Rybinski, L. E. Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions / L. E. Rybinski // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — V. 142. — P. 53–61.

5. Tarafdar, E. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusion / E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1996. — V. 37. — P. 725–748.

6. Красносельский, М. А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // ДАН СССР. — 1958. — Т. 123, № 2. — С. 235–238.

7. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Наука, 1966. — 332 с.

8. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

9. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Либроком, 2011. — 224 с.

10. Корнев, С. В. Направляющие функции на заданном множестве в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С. В. Корнев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 107–122.

11. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Second edition, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 4 / L. Górniewicz. — Dordrecht : Springer, 2006. — 556 p.

12. Корнев, С. В. Метод негладких интегральных направляющих функций в задаче о существовании периодических решений включений с каузальными операторами / С. В. Корнев // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 46–59.

13. Корнев, С. В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 55–65.

14. Kornev, S. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, P. Zecca // Applicable Analysis. — 2017. — V. 96, № 3. — P. 418–428.

15. Корнев, С. В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский, П. Дзекка // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 10. — С. 1335–1344.

16. Fonda, A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations / A. Fonda // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — V. 99 (1). — P. 79–85.

17. Kornev, S. V. On some developments of the method of integral guiding functions / S. V. Kornev, V. V. Obukhovskii // Funct. Differ. Equ. — 2005. — V. 12 (3–4). — P. 303–310.

18. Kornev, S. V. On periodic solutions of random differential inclusions / S. V. Kornev, Y.-C. Liou, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii // Applied Analysis and Optimization. — 2017. — V. 1, № 2. — P. 245–258.

19. Kornev, S. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations / S. Kornev, V. Obukhovskii, P. Zecca // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2019. — V. 31, № 2. — P. 1017–1028.

20. Kornev, S. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, J-C. Yao // Journal of Differential Equations. — 2020. — V. 268, № 10. — P. 5792–5810.

21. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Mathematics, 2076 / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev. — Heidelberg: Springer, 2013. — 177 p.

22. Loi, N. V. On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces / N. V. Loi, V. Obukhovskii and P. Zecca // Nonlinear Analisys. — 2013. — V. 76. — P. 80–92.

23. Kornev, S. V. Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions / S. V. Kornev, Y.-C. Liou // Journal of Nonlinear Science and Applications. — 2016. — V. 9, № 8. — P. 5259–5270.

24. Kornev, S. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J-C. Yao // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. — 2014. — V. 34, № 2. — P. 219–227.

25. Корнев, С. В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 700–705.

26. Корнев, С. В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений с невыпуклой правой частью / С. В. Корнев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 1. — С. 96–104.

27. Obukhovskii, V. On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part / V. Obukhovskii, M. Kamenskii, S. Kornev, Y.-C. Liou // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2017. — V. 18, № 5. — P. 967–975.

28. Kornev, S. V. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions / S. V. Kornev, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii, C.-

F. Wen // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2018. — V. 19, № 3. — P. 493–500.

29. Kornev, S. Nonsmooth integral guiding potentials and asymptotic behavior of solutions for inclusions with causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, J-C. Yao // Optimization. — 2020. — V. 69, № 2. — P. 345–355.

30. Kornev, S. On asymptotics of solutions for inclusions with random causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, Yu. Bezmelnitsyna, J.-C. Yao // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2021. — V. 22, № 1. — P. 173–184.

31. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca // De Gruyter Series in Nonnlinear Analysis and Applications, 7, Berlin – New York : Walter de Gruyter, 2001. — 242 p.

32. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988. — 280 с.

33. Обуховский, В. В. Об операторе сдвига по траекториям решений случайных дифференциальных включений / В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 4. — С. 81–89.

34. Corduneanu, C. Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16 / C. Corduneanu. — London : Taylor and Francis, 2002. — 184 p.

35. Obukhovskii, V. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces / V. Obukhovskii and P. Zecca // Nonlinear Analisys. — 2011. — V. 74, № 8. — P. 2765–2777.

36. Кулманакова, М. М. О нелокальной задаче Коши для полулинейного импульсного дифференциального включения с каузальным оператором в банаховом пространстве / М. М. Кулманакова, В. В. Обуховский, Е. Л. Ульянова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 1. — С. 92–109.

REFERENCES

1. Andres J., Górniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal., 2012, vol. 40, no. 2, pp. 337–358.

2. Engl H.W. Random fixed point theorems for multivalued mappings. Pacific J. Math., 1978, vol. 76, pp. 351–360.

3. Itoh S. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 1979, vol. 67, pp. 261–273.

4. Rybinski L.E. Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions. J. Math. Anal. Appl., 1989, vol. 142, pp. 53–61.

5. Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusion. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1996, vol. 37, pp. 725–748.

6. Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. On existence principle for bounded, periodic and almost periodic solutions to the systems of ordinary differential equations. [Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. Ob odnom prinzipe sushestvovania ogranichennyx, periodicheskih i pochti periodicheskix reshenij u system obiknovennyx differenzial'nyx uravnenij]. *Doklady Akademii Nauk SSSR – Doklady Mathematics*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235–238.

7. Krasnosel'skii M.A. The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations. [Krasnosel'skii M.A. Operator sdviga po traektoriyam differenzial'nych uravnenij]. Moscow: Nauka, 1966, 332 p.

8. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. Geometrical methods of nonlinear analysis. [Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskie metody nelineinogo analiza]. Moscow: Nauka, 1975, 512 p.

9. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobragenij i differenzial'nyx vklyuchenij]. Moscow: Librokom, 2011, 226 p.

10. Kornev S.V. Guiding functions on a given set in the periodic problem of differrential inclusions with nonconvex right-hand parts. [Kornev S.V. Napravljaushie funkzij na zadannom mnozestve v zadache o sushestvovanii periodicheskix reshenij differenzial'nyx vklyuchenij s nevypukloj pravoj chast'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 107–122.

11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Second edition, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 4. Dordrecht: Springer, 2006, 556 p.

12. Kornev S.V. Method of nonsmooth integral guiding functions in the periodic problem of inclusions with causal multioperators. [Kornev S.V. Metod negladkix integral'nyx napravljaushix funkzij v zadache o sushestvovanii periodicheskix reshenij vklyuchenij s kausal'nymi multioperatorami]. *Vestnik Youznouralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematicheskoe modelirovanie — Bulletin of the South Ural State University, Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 46–59.

13. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Integral guiding functions and periodic solutions of inclusions with causal multioperators. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Integral'nye napravljaushie funkzij i periodicheskie resheniya vklyuchenij s kausal'nymi multioperatorami]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye i thenicheskie nauki — Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 55–65.

14. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators. Applicable Analysis, 2017, vol. 96, no. 3, pp. 418–428.

15. Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P. Method of generalized integral guiding functions in the periodic problem of functional differential inclusions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P. Metod obobshennyx integral'nyx napravljaushix funkzij v zadache o sushestvovanii periodicheskix reshenij funkzionalno-differenzial'nyx vklyuchenij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1335–1344.

16. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 1987, vol. 99(1), pp. 79–85.

17. Kornev S.V., Obukhovskii V. On some developments of the method of integral guiding functions. Funct. Differ. Equ., 2005, vol. 12(3–4), pp. 303–310.

18. Kornev S.V., Liou Y.-C., Loi N.V., Obukhovskii V.V. On periodic solutions of random differential inclusions. Applied Analysis and Optimization, 2017, vol. 1, no. 2, pp. 245–258.

19. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2019, vol. 31, no. 2, pp. 1017–1028.

20. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J-C. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators. Journal of Differential Equations, 2020, vol. 268, no. 10, pp. 5792–5810.

21. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Mathematics, 2076. Heidelberg: Springer, 2013, 177 p.

22. Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P. On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces. Nonlinear Analisys, 2013, vol. 76, pp. 80–92.

23. Kornev S.V., Liou Y.-C. Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions. Journal of Nonlinear Science and Applications, 2016, vol. 9, no. 8, pp. 5259–5270.

24. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J-C. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 2014, vol. 34, no. 2, pp. 219–227.

25. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Asymptotic behavior of solutions to differential inclusions

and the method of guiding functions. [Kornev S.V., Obukhovskii V.V. Asimptoticheskoe povedenie reshenij differenzial'nyx vklyuchenij i metod napravljaushix funkzij]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 700–705.

26. Kornev S.V. Asymptotic behavior of solutions to differential inclusions and the method of guiding functions. [Kornev S.V. Assimptoticheskoe povedenie reshenij differenzial'nyx vklyuchenij i metod napravljaushix funkzij s nevypukloj pravoj chast'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 96–104.

27. Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C. On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 967–975.

28. Kornev S.V., Loi N.V., Obukhovskii V.V., Wen C.-F. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2018, vol. 19, no. 3, pp. 493–500.

29. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J-C. Nonsmooth integral guiding potentials and asymptotic behavior of solutions for inclusions with causal multioperators. Optimization, 2020, vol. 69, no. 2, pp. 345–355.

30. Kornev S., Obukhovskii V., Bezmelnitsyna Yu., Yao J.-C. On asymptotics of solutions for inclusions with random causal multioperators. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 173–184.

31. PKamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonnlinear Analysis and Applications, 7. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2001, 242 p.

32. Clark F. Optimization and nonsmooth analysis. [Clark F. Optimizaciya i negladkij analiz]. Moscow: Nauka, 1988, 280 p.

33. Obukhovskii V.V., Kornev S.V., Getmanova E.N. On a translation multioperator along trajectories of solutions of random differential inclusions. [Obukhovskii V.V., Kornev S.V., Getmanova E.N. Ob operatore sdviga po traektoriyam reshenij sluchajnyh differencial'nyh vklyuchenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 4, pp. 81–89.

34. Corduneanu C. Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16. London: Taylor and Francis, 2002, 184 p.

35. Obukhovskii V., Zecca P. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces. Nonlinear Analisys, 2011, vol. 74, no. 8, pp. 2765–2777.

36. Kulmanakova M.M., Obukhovskii V.V., Ulyanova E.L. On a nonlocal couchy problem for semilinear impulse differential inclusion with a causal operator in banach space. [Kulmanakova M.M., Obukhovskii V.V., Ul'yanova E.L. O nelokal'noj zadache Koshi dlya polulinejnogo impul'snogo differencial'nogo vklyucheniya s kauzal'nym operatorom v banahovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 92–109.

Корнев Сергей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Kornev Sergey Viktorovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Tel.: +7(473)255–36–63

Кулманакова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", Воронеж, Россия
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
Тел.: +7(473)255–36–63

Kulmanakova Marina Michailovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent of the Chair of Mathematics, MESC AF "N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russia
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
Tel.: +7(473)255–36–63

Ульянова Елена Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: ulhelen@mail.ru
Тел.: +7(473)255-36-63

Ulianova Elena Leonidovna, Candidate of of Physical and Mathematical Sciences, Docent of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: ulhelen@mail.ru
Tel.: +7(473)255-36-63