УДК 517.9

О ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ С ПОЗИЦИИ МЕРЫ

Ж. И. Бахтина, О. К. Плетнева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.09.2020 г.

Аннотация. Мы продолжаем исследовать проблемы математического моделирования объектов и явлений, описывающихся в теории динамических уравнений на временных шкалах. Нами уже была доказана возможность решить проблемы интегрального исчисления в данной теории, которые были вызваны несвязностью самих временных шкал. Это позволил сделать метод дифференциала Стилтьеса, предложенный Ю.В.Покорным. Так мы попадаем в зону действия корректной теории Штурма-Лиувилля для импульсных задач. В настоящей работе мы говорим о неосцилляции однородного уравнения на временной шкале.

Ключевые слова: динамические уравнения, временная шкала, дырка, неосцилляция уравнения, импульсная задача, метод Штурма.

ABOUT THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

Zh. I. Bakhtina, O. K. Pletneva

Abstract. We continue the study of the problems of mathematical modeling of objects and phenomena described in the theory of dynamic equations on time scales. We proved the possibility of a correct view of the problems of integral calculus in this theory, which were caused by the incoherence of the time scales themselves. It was made possible by of the method of the Stieltjes differential proposed by Yu.V. Pokorny. So we get into the zone of the correct Sturm-Liouville theory for impulse problems. In this paper we are talking about the non-oscillation of a homogeneous equation on a time scale.

Keywords: dynamic equations, time scale, hole, non–oscillation of the equation, impulse problem, Sturm method.

Уже несколько столетий для описания математических моделей самых разнообразных систем и процессов из физической и инженерной практики основой служит обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(pu')' + qu = f(= \lambda mu) \tag{0.1}$$

с непрерывными параметрами $q(x)$,$f(x)$,$m(x)$. В XIX веке уравнение (0.1) вошло во все учебники высшей математики. Техническая революция поставила проблему распространения уравнения (0.1) на более широкие классы объектов, где параметры могут терять регулярность. Так, если в (0.1) коэффициент $q(x)$ может содержать δ-функции, то вся стандартная наука об обыкновенном дифференциальном уравнении (0.1) оказывается несостоятельной, так как само уравнение теряет смысл обыкновенного - оно перестает быть поточечным, так как та же δ-функция не определена как скалярнозначная функция и не является поэтому объектом стандартного математического анализа.

В 90-е годы прошлого столетия воронежцами было предложено вместо уравнения (0.1) рассматривать уравнение вида

$$\int\limits_0^x d(pu') + \int\limits_0^x udQ = \int\limits_0^x dF (= \lambda \int\limits_0^x udM), \tag{0.2}$$

где $Q(x)$,$F(x)$ и $M(x)$ - поточечно определяемые функции ограниченной вариации, а интегралы понимаются по Стилтьесу. Ю. В. Покорный предложил придать уравнению (0.2) аналогичный (0.1) вид

$$D(pu') + uDQ = DF (= \lambda uDM), \tag{0.3}$$

используя так называемый дифференциал Стилтьеса. При этом символ Dg для функции ограниченной вариации $g(x)$ предложено трактовать в виде линейного на $C[a,b]$ функционала

$$(Dg)(u) = \int\limits_0^l udg.$$

Тщательная проработка такого подхода к уравнениям (0.3) и (0.2) позволила перенести (см. [9]) на случай импульсных задач (см. [10]–[14]) всю осцилляционную теорию Штурма во всей полноте. Далее была поставлена задача о распространении метода дифференциала Стилтьеса на новые классы задач, одной из которых стала теория динамических уравнений на временных шкалах ([ДУВШ]).

1. ВЗЛЯД НА ТЕОРИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ С ПОЗИЦИИ ТЕОРИИ МЕРЫ

Актуальность своей тематики авторы [ДУВШ] мотивируют самыми разнообразными приложениями и интерпретациями как в области космологии, так и в области пульсирующих и эпизодически замирающих процессов в биологии и экономике. В их работах изучаются уравнения, вполне сходные с (0.1),

$$(p(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle} + q(t)x(\sigma(t)) = f(t), \tag{1.1}$$

для случая, когда аргумент решений t принадлежит "временной шкале $\mathbb{T}$" - произвольному замкнутому множеству из вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. Здесь $\triangle$-производная $x^{\triangle}(t)$ по определению означает

$$x^{\triangle}(t_0) = \lim_{s\to t_0} \frac{x(\sigma(t_0)) - x(s)}{\sigma(t_0) - s}, t_0 \in \mathbb{T}. \tag{1.2}$$

Под $\sigma(t)$ понимается величина

$$\sigma(t) := inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.3}$$

С математической точки зрения уравнение (1.1) — интригующий объект, так как множество $\mathbb{T}$, не будучи вообще говоря связным, может быть сильно «дырявым» по типу канторова множества. Авторы же [ДУВШ] конструируют теорию, внешне вполне аналогичную теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом они вынуждены развивать дифференциальное исчисление, обратное к нему интегральное исчисление и проч.

Напомним, что дополнение шкалы $\mathbb{T}$ до всей числовой оси состоит из объединения конечного или счетного числа интервалов. Каждый такой интервал мы назвали дыркой шкалы $\mathbb{T}$.

Строгое неравенство $\sigma(t) > t$ по определению $\sigma(t)$ имеет место тогда и только тогда, когда t является левым краем какой-либо дырки. $\triangle$-производная не отличается от обычной производной, если t не является левым краем какой-либо дырки. Если t — левый край какой-либо дырки, то $x^{\triangle}(t) \neq x'(t-0)$, а ведь для осмысления второй производной $(x^{\triangle}(t))^{\triangle}$ необходимо иметь однозначно определенное значение $x^{\triangle}(t)$ в точке t. Смысл последнего становится корректным лишь в предположении $x^{\triangle}(t) = x'(t-0)$, а это нигде англоязычные авторы теории [ДУВШ] не оговаривали, но пользовались этим фактом.

Как выше было сказано, Ю. В. Покорным было предложено распространить метод дифференциала Стилтьеса на теорию [ДУВШ]. Им была высказана гипотеза о том, что аномальность (несвязность) области определения $\mathbb{T}$ может быть преодолена введением на $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ некоторой меры (функции Q), в результате чего уравнение (1.1) может оказаться частным случаем уравнения (0.3), т. е. попасть в зону действия корректной теории. Таким образом, мы работаем в классе абсолютно непрерывных функций без дырок в области определения аргумента, что стало возможным благодаря непрерывному распространению динамического уравнения на всю числовую ось.

Основное уравнение, определенное на временной шкале $\mathbb{T}$, запишем следующим образом:

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = f(x). \tag{1.4}$$

$\mathfrak{N}$ — множество левых краев дырок из $\mathbb{T}$. Как уже было сказано, динамическое уравнение отличается от обыкновенного только на множестве $\mathfrak{N}$.

В теории [ДУВШ] предполагается непрерывность коэффициентов p и q и непрерывность решений уравнения (1.4) вместе с производными $u^{\triangle}(x)$ и $(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle}$. Эти условия мы назвали допустимыми условиями [ДУВШ].

Далее термины нами были введены как локальные, т. е. определяемые по каждому отрезку $[a,b] \subset R$. Так, функция $u(x)$ называется имеющей ограниченную вариацию на R, если она имеет конечную вариацию на каждом $[a,b] \subset R$. Естественно говорить о функции ограниченной вариации на временной шкале $\mathbb{T} \subset R$, кладя в основу этого свойства ограниченность вариации $u(x)$ на пересечении каждого отрезка $[a,b]$ с данной временной шкалой $\mathbb{T}$. $BV(\mathbb{T})$ — множество таких функций. Под $BV_0(\mathbb{T})$ понимается совокупность функций, для каждой из которых на любом $[a,b] \subset R$ ее вариация на пересечении $[a,b] \bigcap \mathbb{T}$ ограничена и эти функции непрерывны слева на $\mathbb{T}$, то есть $u(\xi - 0) = u(\xi)$ для каждой функции $u \in BV_0(\mathbb{T})$.

Основной стала следующая теорема.

Теорема (основная). *Пусть для уравнения (1.4) выполняются допустимые условия [ДУВШ]. Тогда существуют функции $P(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ с локально ограниченным изменением на $\mathbb{R}$ и такие, что каждому из допустимых решений $u(x)$ уравнения (1.4) соответствует определенное и непрерывное на всем $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ решение $\widehat{u}(x)$ уравнения*

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = \int\limits_r^s dF(x),$$

совпадающее с $u(x)$ на шкале $\mathbb{T}$. Здесь интегралы понимаются по Стилтьесу.

В последнем уравнении функция $Q(x)$ берется в виде

$$Q(x) = \int\limits_a^x q_0 ds + \sum_{\tau \in \mathfrak{N}, \tau \leqslant x} q(\tau)\mu(\tau)\theta(x - \sigma(\tau)),$$

где $q_0 = q(x)$ при $x = \sigma(x)$ и $q_0 \equiv 0$ на $\mathbb{W}$ (дополнении $\mathbb{T}$ до всей оси), $\theta(x)$ - функция Хевисайда, $\mu(\tau) = \sigma(\tau) - \tau$.

Уравнение

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = \int\limits_r^s dF(x)$$

по сути близко к обычному, когда P и Q абсолютно непрерывны. В то же время такая форма записи уравнения расширяет объект, позволяя P и Q иметь разрывы. В терминах дифференциала Стилтьеса оно принимает вид:

$$D(pu') + uDQ = DF.$$

Доказательство основной теоремы основано на установленном в этом же параграфе свойстве полноты $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ по метрике для каждого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{E}$ ($\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$) — множество абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$ (соответственно на $\mathbb{T}$) функций, производные которых имеют локально ограниченное изменение на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{T}$). Тогда верно, что пространство $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ полно по норме:

$$\|u(x)\| = \sup_{\mathbb{T}} |u(x)| + V_{\mathbb{T}}[u'(x)]. \tag{1.5}$$

Через $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ нами было обозначено пространство функций из $\mathbb{E}$, совпадающих на $\mathbb{T}$ с элементами из $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ и линейных на каждой дырке $\mathbb{T}$.

Приведенная основная теорема позволяет сформулировать наши результаты для основных объектов [ДУВШ] с помощью трансляции этих задач в линейчатое расширение $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$. Все доказательства излагаются в линейчато расширенном пространстве $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$, где исследователь имеет возможность опоры на классические средства анализа, не затрудненные дырявостью исходного множества $\mathbb{T}$.

Функции $q(x)$ и $p(x)$ из (1.4) принадлежит $BV(\mathbb{T})$, $\widehat{P}(x)$,$\widehat{Q}(x)$,$\widehat{F}(x)$ - их продолжения на $\mathbb{W}$ равенствами

$$\widehat{P}(x) = p(\alpha - 0), \widehat{Q}(x) \equiv 0, \widehat{F}(x) \equiv 0, \tag{1.6}$$

где α — левый край дырки.

Если $u(x)$ — произвольная функция из $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ и $[u(x)]$ - ее сужение на $\mathbb{T}$, то все локальные дифференциалы Стилтьеса от обеих этих функций совпадают. Тогда исходное уравнение на $\mathbb{T}$ можно сразу рассматривать на множестве расширенных функций, определенных на всей числовой оси, и наоборот.

Весь разговор данной тематики ведется на компактных подмножествах $\mathbb{R}$ (пересечении $[a,b]$ с временной шкалой $\mathbb{T}$). Если шкала неограничена, можно вести аналогичный разговор локально на каждом отрезке, поэтому формулировки результатов будем озвучивать на $\mathbb{T}$, подразумевая детализацию на каждом отрезке. Например, в пространстве $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ введена (см. [11]) топология на каждом сужении $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ на компактный интервал. На каждом конечном интервале соответствующее расширение $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ является нормированным пространством, так что в целом на всей оси пространство $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ счетномерно.

2. О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Распространяя метод дифференциала Стилтьеса на теорию динамических уравнений на временных шкалах, нельзя не затронуть понятие неосцилляции однородного уравнения.

Определение. *Будем называть однородное уравнение*

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0 \tag{2.1}$$

неосциллирующим на $[a,b]$*, если всякое нетривиальное решение уравнения* (2.1) *имеет не более одного нуля.*

Будем рассматривать уравнение

$$D(pu') + uDQ = DF$$

или

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = 0, \tag{2.2}$$

работая в расширенном пространстве.

Теорема. *Для неосцилляции на* $[a{,}b]$ *уравнения* (2.2) *достаточно, чтобы функция* $Q(x)$ *из уравнения* (2.2) *монотонно не убывала на* $[a{,}b]$.

Доказательство. Пусть $Q(x)$ не убывает на $[a{,}b]$. Предположим, найдется нетривиальное решение $u(x)$ уравнения (2.2), имеющее на $[a{,}b]$ более одного нуля. Пусть $\xi_1{,}\xi_2$ — два соседних нуля функции $u(x)$. Будем считать, что $u(x) > 0$ на промежутке $(\xi_1{,}\xi_2)$. Рассмотрим случай, когда только точка ξ_1 является особой (аналогично можно рассмотреть остальные случаи).

Перепишем на $[\xi_1 + 0{,}\xi_2]$ уравнение (2.2) в виде

$$[Pu'](s) - [Pu'](\xi_1 + 0) = -\int\limits_{\xi_1+0}^{s} u(x)dQ(x.) \tag{2.3}$$

С точностью до переобозначения получим

$$[\mathbf{p}u'](s) - [\mathbf{p}u'](\xi_1 + 0) = \int\limits_{\xi_1+0}^{s} u(x)dQ(x). \tag{2.4}$$

Здесь мы перешли к привычным нам обозначениям, использующимся в методе Штурма в теории импульсных задач, где $\mathbf{p}(x) > 0$.

Так как $u'(\xi_1 + 0) > 0$ и $Q(x)$ не убывает (по предположению), то из равенства (2.4) получим: $u'(\xi_2) > 0$. С другой стороны, из равенства $u(\xi_2) = 0$ и из того, что $u(x) > 0$ на промежутке $(\xi_1{,}\xi_2)$, вытекает следующее: $u'(\xi_2) < 0$. Получаем противоречивое неравенство

$$0 > [\mathbf{p}u'](\xi_2) = [\mathbf{p}u'](\xi_1 + 0) + \int\limits_{\xi_1+0}^{\xi_2} u(x)dQ(x) \geqslant [\mathbf{p}u'](\xi_1 + 0) > 0.$$

Что и требовалось доказать.

Следует отметить и эквивалентность свойств:

а) уравнение (2.2) не осциллирует на $[a{,}b]$;

б) на $[a{,}b]$ нет сопряженных $x = a$ точек, отличных от $x = a$; нет отличных от $x = b$ точек, сопряженных $x = b$;

в) существует неотрицательное на $[a{,}b]$ решение уравнения (2.2), такое что $u(a) > 0$ (или $u(b) > 0$);

г) существует строго положительное на $[a{,}b]$ решение уравнения (2.2).

Напоминаем, что для фиксированного однородного дифференциального уравнения второго порядка на $[a{,}b]$ точка $x = \xi$ называется сопряженной точке a, если существует нетривиальное решение с нулями в точках $x = a$ и $x = \xi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Saker, S. H. Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales / S. H. Saker// Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2005. — № 23, iss. 1–17. — P. 570064.

3. Hilger, S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus/ S. Hilger// Results Math. — 1990. — V. 18. — P. 18–56.

4. Bohner, M. Dynamic Equations on Time Scales/ M. Bohner, A. Peterson. — Boston, 2001. — 369 p.

5. Dosly, O. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales / O. Dosly, S. Hilger // J. Comp. Appl. Math. — 2002. — V. 141. — P. 147–158.

6. Erbe, L. Riccati equations on a measure chain / L. Erbe, A. Peterson // Dynamic systems and applications. — 2001. — P. 193–199.

7. Покорный, Ю. В. О стилтьесовском заглаживании временных шкал / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции Воронежской зимней математической школы. — Воронеж, 2009. — С. 140–141.

8. Покорный, Ю. В. Метод дифференциалов Стилтьеса в некоторых задачах с импульсными особенностями / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Давыдова // Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. Серия Дифференциальные уравнения и математическая физика, 2009.

9. Бахтина, Ж. И. О задаче Штурма-Лиувилля на несвязных компактах / Ж. И. Бахтина // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XX». — Воронеж, 2009. — С. 20–22.

10. Бахтина, Ж. И. Метод интеграла Стилтьеса в теории динамических уравнений на временных шкалах / Ж. И. Бахтина // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2009. — № 1. — С. 3–8.

11. Бахтина, Ж. И. Метод дифференциала Стилтьеса в моделировании некоторых динамических задач с прерывистым или ветвящимся аргументом: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Воронеж. гос. университет. — Воронеж, 2009. — 100 с.

12. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

13. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

14. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

15. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

16. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.

Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

17. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

18. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

19. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по мере и спектральным параметром при второй производной / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 203–207.

20. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

21. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023

22. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

23. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

REFERENCES

1. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

2. Saker S.H. Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2005, no. 23, iss. 1–17. pp. 57–64.

3. Hilger S. Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math., 1990, vol. 18, pp. 18–56.

4. Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales. Boston, 2001, 369 p.

5. Dosly O., Hilger S. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales. J. Comp. Appl. Math., 2002, vol. 141, pp. 147–158.

6. Erbe L., Peterson A. Riccati equations on a measure chain. Dynamic systems and applications, 2001, pp. 193–199.

7. Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I. On Stiltesov smoothing of time scales. [Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I. O stilt'esovskom zaglazhivanii vremennyh shkal]. Modern methods function theory and related problems. Proceedings of the conference of the Voronezh Winter Mathematical School, Voronezh: 2009, pp. 140–141.

8. Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I., Davydova M.B. The Stieltjes differential method in some problems with impulse singularities. [Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I., Davydova M.B. Metod differencialov Stilt'esa v nekotoryh zadachah s impul'snymi osobennostyami]. International

Scientific Conference «Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics» dedicated to the memory of Academician A.A. Samarskiy in connection with the 90th anniversary of his birth, Series Differential Equations and Mathematical Physics, Moscow, 2009.

9. Bakhtina Zh.I. On the Sturm-Liouville problem on disconnected compacts. [Bahtina ZH.I. O zadache SHturma-Liuvillya na nesvyaznyh kompaktah]. Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin Readings–XX», Voronezh,2009, pp. 20–22.

10. Bakhtina Zh.I. The Stieltjes Integral Method in the Theory of Dynamic Equations on Time Scales. [Bahtina ZH.I. Metod integrala Stilt'esa v teorii dinamicheskih uravnenij na vremennyh shkalah]. *Aktual'nye problemy matematiki i informatiki (trudy matematicheskogo fakul'teta) — Actual problems of mathematics and Informatics (proceedings of the Faculty of Mathematics)*, 2009, № 1, pp. 3–8.

11. Bakhtina Zh.I. Stieltjes differential method in modeling some dynamic problems with intermittent or branching argument. [Bahtina ZH.I. Metod differenciala Stilt'esa v modelirovanii nekotoryh dinamicheskih zadach s preryvistym ili vetvyashchimsya argumentom]. dissertation for the degree of candidate physical and mathematical sciences, Voronezh state University, Voronezh, 2009, 100 p.

12. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

13. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

14. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

15. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

16. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

17. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoyj spektral'noyj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nym parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

18. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj raznoporyadkovoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika —*

Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 3, pp. 186–195.

19. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M., Shabrova M.V. On the rate of growth of the eigenvalues of one spectral problem with derivatives of the measure and a spectral parameter in the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M., Shabrova M.V. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere i spektral'nym parametrom pri vtoroyj proizvodnoyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 203–207.

20. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

21. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

22. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012044.

23. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bakhtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Плетнева Ольга Константиновна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
Тел.: +7(473)220–86–90

Pletneva Ol'ga K., Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7(473)220–86–90