УДК 517

АНАЛОГИ ТЕОРЕМ ШТУРМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ*

С. А. Шабров, Д. А. Крохина, Н. А. Белов, А. Г. Ильченко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 21.01.2019 г.

Аннотация. Работа посвящена анализу решений однородного уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + Q'_\sigma u = 0 \tag{1}$$

с производными по мере. Доказаны аналоги теорем Штурма, которые имеют важное значение при анализе качественных свойств решений. При анализе решений уравнения (1), мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении уравнений не только второго порядка, но и более высокого порядка, в частности, построена точная параллель классической теории качественной теории вплоть до осцилляционных теорем.

Ключевые слова: однородное уравнение, дифференциальное уравнение, поточечный подход, теоремы о перемежаемости нулей.

ANALOGUES OF STURM'S THEOREMS FOR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DERIVATIVES IN MEASURE

S. A. Shabrov, D. A. Krokhina, N. A. Belov, A. G. Ilchenko

Abstract. The work is devoted to the analysis of solutions of the homogeneous equation

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + Q'_\sigma u = 0 \tag{1}$$

with derivatives in measure. Analogs of Sturm's theorems are proved, which are important in the analysis of the qualitative properties of solutions. When analyzing the solutions of the equation (1), we use the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokornyi and which has shown its effectiveness in studying equations not only of the second order, but also of a higher order, in particular, an exact parallel of the classical theory of qualitative theory up to oscillation theorems.

Keywords: homogeneous equation, differential equation, pointwise approach, theorems on the interleavability of zeros.

Бурное развитие качественной теории с негладкими решениями началось после выхода в 1999 году работы Ю. В. Покорного [1], в которой был предложен поточечный подход к трактовке уравнения с негладкими решениями. Он [подход] показал свою эффективность не только для линейных граничных задач [2–7], но и для нелинейных [8–10]. Это можно объяснить достаточно просто: при использовании производных по мере изучаемое уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным. Именно последнее обстоятельство и

* Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверситете.

даёт возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций. Здесь важно отметить, что при использовании теории распределений по Шварцу–Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Например, удается установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно; возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удается решить до сих пор; уравнения в обобщенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно. Здесь мы отметим работу А. Д. Мышкиса [11] в которой исследованы свойства решений дифференциальных неравенств с обобщенными коэффициентами.

Уравнение

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + Q'_\sigma u = 0 \tag{1}$$

задано на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$, в нем каждая точка $\xi \in S(\sigma)$, где $S(\sigma) \neq \varnothing$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает меру σ, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Опишем построение этого множества.

На $[0,\ell]$ вводим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S(\sigma) \neq \varnothing$, то $([0,\ell],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0,\ell]}_\sigma$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$ функций $u(x)$; квазипроизводная pu'_x — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$.

Очевидно, любое нетривиальное решение уравнения может иметь лишь конечное число нулей.

Теорема 1. *Для любых двух линейно независимых решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ однородного уравнения* (1) *их нули в $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ перемежаются, т. е. для любой пары нулей ξ_1, ξ_2 решения $\varphi_1(x)$, другое решение меняет между ними знак (и наоборот).*

Доказательство. Пусть ξ_1 и ξ_2 — соседние нули решения $\varphi_1(x)$. Без ограничения общности, мы можем считать, что $\varphi_1(x) > 0$ на (ξ_1,ξ_2). Если $\varphi_2(x) \neq 0$ на $[\xi_1,\xi_2]$, то умножением на -1 мы можем добиться положительности $\varphi_2(x)$ на этом отрезке. При достаточно большом λ, очевидно, имеет место неравенство $\lambda\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)$ при всех $x \in [\xi_1,\xi_2]$. Беря в этом неравенстве inf по λ, будем иметь при некотором $\lambda_0 > 0$ и каком-то $\tau \in [\xi_1,\xi_2]$, что функция $h(x) = \lambda_0\varphi_2(x) - \varphi_1(x)$ неотрицательна в окрестности τ и $h(\tau) = 0$. Покажем, что производные $h'(\tau \pm 0)$ равны нулю. Отсюда будет следовать, что $h(x) \equiv 0$. В самом деле, точка τ является точкой локального минимума функции $h(x)$. Поэтому $h'(\tau + 0) \geqslant 0$ и $h'(\tau - 0) \leqslant 0$. Если $\tau \notin S(\sigma)$, $h'(\tau - 0) = h'(\tau + 0)$, и, следовательно, $h'(\tau - 0) = h'(\tau + 0) = 0$. Если $\tau \in S(\sigma)$, то уравнение (1) в точке τ принимает вид $-\dfrac{\Delta ph'(\tau)}{\Delta\sigma(\tau)} + \dfrac{\Delta Q(\tau)}{\Delta\sigma(\tau)}h(\tau) = 0$, или $-\dfrac{\Delta ph'(\tau)}{\Delta\sigma(\tau)} = 0$, так как $h(\tau) = 0$. Отсюда приходим к неравенствам $0 \geqslant ph'(\tau - 0) = pu'(\tau + 0) \geqslant 0$, т. е. $ph'(\tau \pm 0) = 0$. Отметим, что рассуждения упрощаются, если решение $\varphi_2(x)$ обращается в нуль в одной из точек ξ_1, ξ_2. $\square$

Рассмотрим теперь два уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}(pu') + \frac{dQ_1}{d\sigma}u = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{d}{d\sigma}(pv') + \frac{dQ_2}{d\sigma}v = 0. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $\dfrac{dQ_1}{d\sigma} \geqslant \dfrac{dQ_2}{d\sigma}$ и $\dfrac{dQ_1}{d\sigma} \not\equiv \dfrac{dQ_2}{d\sigma}$. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение* (2) *и ξ_1, ξ_2 — его нулевые точки в $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Тогда любое решение $v(x)(\not\equiv 0)$ уравнения* (3) *меняет в (ξ_1,ξ_2) знак.*

Доказательство. Подставляя в уравнения (2) и (3) решения $u(x)$, $v(x)$, умножая первое на $v(x)$, второе — на $u(x)$, вычитая почленно одно из другого и интегрируя по мере σ, будем иметь

$$\int\limits_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} v\,d(pu') - \int\limits_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} u\,d(pv') = \int\limits_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} uv\,d(Q_1 - Q_2). \tag{4}$$

Первая часть в предположении $v(x) \geqslant 0$ — неотрицательна (если $u(x)$ была неотрицательна). После интегрирования по частям обоих слагаемых слева мы получим (в результате взаимоликвидации пары интегралов)

$$\left[v\left(pu'\right)\right]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} - \left[u(pv')\right]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0} = \left[pvu'\right]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0}, \tag{5}$$

так как $u(\xi_1{+}0) = u(\xi_2{-}0) = 0$. Но $u'(\xi_1{+}0) > 0$ и $u'(\xi_2{-}0) < 0$. Поэтому выражение (4) вместе с левой частью (5) должно быть строго отрицательным, что противоречит неотрицательности (4). $\square$

Рассмотрим теперь уравнения

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p_1 u'_x\right) + Q'_\sigma u = 0, \tag{6}$$

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p_2 v'_x\right) + Q'_\sigma v = 0. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть $p_1(x) \geqslant p_2(x) > 0$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma \backslash S(\sigma)$; $u(x)$ — нетривиальное решение (6), $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ — его нулевые точки в $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Тогда любое нетривиальное решение $v(x)$ уравнения (7) меняет в $(\xi_1;\xi_2)$ знак.*

Доказательство. Пусть Z — множество точек в которых существует производная по σ функций x, $u(x)$, $v(x)$, $\left(p_1 u'_x\right)(x)$ и $\left(p_2 v'_x\right)(x)$. Очевидно, что Z имеет полную σ-меру.

Для точек $x \in Z\backslash S(\sigma)$ последовательно находим

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{u}{v}\left(p_1 u'_x v - p_2 v'_x u\right)\right\} = \frac{u'_x v - u v'_x}{v^2}\left(p_1 u'_x v - p_2 v'_x u\right)\frac{dx}{d\sigma} +$$
$$+ \frac{u}{v}\left(\left(p_1 u'_x\right)'_\sigma v + p_1 u'_x v'_x \frac{dx}{d\sigma} - \left(p_2 v'_x\right)'_\sigma u - p_2 v'_x u'_x \frac{dx}{d\sigma}\right),$$

или, после очевидных преобразований,

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{u}{v}\left(p_1 u'_x v - p_2 v'_x u\right)\right\} = \left\{p_1 u'^2_x - 2p_2\frac{u'_x v'_x u}{v^2} + p_2\frac{u^2 v'^2_x}{v^2}\right\}\frac{dx}{d\sigma} =$$
$$= \left\{(p_1 - p_2)u'^2_x + p_2\left(u'_x - \frac{u v'_x}{v}\right)^2\right\}\frac{dx}{d\sigma} \tag{8}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $u(x)$ и $v(x)$ — решения соответствующих уравнений).

Если $x \in S(\sigma)$, то

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\left(p_1 u'_x v - p_2 v'_x u\right)\right)(x) =$$
$$= \frac{u(x+0)}{v(x+0)}\left(\left(p_1 u'_x\right)(x+0)v(x+0) - \left(p_2 v'_x\right)(x+0)u(x+0)\right) -$$

$$-\frac{u(x-0)}{v(x-0)}\Big(\left(p_1u'_x\right)(x-0)v(x-0)-\left(p_2v'_x\right)(x-0)u(x-0)\Big)=$$
$$=\frac{u(x)}{v(x)}\Big(v(x)\Delta\left(p_1u'_x\right)(x)-u(x)\left(p_2v'_x\right)(x)\Big)=0,$$

так как $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и являются решениями уравнений (6) и (7) соответственно. Откуда

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{u}{v}\left(p_1u'_xv-p_2v'_xu\right)\right)(x)=0.$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{u}{v}\left(p_1u'_xv-p_2v'_xu\right)\right\}=\left\{(p_1-p_2)u'^2_x+p_2\left(u'_x-\frac{uv'_x}{v}\right)^2\right\}\frac{dx}{d\sigma},\tag{9}$$

которое является аналогом равенства Пиконе. Интегрируя последнее равенство по мере σ по множеству $[\xi^{(1)};\xi^{(2)}]$:

$$\left\{\frac{u}{v}\left(p_1u'_xv-p_2v'_xu\right)\right\}\Big|_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}}=\int\limits_{\xi^{(1)}}^{\xi^{(2)}}\left\{(p_1-p_2)u'^2_x+p_2\left(u'_x-\frac{uv'_x}{v}\right)^2\right\}\frac{dx}{d\sigma}\,d\sigma.\tag{10}$$

Но левая часть последнего равенства равна нулю, а правая — положительна, если $v(x)>0$ для всех $x\in[\xi^{(1)};\xi^{(2)}]$, и приходим к противоречию.

Если $v(x)$ обращается в нуль, например, при $x=\xi^{(1)}$, то в равенстве (10) неопределенная величина $\dfrac{u}{v}$ при $x=\xi^{(1)}$ заменяется на $\lim\limits_{x\to\xi^{(1)}+0}\dfrac{u}{v}=\dfrac{u'(\xi^{(1)}+0)}{v'(\xi^{(1)}+0)}$. Поэтому

$$\lim_{x\to\xi^{(1)}+0}\left(\frac{u}{v}\left(p_1u'_xv-p_2v'_xu\right)\right)=\lim_{x\to\xi^{(1)}+0}\Big(u(p_1-p_2)u'_x\Big)=0,$$

и снова приходим к противоречию. Случай $x=\xi^{(2)}$ рассматривается аналогично. Таким образом, $v(x)$ обязана внутри интервала $(\xi^{(1)};\xi^{(2)})$ менять знак. $\square$

Из теорем 2 и 3 очевидным образом вытекает

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — нетривиальные решения уравнений*

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p_1u'_x\right)+\frac{dQ_1}{d\sigma}u=0,$$

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(p_2v'_x\right)+\frac{dQ_2}{d\sigma}v=0$$

соответственно, причем $p_1(x)\geqslant p_2(x)>0$ и $\dfrac{dQ_1}{d\sigma}(x)\geqslant\dfrac{dQ_2}{d\sigma}(x)$ для всех $x\in\overline{[0;\ell]}_\sigma$; $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ — нулевые точки $u(x)$ в $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Тогда $v(x)$ меняет в $(\xi_1;\xi_2)$ знак.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

9. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

10. Баев, А. Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

11. Мышкис, А. Д. О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами / А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.

12. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

13. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

14. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

15. Покорный, Ю. В. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

16. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

REFERENCES

1. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v

obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

2. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

3. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

9. Davydova M.B., Shabrov S.A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

10. Baev A.D., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Stieltjes differential in nonlinear momentum problems. [Baev A.D., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Differencial Stilt'esa v impul'snyx nelineyjnyx zadachax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 458, no. 6, pp. 627–629..

11. Myshkis A.D. On solutions of linear homogeneous two-dimensional second-order differential inequality with generalized coefficients. [Myshkis A.D. O resheniyax linejnogo odnorodnogo dvumernogo differencial'nogo neravenstva vtorogo poryadka s obobshhennymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 5, pp. 615— 619.

12. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

13. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo

funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

14. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

15. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. About problem of Sturm - Liouville for discontinuous strings. [Pokornyj Yu.V., M.B. Zvereva, S.A. Shabrov O zadache Shturma–Liuvillya dlya razryvnoj struny]. *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskij region. Matematika i mexanika sploshnyx sred. Specvypusk. Rostov-na-Donu — Proceedings of the universities. North Caucasus region. Mathematics and mechanics of continuous media. Special Issue. Rostov-on-Don*, 2004, pp. 186–190.

16. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Крохина Дарья Алексеевна, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: dkroxina@mail.ru

Krokhina Daria Alekseevna, student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dkroxina@mail.ru

Белов Никита Андреевич, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: alzacc@yandex.ru

Belov Nikita Andreevich, student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: alzacc@yandex.ru

Ильченко Антон Геннадиевич, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: mathantonvsu@gmail.com

Ilchenko Anton Gennadievich, student of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mathantonvsu@gmail.com