УДК 517.925

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. И. Усков

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

Поступила в редакцию 27.08.2020 г.

Аннотация. Рассматривается задача Коши для алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве. Уравнениями и системами дифференциальных уравнений второго порядка моделируется работа схемы электронного триода с обратной связью, движение упругой среды в открытом неподвижном контейнере, считывание информации с диска и т. д. Для решения задачи, по-видимому, впервые применяется метод каскадной декомпозиции. Перед старшей производной находится вырожденный операторный коэффициент; он обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом. Это свойство позволяет расщепить решение задачи и начальные условия на соответствующие задачи и начальные условия в подпространствах и решать задачи в этих подпространствах. Определяются условия, при которых решение исходной задачи существует, единственно; находится это решение.

Ключевые слова: задача Коши, алгебро-дифференциальное уравнение, банахово пространство, 0-нормальное собственное число, решение.

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SOME SECOND ORDER ALGEBRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A BANACH SPACE

V. I. Uskov

Abstract. We consider the Cauchy problem for a second order algebraic differential equation in a Banach space. Operation of an electronic triode circuit with feedback, movement of an elastic medium in an open stationary container, reading information from a disk, etc. modeled by equations and systems of second-order differential equations. To solve the problem, apparently, the method of cascade decomposition is used for the first time. The highest derivative multiplying by a degenerate operator coefficient; it has the property of having 0 as a normal eigenvalue. This property allows one to split the solution of the problem and the initial conditions into the same problems and initial conditions in subspaces and solve problems in these subspaces. The conditions are determined under which the solution to the original problem exists, is unique; this solution is found.

Keywords: Cauchy problem, algebro-differential equation, Banach space, 0-normal eigenvalue, solution.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача Коши:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} = Dx(t) + F(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x^0 \in E, \quad x'(0) = x^1 \in E \tag{2}$$

с оператором

$$D = D(t) = a\frac{d}{dt} + b(t)I,$$

где A — замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E, $\overline{\mathrm{dom}\,A} = E$; оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом; $a, b(t)$ — скаляры, $a \neq 0$, $F(t)$ — функция со значениями в E; $t \in [0,T]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $x(t)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая (1), (2) при каждом $t \in [0,T]$.

Уравнениями и системами дифференциальных уравнений второго порядка описывается работа схемы электронного триода с обратной связью (уравнение Рэлея) [1], движение упругой среды в открытом неподвижном контейнере (уравнение Ламе) [2], считывание информации с диска [3] и т. д.

Определение 1. *Линейный оператор A, действующий в банаховом пространстве E, обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, 0-н.с.ч.), если имеет место разложение в прямую сумму*

$$E = M \oplus N, \tag{3}$$

где N — корневое подпространство оператора A, а M инвариантно и таково, что сужение $\widetilde{A}$ оператора A на M имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$ [4].

Определение 2. *Жордановой цепочкой элементов, отвечающих нулевому собственному значению, назовем последовательность элементов $\{e_i\}$, $e_1 \neq 0$, удовлетворяющих равенствам* [5]

$$Ae_1 = 0, \quad Ae_i = e_{i-1}, \quad i = 2,3,\ldots .$$

Корневое подпространство — это линейная оболочка, натянутая на элементы жордановой цепочки.

Свойство 0-н.с.ч. позволяет расщепить исходную задачу на задачу в подпространствах и решать задачи в этих подпространствах.

Оно применялось при исследовании задачи Коши для алгебро-дифференциального уравнения первого порядка (невозмущенного и возмущенного с помощью малого параметра) с необратимым оператором при старшей производной (С. П. Зубова, [6]) и задачи с условиями типа Шоуолтера для уравнения в частных производных [7].

Расщепления исходных пространств производились и в других работах (М. М. Вайнберг, В. А. Треногин), но авторы либо ограничивались случаем конечномерного пространства (М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, V. Lovass-Nagy), либо исходная система после преобразования матричных коэффициентов обретала больший размер (В. А. Ильин, A. Ailon).

1. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается случай одномерного ядра оператора A. Вводятся проекторы P, Q на N и M соответственно, отвечающие разложению (3). Свойство 0-н.с.ч. разлагает $x(t)$ и $F(t)$ в суммы

$$x(t) = Qx(t) + Px(t), \quad Qx \in M, \quad Px \in N, \tag{4}$$

$$F(t) = QF(t) + PF(t), \quad QF \in M, \quad PF \in N. \tag{5}$$

Подстановка (4), (5) в уравнение (1) с учетом того, что

$$M \cap N = \{0\}, \tag{6}$$

приводит к уравнению в подпространстве M:

$$\widetilde{A}\frac{d^2Qx}{dt^2} = DQx(t) + QF(t) \tag{7}$$

и к уравнению в подпространстве N:

$$A\frac{d^2Px}{dt^2} = DPx(t) + PF(t). \tag{8}$$

Разложения $x(0)$, $x'(0)$, x^0, x^1 из E в суммы

$$\begin{aligned} x(0) &= Qx(0) + Px(0), \qquad & x^0 &= Qx^0 + Px^0, \\ x'(0) &= (Qx)'(0) + (Px)'(0), \qquad & x^1 &= Qx^1 + Px^1 \end{aligned}$$

и (6) влекут начальные условия в подпространстве M:

$$Qx(0) = Qx^0, \quad (Qx)'(0) = Qx^1, \tag{9}$$

и в подпространстве N:

$$Px(0) = Px^0, \quad (Px)'(0) = Px^1. \tag{10}$$

Назовем задачу (7), (9) — M-задачей, а задачу (8), (10) — N-задачей.

2. РЕШЕНИЕ M-ЗАДАЧИ

Обращение уравнения (7):

$$\frac{d^2Qx}{dt^2} = \widetilde{A}^{-1}DQx(t) + \widetilde{A}^{-1}QF(t)$$

и замена в нем

$$\frac{dQx}{dt} = Qy(t), \tag{11}$$

приводят к уравнению

$$\frac{dQy}{dt} = a\widetilde{A}^{-1}Qy(t) + b(t)\widetilde{A}^{-1}Qx(t) + \widetilde{A}^{-1}QF(t). \tag{12}$$

Запишем систему (11), (12) в одно уравнение:

$$\frac{dQz}{dt} = RQz(t) + QG(t) \tag{13}$$

с оператором $R = R(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ b(t)\widetilde{A}^{-1} & a\widetilde{A}^{-1} \end{pmatrix}$, вектор-функциями $Qz = \begin{pmatrix} Qx \\ Qy \end{pmatrix}$, $QG = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{A}^{-1}QF \end{pmatrix}$ и начальной вектор-функцией (условия (9))

$$Qz(0) = \begin{pmatrix} Qx^0 \\ Qx^1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Решение задачи (13), (14) определяется формулой [8]

$$Qz(t) = \begin{pmatrix} Qx(t) \\ Qy(t) \end{pmatrix} = U(t,0)\begin{pmatrix} Qx^0 \\ Qx^1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t U(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{A}^{-1}QF(s) \end{pmatrix} ds, \tag{15}$$

где $U(t,s)$ — эволюционный оператор, порожденный оператором $R(t)$.

Тем самым, получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть функции $b(t)$, $QF(t)$ непрерывны. Тогда решение $Qx(t)$ задачи* (7), (9) *существует, единственно и определяется формулой* (15).

Действительно, в предположении непрерывности функции $QF(t)$ функция $QG(t)$ непрерывна. Далее, предположение непрерывности функции $b(t)$ влечет ограниченность и сильную непрерывность оператора R (напомним, что оператор $\widetilde{A}^{-1}$ ограничен).

3. РЕШЕНИЕ N-ЗАДАЧИ

Задача рассматривается в случае $\dim N = n$. Разложив элементы Px, PF по базису $e = \{e_i\}_{i=1}^n$:

$$Px(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)e_i, \tag{16}$$

$$PF(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i,$$

подставив эти разложения в уравнение (8) и приравняв коэффициенты при элементах базиса, получим уравнения

$$\begin{aligned} &x''_{i+1}(t) = Dx_i(t) + f_i(t),\\ &0 = Dx_n(t) + f_n(t), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &Dx_i(t) = x''_{i+1}(t) - f_i(t), \quad i = 1,2,\dots,n-1,\\ &Dx_n(t) = -f_n(t). \end{aligned} \tag{17}$$

В предположении, что функции $x_i(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, $b(t)$ непрерывно дифференцируема, решив систему (17) снизу вверх с начальными значениями $x_i(0)$, получим

$$\begin{aligned} &x_i(t) = J(0,t)x_i(0) + a^{-1}\int_0^t J(s,t)\left(x''_{i+1}(s) - f_i(s)\right) ds, \quad i = n-1,n-2,\dots,2,1,\\ &x_n(t) = J(0,t)x_i(0) - a^{-1}\int_0^t J(s,t)f_n(s)\,ds \end{aligned} \tag{18}$$

в обозначениях

$$c(t) = -a^{-1}b(t), \quad J(s,t) = \exp\int_s^t c(z)\,dz.$$

Применив в интеграле, содержащем вторые производные, процедуру интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} x_i(t) = {} & J(0,t)\bigl(x_i(0) - a^{-1}x'_{i+1}(0) - a^{-1}c(0)x_{i+1}(0)\bigr) +\\ & + a^{-1}\bigl(x'_{i+1}(t) + c(t)x_{i+1}(t)\bigr) + a^{-1}\int_0^t J(s,t)\bigl((c^2(s) - c'(s))x_{i+1}(s) - f_i(s)\bigr)\,ds,\\ & i = n-1,n-2,\dots,2,1. \end{aligned} \tag{19}$$

Разложение начальных значений по базису e:

$$Px(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i(0)e_i, \qquad Px^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i,$$
$$(Px)'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)e_i, \qquad Px^1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 e_i$$

и приравнивание коэффициентов при элементах базиса приводят к условиям

$$x_i(0) = x_i^0, \quad x_i'(0) = x_i^1, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{20}$$

Тем самым, получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть функции $x_i(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, $b(t)$ непрерывно дифференцируема, $f_i(t)$ непрерывны. Тогда решение $Px(t)$ задачи* (8), (10) *существует, единственно и определяется по формулам* (16), (19), (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стокер, Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических схемах Дж. Стокер. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1952. — 264 с.

2. Веневитина, С. С. Малые движения упругой среды в открытом неподвижном контейнере / С. С. Веневитина, С. Г. Крейн // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1995. — Т. 35, № 7. — С. 1095–1107.

3. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. — М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. — 832 с.

4. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.

5. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. — М. : Наука, 1972.

6. Зубова, С. П. Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной / С. П. Зубова // Автореф. дисс... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1973. — 11 с.

7. Зубова, С. П. Решение полуграничной задачи для вырожденного уравнения в частных производных первого порядка / С. П. Зубова, А. Х. Мохамад, В. И. Усков // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 173. — С. 48–57.

8. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

REFERENCES

1. Stoker J.J. Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. [Stoker Dzh. Nelineyjnye kolebaniya v mexanicheskix i elektricheskix sxemax]. Moscow, 1952, 264 p.

2. Venevitina S.S., Krein S.G. Small motions of an elastic medium in an open immobile container. [Venevitina S.S., Krein S.G. Malye dvizheniya uprugoyj sredy v otkrytom nepodvizhnom konteyjnere]. *Zhurnal vychislitel'noyj matematiki i matematicheskoyj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, vol. 35, no. 7, pp. 1095–1107.

3. Dorf R.C., Bishop R.H. Modern Control Systems. [Dorf R.C., Bishop R.H. Sovremennye sistemy upravleniya]. Moscow, 2002, 832 p.

4. Gohberg I.C., Krein M.G. Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. [Gohberg I.C., Krein M.G. Vvedenie v teoriyu linejnyh nesamosopryazhennyh operatorov]. Moscow, 1965, 448 p.

5. Functional analysis. S.G. Krein. [Funkcional'nyyj analiz. Pod red. S.G. Kreyjna]. Moscow: Nauka, 1972.

6. Zubova S.P. Singular perturbation of linear differential equations unresolved with respect to the derivative. [Zubova S.P. Singulyarnoe vozmushchenie linejnyh differencial'nyh uravnenij, nerazreshennyh otnositel'no proizvodnoj]. Voronezh, 2013, 11 p.   Zubova S.P., Mohamad A.H., Uskov V.I. Solution of a semi-boundary value problem for a degenerate of the first order partial differential equation Zubova S.P., Mohamad A.H., Uskov V.I. Reshenie polugranichnoj zadachi dlya vyrozhdennogo uravneniya v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory Journal of Mathematical Sciences 2019, vol. 173, pp. 48–57

7. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. [Krein S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moscow, 1967.

Усков В. И., кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра математики, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, Воронеж, Россия
E-mail: vum1@yandex.ru

Uskov V. I., candidate of physics and mathematics, senior lecturer, department of Mathematics, Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia
E-mail: vum1@yandex.ru