УДК 517.927.2

ОБ ОПЕРАТОРЕ СДВИГА ПО ТРАЕКТОРИЯМ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ*

В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.

Аннотация. В работе изучается случайное дифференциальное включение вида

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega,t,x(t)) \qquad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{1}$$

где параметр ω принадлежит измеримому пространству (Ω, Σ) и при каждом ω многозначное отображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot,\cdot)\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения и удовлетворяет верхним условиям Каратеодори. Рассматривается многозначный оператор сдвига $\Pi\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ по траекториям дифференциального включения (1), заданный как

$$\Pi(\omega, y) = \{x(\omega, T) : \ x(\omega, \cdot) - \text{ случайное решение включения (1) с начальным}$$

$$\text{условием } x(\omega, 0) = y\}.$$

Показано, что Π является случайным многозначным отображением. т. е. оно измеримо относительно σ- алгебры $\Sigma \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: случайное мультиотображение, случайное дифференциальное включение, случайный мультиоператор сдвига.

ON A TRANSLATION MULTIOPERATOR ALONG TRAJECTORIES OF SOLUTIONS OF RANDOM DIFFERENTIAL INCLUSIONS

V. V. Obukhovskii, S. V. Kornev, E. N. Getmanova

Abstract. We study a random differential inclusion of the form

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega,t,x(t)) \qquad \text{a.e. } t \in [0,T], \tag{2}$$

where the parameter ω belongs to a measurable space (Ω, Σ) and for each ω the multivalued map $\mathcal{F}(\omega, \cdot,\cdot)\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ has convex compact values and satisfies upper Carathéodory conditions. We consider the multivalued translation operator $\Pi\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ along the trajectories of differential inclusion (2) defined as

$$\Pi(\omega, y) = \{x(\omega, T) : \ x(\omega, \cdot) \text{ is a random solution of inclusion (2) satisfying the initial}$$

$$\text{condition } x(\omega, 0) = y\}.$$

It is shown that Π is a random multivalued map, i.e., it is measurable with respect to the σ-algebra $\Sigma \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, where $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ denotes the σ-algebra of Borel subsets of $\mathbb{R}^n$.

Keywords: random multimap, random differential inclusion, random translation multioperator.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-0640-2020-0009).

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия при моделировании стохастических воздействий на динамические системы, описываемые дифференциальными включениями, широко применяется метод введения случайного параметра (см., например, [5], [7], [11], [13]–[17], [19], [20]). В настоящей работе описывается построение мультиоператора сдвига по траекториям решений случайного дифференциального включения и доказывается, что он является случайным мультиотображением.

Отметим, что метод оператора сдвига и тесно связанный с ним метод направляющих функций восходят к работам М. А. Красносельского и А. И. Перова (см. [2]–[4]) и широко используются в настоящее время для исследования периодических решений дифференциальных включений (см. монографии [1], [8], [12], [18] и имеющиеся там ссылки).

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть (Ω, Σ) – измеримое пространство; (X, d_X) – сепарабельное метрическое пространство; символ $C(X)$ обозначает совокупность всех непустых замкнутых подмножеств X.

Определение 1. Многозначное отображение (мультиотображение) $\Phi\colon \Omega \to C(X)$ называется измеримым, если для любого открытого множества $V \subset X$ его малый прообраз

$$\Phi_+^{-1}(V) = \{\omega \in \Omega \colon \Phi(\omega) \subset V\}$$

измерим.

Лемма 1. *([9]) Мультиотображение $\Phi\colon \Omega \to C(X)$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого x, принадлежащего счетному плотному подмножеству X, функция $\psi_x\colon \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$\psi_x(\omega) = d_X(x, \Phi(\omega)) = \inf\{d_X(x,y)\colon y \in \Phi(\omega)\}$$

измерима.

Лемма 2. *([7]) Пусть (X, d_X) – полное сепарабельное метрическое пространство; $\Phi\colon \Omega \to C(X)$ – измеримое мультиотображение; $\varphi\colon \Omega \to X$ – измеримое отображение. Тогда функция $\kappa\colon \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$\kappa(\omega) = d_X(\varphi(\omega), \Phi(\omega))$$

измерима.

Лемма 3. *([19]) Пусть X – сепарабельное банахово пространство; мультифункция $\Phi\colon [a,b] \to C(X)$:*

i) измерима по Лебегу, т.е. измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{L}([a,b])$ лебеговых подмножеств $[a,b]$;

ii) интегрально ограничена, т. е. существует интегрируемая функция $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\| \Phi(t) \| := \sup\{\| \varphi \| \colon \varphi \in \Phi(t)\} \leqslant \gamma(t) \quad \text{п.в. } t \in [a,b].$$

Тогда множество S^1_Φ всех интегрируемых по Бохнеру сечений Φ непусто и, более того, для любой интегрируемой функции $v\colon [a,b] \to X$ выполнены следующие соотношения:

$$dist_{L^1}(v, S^1_\Phi) := \inf\{dist_{L^1}(v,s)\colon s \in S^1_\Phi\} =$$

$$= \inf\left\{\int_a^b \| v(t) - s(t) \| \, dt \colon s \in S^1_\Phi\right\} = \int_a^b d_X(v(t), \Phi(t)) dt.$$

Пусть теперь задано измеримое пространство (Ω, Σ) и сепарабельные метрические пространства X и Y. Пусть $\mathbb{B}(X)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств пространства X и $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая множества вида $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathbb{B}(X)$.

Определение 2. Мультиотображение $\Phi\colon \Omega \times X \to C(Y)$ называется случайным, если оно измеримо относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$.

Для того, чтобы привести пример случайного мультиотображения, напомним следующие понятия (см., например, [1], [8], [10], [12]).

Определение 3. Мультиотображение $\Phi\colon X \to C(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн.св.), если малый прообраз $\Phi_+^{-1}(V)$ любого открытого множества $V \subset Y$ открыт в X. Если малый прообраз $\Phi_+^{-1}(W)$ любого замкнутого подмножества $W \subset Y$ замкнут в X, то Φ называется полунепрерывным снизу (пн.сн.). Если мультиотображение Φ полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.

Ясно, что в случае однозначного отображения все эти понятия совпадают с обычной непрерывностью.

Справедливо следующее утверждение (см. [10], Proposition 7.9).

Лемма 4. *Пусть $\Phi\colon \Omega \times X \to C(Y)$ – мультиотображение типа Каратеодори, т.е.*

1) *для любого $x \in X$ мультиотображение $\Phi(\cdot,x)\colon \Omega \to C(Y)$ измеримо;*

2) *для любого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\Phi(\omega,\cdot)\colon X \to C(Y)$ непрерывно.*

Тогда мультиотображение Φ является случайным.

Будем говорить, что случайное мультиотображение $\Phi\colon \Omega \times X \to C(Y)$ является *u-случайным*, если для любого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\Phi(\omega,\cdot)\colon X \to C(Y)$ является пн.св.

Отметим также, что мультиотображение $\Phi\colon X \to C(Y)$ называется *замкнутым*, если его график
$$\Gamma_\Phi = \{(x,y) \in X \times Y : y \in \Phi(x)\}$$
является замкнутым подмножеством $X \times Y$.

Мы будем использовать в дальнейшем следующее понятие (см., например, [10]).

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с мерой. Мера μ называется полной, если для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) = 0$ для каждого $B \subset A$ имеем $B \in \Sigma$ и, следовательно, $\mu(B) = 0$. Наименьшее расширение $(\Omega, \sigma_0, \mu_0)$ пространства (Ω, Σ, μ), при котором мера μ_0 полна, называется его μ-пополнением. Пусть теперь (Ω, Σ) – измеримое пространство и для каждой вероятностной меры μ на (Ω, Σ), пусть Σ_μ – μ-пополнение Σ. Обозначая $M_+^1(\Omega)$ совокупность всех вероятностных мер, рассмотрим
$$\widehat{\Sigma} = \bigcap_{\mu \in M_+^1(\Omega)} \Sigma_\mu.$$
Измеримое пространство (Ω, Σ) называется полным, если $\Sigma = \widehat{\Sigma}$.

Лемма 5. *Пусть (Ω, Σ) – полное измеримое пространство; (X,d_X) – полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\Phi\colon \Omega \times X \to C(X)$ – случайное мультиотображение такое, что для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\Phi(\omega,\cdot)$ замкнуто и множество неподвижных точек*
$$Fix_\omega \Phi = \{x \in X : x \in \Phi(\omega,x)\}$$
непусто. Тогда мультиотображение $\Psi : \Omega \to C(X)$, $\Psi(\omega) = Fix_\omega \Phi$ измеримо.

Доказательство Из замкнутости мультиотображений $\Phi(\omega,\cdot)$ вытекает, что Ψ имеет замкнутые значения. Применяя Лемму 2, получим, что числовая функция $\mu\colon \Omega \times X \to \mathbb{R}$,

$$\mu(\omega, x) = d_X(x, \Phi(\omega,x))$$

является случайной. Но тогда

$$\Gamma_\Psi = \mu^{-1}(0) \in \Sigma \times \mathbb{B}(X)$$

и измеримость мультифункции Ψ следует из [10], Theorem 2.1.35 (c) (см. также [6], Theorem III.30).

$\square$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть теперь (Ω, Σ) – полное измеримое пространство; $\mathcal{L}$ обозначает σ-алгебру лебеговых подмножеств отрезка $[0,T]$; $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ и $Kv(\mathbb{R}^n)$ – совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Мы будем рассматривать задачу об операторе сдвига по траекториям случайного дифференциального включения вида:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega,t,x(t)) \qquad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{3.1}$$

$$x(\omega,0) = y(\omega), \tag{3.2}$$

где мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{F}_\omega 1$) $\mathcal{F}$ измеримо относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{L} \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$;

($\mathcal{F}_\omega 2$) для любых $\omega \in \Omega$ и п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ пн.св.;

($\mathcal{F}_\omega 3$) существует функция $c : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ такая, что $c(\omega, \cdot)$ интегрируема на $[0,T]$ для каждого $\omega \in \Omega$, $c(\cdot, t)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – измеримая функция для п.в. $t \in [0,T]$ и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \varphi)\| := \sup\{|z| : z \in F(\omega, t, \varphi)\} \leqslant c(\omega, t)(1 + |\varphi|).$$

F Отметим (см. [5], Theorem 4.2), что при данных условиях задача (3.1), (3.2) имеет случайное решение, т.е. существует функция $x\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что:

(i) при каждом $\omega \in \Omega$ функция $x(\omega, \cdot)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет соотношениям (3.1), (3.2);

(ii) отображение $\omega \in \Omega \to x(\omega,\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$ измеримо.

Пусть $\Delta(\omega, y) \subset C([0,T]; \mathbb{R}^n)$ обозначает при данном $\omega \in \Omega$ множество всех решений задачи (3.1), (3.2) с начальным значением $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим непрерывное отображение $\xi\colon C([0,T]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, заданное как $\xi(x) = x(T)$.

Определение 4. Мультиотображение $\Pi\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$, определенное как композиция

$$\Pi(\omega,y) = \xi \circ \Delta(\omega,y),$$

называется мультиоператором сдвига по траекториям решений задачи (3.1), (3.2).

Основное свойство мультиоператора Π описывает следующее утверждение.

Теорема 5. *Мультиоператор сдвига* Π *является случайным и-мультиотображением.*

Доказательство Тот факт, что при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\Pi(\omega, \cdot)$ имеет компактные значения и полунепрерывно сверху, вытекает из общей теории дифференциальных включений (см., например, [1]). Следовательно, остается показать, что мультиотображение Π измеримо.

Рассмотрим вспомогательное мультиотображение

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times L^1([0,T];\mathbb{R}^n) \to Kv(\mathbb{R}^n),$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u) = \mathcal{F}(\omega, t, y + \int_0^t u(s)ds).$$

Покажем, что $\widetilde{\mathcal{F}}$ измеримо относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{L} \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{B}(L^1)$, где L^1 обозначает пространство $L^1([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$\theta : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times L^1 \to \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

$$\theta(\omega, t, y, u) = (\omega, t, y + \int_0^t u(s)ds).$$

Тогда $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \circ \theta$.

Пусть теперь $V \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Тогда $\mathcal{F}^{-1}(V)$ – элемент σ-алгебры, порожденной множествами $A \times B \times C$, где $A \in \Sigma$, $B \subset [0,T]$ – измеримо по Лебегу, $C \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество.

Покажем, что $\theta^{-1}(A \times B \times C)$ – измеримое подмножество $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times L^1$.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$\theta' : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times L^1 \to \mathbb{R}^n,$$

$$\theta'(t, y, u) = y + \int_0^t u(s)ds.$$

Заметим, что $(\theta')^{-1}(C)$ – открытое подмножество $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times L^1$, которое может быть представлено в виде

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [(t_i, t_i + \triangle_i) \times U_i \times D_i],$$

где $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $D_i \subset L^1$ – открытые подмножества.

Но тогда

$$\theta^{-1}(A \times B \times C) = A \times \bigcup_{i=1}^{\infty} [((t_i, t_i + \triangle_i) \cap B) \times U_i \times D_i]$$

является измеримым подмножеством $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times L^1$. Это означает, что $\widetilde{\mathcal{F}}$ измеримо.

Зафиксируем $\omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n, u \in L^1$. Тогда мультифункция

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega,y,u}(t) = \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u)$$

измерима по Лебегу и, следовательно, корректно определен мультиоператор суперпозиции:

$$\mathcal{P} : \Omega \times \mathbb{R}^n \times L^1 \multimap L^1,$$

$$\mathcal{P}(\omega, y, u) = \{f \in L^1 : f(t) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\omega,y,u}(t) = \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u) = \mathcal{F}(\omega, t, y + \int_0^t u(s)ds)\}.$$

Отметим (см., например, [1], Следствие 1.5.31), что для любых фиксированных $\omega \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$ мультиотображение $\mathcal{P}(\omega, y, \cdot)$ замкнуто.

Покажем, что $\mathcal{P}$ – измеримое мультиотображение. Возьмем произвольную функцию $v \in L^1$. Согласно Лемме 3 для заданных ω, y, u получим оценку:

$$d_{L^1}(v, \mathcal{P}(\omega, y, u)) = d_{L^1}(v, \widetilde{\mathcal{F}}_{\omega,y,u}) = \int_0^T d_{\mathbb{R}^n}(v(t), \widetilde{\mathcal{F}}_{\omega,y,u}(t))dt = \int_0^T d_{\mathbb{R}^n}(v(t), \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u))dt.$$

Определим функцию $\widetilde{v}(\omega, t, y, u) = v(t)$. Так как $\widetilde{v}$ – измерима и $\widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u)$ – измерима, то согласно Лемме 2 числовая функция

$$(\omega, t, y, u) \to d_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{v}(\omega, t, y, u), \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u)) = d_{\mathbb{R}^n}(v(t), \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u))$$

измерима.

По теореме Фубини получаем, что функция

$$(\omega, y, u) \to \int_0^T d_{\mathbb{R}^n}(v(t), \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u))dt$$

измерима.

Значит, для любого $v \in L^1$ функция $(\omega, y, u) \to d_{L^1}(v, \mathcal{P}(\omega, y, u))$ измерима, следовательно, согласно Лемме 1, $\mathcal{P}(\omega, y, u)$ – измеримое мультоотображение.

Зафиксируем $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Тогда для такой пары существует неподвижная точка $u_{\omega,y} \in L^1$ мультиоператора суперпозиции:

$$u_{\omega,y} \in \mathcal{P}(\omega, y, u_{\omega,y}). \tag{3.3}$$

В самом деле, пусть абсолютно непрерывная функция $x_{\omega,y}(t)$ есть решение задачи (3.1), (3.2) с начальным значением y. Тогда в качестве $u_{\omega,y}$ можно взять производную $u_{\omega,y}(t) = x'_{\omega,y}(t)$. Действительно, согласно (3.1) почти для каждого $t \in [0,T]$ имеем

$$u_{\omega,y}(t) \in F(\omega, t, x_{\omega,y}(t)) = F(\omega, t, y + \int_0^t u_{\omega,y}(s)ds) = \widetilde{\mathcal{F}}(\omega, t, y, u_{\omega,y}(t)).$$

Ясно, что верно и обратное: если функция $u_{\omega,y}$ удовлетворяет включению (3.3), то функция $x_{\omega,y}(t) = y + \int_0^t u_{\omega,y}(s)ds$ является решением задачи (3.1), (3.2) с начальным значением y.

Применяя Лемму 5, получаем, что $\mathcal{R} : \Omega \times \mathbb{R}^n \multimap L^1$, заданное как

$$\mathcal{R}(\omega, y) = Fix\mathcal{P}(\omega, y, \cdot)$$

является случайным мультиотображением.

Нетрудно видеть, что тогда и

$$\widetilde{\mathcal{R}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n \times L^1,$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\omega, y) = (y, \mathcal{R}(\omega, y))$$

является случайным мультиотображением.

Если теперь рассмотреть непрерывный интегральный оператор

$$j : \mathbb{R}^n \times L^1 \to C([0,T] : \mathbb{R}^n),$$

$$j(y,u) = y + \int_0^t u(s)ds,$$

то ясно, что композиция $j \circ \widetilde{\mathcal{R}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to C([0,T]; \mathbb{R}^n$ – случайное мультиотображение и

$$j \circ \widetilde{\mathcal{R}}(\omega, y) = \Delta(\omega, y),$$

откуда и вытекает, что Π – случайное мультиотображение.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : Либроком, 2011. — 224 с.

2. Красносельский, М. А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // ДАН СССР. — 1958. — Т. 123, № 2. — С. 235–238.

3. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / Красносельский М. А. — М. : Наука, 1966.

4. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975.

5. Andres, J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Gorniewicz // Topol. Meth. Nonl. Anal. — 2012. — V. 40, № 2. — P. 337–358.

6. Castaing, C. Convex Analysis and Measurable Multifunctions / C. Castaing, M. Valadier // Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag. — 1977. — 286 p.

7. Engl, H. W. Random fixed point theorems for multivalued mappings / H. W. Engl // Pacific J. Math. — 1978. — V. 76. — P. 351–360.

8. Gorniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Gorniewicz // Berlin, New York: Springer-Verlag. — 2006. — 539 p.

9. Himmelberg, C. J. Measurable relations. / C. J. Himmelberg // Fundamenta Math. — 1975. — V. 87, № 1. — P. 53–72.

10. Hu, S. Handbook of Multivalued Analysis. Theory / S. Hu, N. S. Papageorgiou // Dordrecht: Springer, 1997. — 968 p.

11. Itoh, S. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces / S. Itoh // J. Math. Anal. Appl. — 1979. — V. 67. — P. 261–273.

12. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca // De Gruyter Series in Nonnlinear Analysis and Applications, Berlin–New York : Walter de Gruyter, 2001.

13. On periodic solutions of random differential inclusions / S. V. Kornev, Y.-C. Liou, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii // Applied Analysis and Optimization. — 2017. — V. 1, iss. 2. — P. 245–258.

14. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions / S. V. Kornev, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii, C.-F. Wen // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2018. — V. 19, № 3. — P. 493–500.

15. Kornev, S. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations / S. Kornev, V. Obukhovskii, P. Zecca // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2019. — V. 31, iss. 2. — P. 1017–1028.

16. Kornev, S. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, J.-C. Yao // J. Differential Equat. — 2020. — V. 268. — P. 5792–5810.

17. On asymptotics of solutions for inclusions with random causal multioperators / S. Kornev, V. Obukhovskii, Yu. Bezmelnitsyna, J.-C. Yao // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2021. — V. 22, № 1. — P. 173–184.

18. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev // Lecture Notes in Math. 2076, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013.

19. Rybinski, L. E. Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions / L. E. Rybinski // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — V. 142. — P. 53–61.

20. Tarafdar, E. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusion / E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1996. — V. 37. — P. 725–748.

REFERENCES

1. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskiyj V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazheniyj i differencial'nyx vklyucheniyj]. Moscow, 2011, 224 p.

2. Krasnoselsky M.A., Perov A.I. On one principle of the existence of bounded, periodic and almost periodic solutions for systems of ordinary differential equations. [Krasnosel'skiyj M.A., Perov A.I. Ob odnom principe sushhestvovaniya ogranichennyx, periodicheskix i pochti periodicheskix resheniyj u sistem obyknovennyx differencial'nyx uravneniyj]. *DAN SSSR – DAN USSR*, 1958, vol. 123, iss. 2, pp. 235–238..

3. Krasnoselsky M.A. The operator of the shift along the trajectories of differential equations. [Krasnosel'skiyj M.A. Operator sdviga po traektoriyam differencial'nyx uravneniyj]. Moscow: Nauka, 1966.

4. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometric methods of nonlinear analysis. [Krasnosel'skiyj M.A., Zabreyjko P.P. Geometricheskie metody nelineyjnogo analiza]. Moscow: Nauka, 1975.

5. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal., 2012, vol. 40, no. 2, pp. 337–358.

6. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1977, 286 p.

7. Engl H.W. Random fixed point theorems for multivalued mappings. Pacific J. Math., 1978, vol. 76, pp. 351–360.

8. Gorniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006, 539 p.

9. Himmelberg C.J. Measurable relations. Fundamenta Math., 1975, vol. 87, no. 1, pp. 53–72.

10. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of Multivalued Analysis. Theory. Dordrecht: Springer, 1997, 968 p.

11. Itoh S. Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 1979, vol. 67, P. 261–273.

12. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonnlinear Analysis and Applications, 7, Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001.

13. Kornev S.V., Liou Y.-C., Loi N.V., Obukhovskii V.V. On periodic solutions of random differential inclusions. Applied Analysis and Optimization, 2017, vol. 1, iss. 2, P. 245–258.

14. Kornev S.V., Loi N.V., Obukhovskii V.V., Wen C.-F. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2018, vol. 19, no. 3, pp. 493–500.

15. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. On multivalent guiding functions method in the periodic problem for random differential equations. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2019, vol. 31, iss. 2, pp. 1017–1028.

16. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C. Random integral guiding functions in the periodic problem for random differential inclusions with causal multioperators. J. Differential Equat., 2020, vol. 268, pp. 5792–5810.

17. Kornev S., Obukhovskii V., Bezmelnitsyna Yu., Yao J.-C. On asymptotics of solutions for inclusions with random causal multioperators. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 173–184.

18. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Math. 2076, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013.

19. Rybinski L.E. Random fixed points and viable random solutions of functional-differential inclusions. J. Math. Anal. Appl., 1989, vol. 142, P.53–61.

20. Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusion. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1996, vol. 37, pp. 725–748.

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико–математичесских наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Obukhovskii Valeri Vladimirovich, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Корнев Сергей Викторович, доктор физико–математичесских наук, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Kornev Sergey Viktorovich, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Гетманова Екатерина Николаевна, аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

Getmanova Ekaterina Nikolaevna, post graduate of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru