УДК 517.518.6+26

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ РЕКУРРЕНТНЫХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Э. Мухамадиев[1], А. Н. Наимов[1], В. Г. Гайцгори[2]

[1] — *Вологодский государственный университет;*
[2] — *Университет Маккуори*

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.

Аннотация. В работе исследованы известные и новые свойства рекуррентных и почти периодических функций. Эти свойства актуальны как с точки зрения анализа и теории функций, так и с точки зрения теории дифференциальных уравнений и динамических систем. Приводятся новые доказательства теорем о рекуррентности и почти периодичности неопределенных интегралов от рекуррентных и почти периодических функций. А также по новой схеме доказывается теорема о совместной рекуррентности любой пары рекуррентной и почти периодической функции. На основе схемы доказательства этой теоремы предложен и обоснован алгоритм построения новых рекуррентных функций по уже заданным рекуррентным функциям.
Ключевые слова: рекуррентная функция, почти периодическая функция, совместно рекуррентные функции.

RESEARCH OF CERTAIN PROPERTIES RECURRENT AND ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

E. Mukhamadiev, A. N. Naimov, V. G. Gaitsgori

Abstract. In this paper are investigated known and new properties of recurrent and almost periodic functions. These properties relevant both from the point of view of analysis and theory of functions, and from point of view of the theory of differential equations and dynamic systems. New proofs of theorems on recurrence and almost periodicity of integrals of recurrent and almost periodic functions are presented. And also, according to a new scheme, a theorem on the joint recurrence of any pair of recurrent and almost periodic functions is proved. On the basis of the scheme of the proof of this theorem, an algorithm for constructing new recurrent functions by the given recurrent functions.
Keywords: recurrent function, almost periodic function, jointly recurrent functions.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию некоторых свойств рекуррентных и почти периодических функций. Эти свойства актуальны как с точки зрения анализа и теории функций [1]–[4], так и с точки зрения теории дифференциальных уравнений и динамических систем [5]–[9]. Получены следующие новые результаты:

1. Доказано, что непрерывная и ограниченная на числовой оси $R^1 = (-\infty,\infty)$ комплексно-значная функция $f(t)$ почти периодична тогда и только тогда, когда для функции $f(t)$ имеет место равенство $\chi(f) = 0$, где

$$\chi(f) = \lim_{l\to\infty} \sup_{a\in R^1} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \sup_{\sigma\in R^1} |f(\sigma+s) - f(\sigma)|.$$

Число $\chi(f)$ можно принять в качестве меры не почти периодичности функции f.

2. Доказано, что равномерно непрерывная и ограниченная на R^1 комплекснозначная функция $f(t)$ будет рекуррентной тогда и только тогда, когда для любого $T > 0$ имеет место равенство $\chi(f,T) = 0$, где

$$\chi(f,T) = \lim_{l\to\infty} \sup_{a\in R^1} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(\sigma+s) - f(\sigma)| = 0.$$

Числа $\chi(f,T)$, $T \in R^1_+$ можно принять в качестве меры нерекуррентности функции f.

3. Приведено новое доказательство теоремы о рекуррентности неопределенного интеграла $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ от рекуррентной функции $f(t)$ [3]. В частности, приведено принципиально другое доказательство теоремы о почти периодичности неопределенного интеграла от почти периодической функции [6]. Схему доказательств этих теорем можно применять для установления рекуррентности или почти периодичности ограниченных решений дифференциальных уравнений. Например, можно привести другое доказательство обобщенной теоремы Бора-Нейгебауэра о почти периодичности ограниченного решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей и почти периодическим свободным членом [6]. В связи с этим отметим работу [10], где по такой же схеме доказано почти периодичность ограниченного и непрерывного на всей плоскости R^2 решения уравнения Пуассона $\Delta u = f$ с почти периодической правой частью f.

4. Приведено новое доказательство теоремы о совместной рекуррентности любой пары рекуррентной функции $f(t)$ и почти периодической функции $g(t)$ [3]. Схема доказательства заимствована из работы [11], где доказана рекуррентность функции $f(t) = \exp\left(i\int_0^t g_(s)ds\right)$ для любой вещественной почти периодической функции $g(t)$.

5. Применяя разработанную схему доказательства совместной рекуррентности пары рекуррентной и почти периодической функций, доказана теорема о совместной рекуррентности функций

$$f_1(t) = \exp\left(i\int_0^t g_1(s)ds\right), \quad \ldots, \quad f_m(t) = \exp\left(i\int_0^t g_m(s)ds\right),$$

построенных по вещественным функциям $g_1(t)$, …, $g_m(t)$, являющимися совместно рекуррентными. При этом функции $f_1(t)$, …, $f_m(t)$ и $g_1(t)$, …, $g_m(t)$ являются совместно рекуррентными. Из этой теоремы, в частности, вытекает следующий алгоритм построения новой рекуррентной функции по уже заданным рекуррентным функциям: если вещественные функции $g_1(t)$, …, $g_m(t)$ совместно рекуррентны и c_1, …, c_m — произвольные комплексные числа, то функция

$$f(t) = c_1\exp\left(i\int_0^t g_1(s)ds\right) + \quad \ldots \quad + c_m\exp\left(i\int_0^t g_m(s)ds\right)$$

совместно рекуррентна с функциями $g_1(t)$, …, $g_m(t)$.

6. Построено банахово пространство $\overline{B}$ совместно рекуррентных функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in R^1\}$, которое содержит все почти периодические функции и не совпадает с множеством почти периодических функций. Кроме этого, предложен способ определения среднего значения для рекуррентных функций из $\overline{B}$. Среднее значение рекуррентной функции из пространства $\overline{B}$ может быть полезно в теории динамических систем.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $C = C(-\infty,\infty)$ — пространство непрерывных и ограниченных на всей оси $R^1 = (-\infty,\infty)$ комплекснозначных функций $f(t)$ с равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{t\in R^1} |f(t)|.$$

Пространство C с введённой нормой является полным линейным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством. В пространстве C выделим множество UC, состоящее из всех равномерно непрерывных на всей оси функций. Функция $f(t)$ из C принадлежит множеству UC тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|t-s|<\delta}|f(t)-f(s)|=0.$$

Очевидно, UC — линейное множество. Проверим, что UC замкнуто. Действительно, если функция $f(t)$ из C принадлежит замыканию множества UC, то для любого $\varepsilon>0$ существует $f_\varepsilon(t)\in UC$ такая, что $\|f_\varepsilon-f\|<\varepsilon$. В силу равномерной непрерывности функции $f_\varepsilon(t)$ существует такое $\delta>0$, что $|f_\varepsilon(t)-f_\varepsilon(s)|<\varepsilon$ при $|t-s|<\delta$. Следовательно,

$$|f(t)-f(s)|<|f(t)-f_\varepsilon(t)|+|f_\varepsilon(t)-f_\varepsilon(s)|+|f_\varepsilon(s)-f(s)|<3\varepsilon,$$

если $|t-s|<\delta$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, множество UC всех равномерно непрерывных и ограниченных на всей оси функций с равномерной нормой является банаховым пространством. В этом пространстве содержатся все периодические, почти периодические и рекуррентные функции.

Пусть функция $f(t)$ равномерно непрерывна и ограниченна на всей оси. Тогда для любой бесконечной числовой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности функций $\{f(t+h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $g(t)$ на каждом конечном отрезке. Обозначим через $H(f)$ множество всех таких функций, т. е. функций $g(t)$ удовлетворяющих условию: вдоль некоторой числовой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность функций $\{f(t+h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $g(t)$ на каждом конечном отрезке. Для $f\in UC$ легко проверяются следующие свойства:

1°. При любом $h\in R^1$ функция $f(t+h)$ принадлежит $H(f)$.

2°. Если $g\in H(f)$, то $g\in UC$ и $H(g)\subset H(f)$, а также имеют место следующие неравенства

$$\sup_{|t-s|<\delta}|g(t)-g(s)|\leqslant\sup_{|t-s|<\delta}|f(t)-f(s)|\quad\text{при любом}\quad\delta>0,$$

$$\inf_{t\in R^1}Re(g(t))\geqslant\inf_{t\in R^1}Re(f(t)),\quad \inf_{t\in R^1}Im(g(t))\geqslant\inf_{t\in R^1}Im(f(t)),$$

$$\sup_{t\in R^1}Re(g(t))\leqslant\sup_{t\in R^1}Re(f(t)),\quad \sup_{t\in R^1}Im(g(t))\leqslant\sup_{t\in R^1}Im(f(t)).$$

3°. Для $g\in H(f)$ равенство $H(g)=H(f)$ имеет место лишь в том случае, когда $f\in H(g)$.

4°. Множество $H(f)$ замкнуто в топологии равномерной сходимости на каждом отрезке. В частности, множество $H(f)$ замкнуто в пространстве C.

Аналогично, для любой вектор-функции $(f_1(t),\dots,f_n(t))$, где $f_j(t)\in UC$, $j=1,\dots,n$, определяется множество $H[(f_1,\dots,f_n)]$.

Равномерно непрерывная и ограниченная на всей оси функция $f(t)$ называется *рекуррентной* [3], [5], если для любой функции $g\in H(f)$ множества $H(g)$ и $H(f)$ совпадают: $H(g)=H(f)$. Если функция $f(t)$ рекуррентная, то любая функция $g(t)$ из множества $H(f)$ также является рекуррентной, так как для любой $\widetilde{g}\in H(g)$, в силу свойства 2°, имеет место включение $\widetilde{g}\in H(f)$, отсюда, в силу рекуррентности f, имеет место равенство $H(\widetilde{g})=H(f)$, следовательно, $H(\widetilde{g})=H(g)$.

Очевидно, для любых двух рекуррентных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствующие им множества $H(f_1)$ и $H(f_2)$ либо не пересекаются, либо совпадают. Следовательно, множество всех рекуррентных функций состоит из объединения попарно непересекающихся замкнутых множеств вида $H(f)$. В последующем будет доказано, что множество всех рекуррентных функций замкнуто в пространстве UC.

Вектор-функцию $(f_1(t), \dots, f_n(t))$, где $f_j(t) \in UC$, $j = 1,\dots,n$, называют *рекуррентной*, если для любой вектор-функции $(g_1, \dots, g_n) \in H[(f_1, \dots, f_n)]$ имеет место равенство $H[(g_1, \dots, g_n)] = H[(f_1, \dots, f_n)]$. Для любой вектор-функции $(f_1(t), \dots, f_n(t))$, где $f_j(t) \in UC$, $j = 1,\dots,n$, согласно теореме Биркгофа [5], существует рекуррентная вектор-функция $(g_1, \dots, g_n) \in H[(f_1, \dots, f_n)]$. Таким образом, любая вектор-функция с равномерно непрерывными и ограниченными координатами порождает хотя бы одну рекуррентную вектор-функцию.

Хаотические траектории динамических систем в большинстве случаев описываются рекуррентными вектор-функциями [5], [9]. Поэтому исследование свойств рекуррентных вектор-функций и выделение числовых характеристик, по которым можно описать поведение таких функций, весьма актуальны.

Непрерывная на всей оси функция $f(t)$ называется *почти периодической по Бору* [1], [2], если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $l = l(\varepsilon)$ такое, что на любом отрезке $[a,a + l]$ длины l найдётся $\tau \in [a,a + l]$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{t\in R^1} |f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Другое эквивалентное определение почти периодичности принадлежит Бохнеру [3]. Функция $f(t)$ называется *почти периодической по Бохнеру*, если для любой бесконечной числовой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности функций $\{f(t + h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на R^1.

Каждая почти периодическая функция является рекуррентной функцией. Это следует из того, что если $g \in H(f)$, то вдоль некоторой числовой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место предел

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in R^1} |f(t + h_k) - g(t)| = 0.$$

Отсюда выводим:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in R^1} |g(t - h_k) - f(t)| = 0.$$

Следовательно, $f \in H(g)$ и $H(g) = H(f)$. Из этих рассуждений также следует, что если $f(t)$ — почти периодическая функция, то почти периодической является любая функция $g(t)$ из $H(f)$.

Для любой функции $f \in UC$ введем множество $H^c(f)$ — замыкание множества сдвигов $\{f(t + h) : h \in R^1\}$ в пространстве C. Очевидно, $H^c(f) \subset H(f)$. Из определения почти периодичности по Бохнеру следует, что если $f(t)$ — почти периодическая функция, то множество $H^c(f)$ компактно в пространстве C и имеет место равенство $H^c(f) = H(f)$.

3. СВОЙСТВА РЕКУРРЕНТНЫХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В пространстве C определим следующие два функционала:

$$\chi(f) = \lim_{l\to\infty} \sup_{a\in R^1} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \sup_{\sigma\in R^1} |f(\sigma + s) - f(\sigma)|,$$

$$\chi(f,T) = \lim_{l\to\infty} \sup_{a\in R^1} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(\sigma + s) - f(\sigma)|.$$

Значения $\chi(f)$ и $\chi(f,T)$ определены для любой функции $f \in C$ и для любого числа $T > 0$, так как выражения

$$\sup_{a\in R^1} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \sup_{\sigma\in R^1} |f(\sigma + s) - f(\sigma)|, \qquad \sup_{a\in R^1} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(\sigma + s) - f(\sigma)|$$

при возрастании l не возрастают и ограниченны снизу.

Проверим, что при любых f, $g \in C$ и $T > 0$ имеет место неравенство

$$|\chi(f,T) - \chi(g,T)| \leqslant 2\|f-g\|. \tag{1}$$

Действительно, из очевидного неравенства

$$|f(s+\sigma) - f(\sigma)| \leqslant |f(s+\sigma) - g(s+\sigma)| + |g(s+\sigma) - g(\sigma)| + |g(\sigma) - f(\sigma)|$$

следует неравенство

$$\max_{|\sigma|\leqslant T} |f(s+\sigma) - f(\sigma)| \leqslant \max_{|\sigma|\leqslant T} |g(s+\sigma) - g(\sigma)| + 2\|f-g\|$$

при любом $s \in R^1$. Отсюда выводим:

$$\min_{s:|s-a|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(s+\sigma)-f(\sigma)| \leqslant \min_{s:|s-a|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |g(s+\sigma)-g(\sigma)|+2\|f-g\| \quad \text{при любых } l > 0, a \in R^1,$$

$$\sup_{a\in R^1} \min_{s:|s-a|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(s+\sigma) - f(\sigma)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{a\in R^1} \min_{s:|s-a|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |g(s+\sigma) - g(\sigma)| + 2\|f-g\| \quad \text{при любом } l > 0.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $l \to \infty$:

$$\chi(f,T) \leqslant \chi(g,T) + 2\|f-g\|. \tag{2}$$

Поменяв местами функции f и g, имеем

$$\chi(g,T) \leqslant \chi(f,T) + 2\|f-g\|. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует неравенство (1).

Аналогичным образом можно показать, что при любых f, $g \in C$ имеет место неравенство

$$|\chi(f) - \chi(g)| \leqslant 2\|f-g\|. \tag{4}$$

Для любой функции f из C ее почти периодичность и рекуррентность можно выяснить через $\chi(f)$ и $\chi(f,T)$. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Непрерывная и ограниченная на R^1 комплекснозначная функция $f(t)$ почти периодична тогда и только тогда, когда для функции $f(t)$ имеет место равенство $\chi(f) = 0$.*

Теорема 2. *Равномерно непрерывная и ограниченная на R^1 комплекснозначная функция $f(t)$ рекуррентна тогда и только тогда, когда для любого $T > 0$ имеет место равенство $\chi(f,T) = 0$.*

Число $\chi(f)$ можно принять в качестве меры не почти периодичности функции f, а числа $\chi(f,T)$, $T \in R^1_+$ можно принять в качестве меры нерекуррентности функции f.

Из теорем 1 и 2, в силу неравенств (1), (4), вытекает

Следствие 1. *Множество почти периодических функций и множество рекуррентных функций являются замкнутыми в пространстве C.*

Следовательно, множество почти периодических функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{t\in R^1} |f(t)|$$

образует банахово пространство, а множество рекуррентных функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in R^1} |f(t) - g(t)|$$

образует полное метрическое пространство. Для любой рекуррентной функции $f(t)$ в метрическом пространстве рекуррентных функций связно замыкание $H^c(f)$ множества сдвигов $\{f(t+h) : h \in R^1\}$.

Доказательство теоремы 1. Непрерывная и ограниченная на R^1 функция $f(t)$ по определению Бора почти периодична, если для любого положительного числа ε существует положительное число $l_0 = l_0(\varepsilon)$, зависящее от ε и такое, что на любом отрезке $[a, a + l_0]$ найдется хотя бы одно число τ_0, удовлетворяющее условию

$$\sup_{t\in R^1} |f(t+\tau_0) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Существование такого τ_0 равносильно неравенству

$$\min_{a\leqslant\tau\leqslant a+l_0} \sup_{t\in R^1} |f(t+\tau) - f(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

А выполнение неравенства (5) при любом $a \in R^1$ равносильно неравенству

$$\sup_{a\in R^1} \min_{a\leqslant\tau\leqslant a+l_0} \sup_{t\in R^1} |f(t+\tau) - f(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Заметим, что при каждом фиксированном $a \in R^1$ левая часть неравенства (5) не возрастает по l_0. Следовательно, левая часть неравенства (6) также не возрастает по l_0. Значит, неравенство (6) равносильно тому, что при всех $l \geqslant l_0$ должно выполняться неравенство

$$\sup_{a\in R^1} \min_{a\leqslant\tau\leqslant a+l} \sup_{t\in R^1} |f(t+\tau) - f(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Таким образом, почти периодичность функции $f(t)$ равносильна тому, что для любого $\varepsilon > 0$ при $l \geqslant l_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство (7). Другими словами, имеет место предел

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{a\in R^1} \min_{a\leqslant\tau\leqslant a+l} \sup_{t\in R^1} |f(t+\tau) - f(t)| = 0.$$

Здесь заменяя a на $a - l/2$, а затем заменяя l на $2l$, имеем:

$$\lim_{l\to\infty} \sup_{a\in R^1} \min_{-l\leqslant a-\tau\leqslant l} \sup_{t\in R^1} |f(t+\tau) - f(t)| = 0.$$

Отсюда выводим, что почти периодичность функции $f(t)$ равносильна условию $\chi(f) = 0$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(t)$ — рекуррентная функция, т. е. для любой функции $g \in H(f)$ имеет место равенство $H(g) = H(f)$. Предположим, что $\chi(f,T) > 0$ при некотором $T > 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $l_0 > 0$ такие, что

$$\sup_{a} \min_{s:\,|a-s|\leqslant l} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(\sigma+s) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon,$$

если $l \geqslant l_0$. Пусть $l_0 < l_1 < ... < l_k < ...$ такая подпоследовательность, что $l_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Для каждого l_k существует a_k такое, что

$$\min_{s:\,|a_k-s|\leqslant l_k} \max_{|\sigma|\leqslant T} |f(\sigma+s) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon/2,$$

Представим $s = a_k + \tau$. Тогда из последнего неравенства имеем:

$$\max_{|\sigma|\leqslant T} |f(\sigma+\tau+a_k) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad |\tau| \leqslant l_k. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} f(t+a_k) = g(t)$$

равномерно на каждом отрезке. В неравенстве (8) фиксируя τ и переходя к пределу при $k\to\infty$ получим:

$$\max_{|\sigma|\leqslant T} |g(\sigma+\tau) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon/2. \tag{9}$$

Неравенство (9) имеет место для любого $\tau \in R^1$. Из неравенства (9) следует, что $f \notin H(g)$. А это противоречит рекуррентности f. Следовательно, наше предположение неверно.

Теперь докажем, что если $f \in UC$ и $\chi(f,T) = 0$ при любом $T > 0$, то f является рекуррентной функцией. Пусть $g \in H(f)$, т. е. существует последовательность h_j такая, что

$$\lim_{j\to\infty} f(t+h_j) = g(t) \tag{10}$$

равномерно на каждом отрезке. Для доказательства рекуррентности функции f достаточно показать, что для некоторой последовательности ν_j имеет место предел

$$\lim_{j\to\infty} g(t+\nu_j) = f(t) \tag{11}$$

равномерно на каждом отрезке.

При каждом $k = 1,2,...$ имеем равенство $\chi(f,k) = 0$. Отсюда следует существование неограниченно возрастающей последовательности положительных чисел l_k, $k = 1,2,...$ таких, что при каждом k имеет место неравенство

$$\sup_{a} \min_{s\colon |a-s|\leqslant l_k} \max_{|\sigma|\leqslant k} |f(\sigma+s) - f(\sigma)| < 1/k. \tag{12}$$

В неравенстве (12) заменим a на $a+h_j$, а затем заменим s на $s+h_j$. В результате неравенство принимает следующий вид:

$$\sup_{a+h_j} \min_{s\colon |a-s|\leqslant l_k} \max_{|\sigma|\leqslant k} |f(\sigma+s+h_j) - f(\sigma)| < 1/k.$$

Таким образом, при любых $a \in R^1$ и $k, j = 1,2,...$ имеем неравенство

$$\min_{s\colon |a-s|\leqslant l_k} \max_{|\sigma|\leqslant k} |f(\sigma+s+h_j) - f(\sigma)| < 1/k.$$

В этом неравенстве положим $a = 0$ и перейдем к пределу при $j\to\infty$, учитывая (10):

$$\min_{s\colon |s|\leqslant l_k} \max_{|\sigma|\leqslant k} |g(\sigma+s) - f(\sigma)| \leqslant 1/k.$$

Отсюда следует, что при некотором $\nu_k \in [-l_k, l_k]$ имеет место неравенство

$$\max_{|\sigma|\leqslant k} |g(\sigma+\nu_k) - f(\sigma)| \leqslant 1/k,$$

что и доказывает равенство (11). Теорема 2 доказана.

Пример 1. Построим рекуррентную функцию $f(t)$, которая не является почти периодической. Функцию $f(t)$ определим в целых точках ниже приводимой формулой и линейно продолжим между целыми точками:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{\mu(n)}\right), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots \quad .$$

Здесь $\mu(n)$ определяется из разложения

$$n = c_{n0}3^0 + c_{n1}3^1 + \dots \quad , \quad \text{где} \quad c_{ni} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad , \tag{13}$$

формулой $\mu(n) = \min\{i : c_{ni} = 0\}$. Разложение (13) имеет место для любого целого n и оно единственно.

Покажем, что таким образом построенная функция $f(t)$ рекуррентна. Для этого заметим, что если $|n| \leqslant (3^m - 1)/2$, где n, m — целые и $m \geqslant 1$, то $\mu(n) \leqslant m$ и $\mu\left(n + 3^{m+1}k\right) = \mu(n)$ при любом целом k. Отсюда следует, что

$$f\left(t + 3^{m+1}k\right) = f(t) \quad \text{при всех} \quad t \in \left[-\frac{3^m - 1}{2}, \frac{3^m - 1}{2}\right], \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\min_{a \leqslant s \leqslant a + 3^{m+1}} \sup_{|t| \leqslant (3^m - 1)/2} |f(t + s) - f(t)| = 0 \quad \text{при всех} \quad a \in R^1, \quad m = 1, 2, \dots \quad ,$$

$$\chi(f, T) = 0 \quad \text{при} \quad T = \frac{3^m - 1}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad .$$

Следовательно, в силу теоремы 2, функция $f(t)$ рекуррентна.

Теперь покажем, что для любого натурального числа n_0 существует целое число n такое, что

$$f(n + n_0) \neq f(n). \tag{14}$$

Тогда для любых двух целых чисел n_1 и n_2, где $n_2 > n_1$, имеем:

$$\sup_{t \in R^1} |f(t + n_1) - f(t + n_2)| = \sup_{t \in R^1} |f(t) - f(t + n_2 - n_1)| = 1.$$

Отсюда вытекает, что множество сдвигов $\{f(t+h) : h \in R^1\}$ не компактно в пространстве C, и, согласно определению почти периодичности по Бохнеру, функция $f(t)$ не почти периодична.

Пусть n_0 — произвольное натуральное число, имеющее разложение

$$n_0 = c_0 3^0 + c_1 3^1 + \dots \quad .$$

Для выбора целого числа n, удовлетворяющего условию (14), выделим два случая: 1) $c_0 \neq 0$; 2) $c_0 = \ldots = c_{k-1} = 0$ и $c_k \neq 0$. В первом случае положим $n = -c_0$. Тогда $\mu(n) = 1$ и $\mu(n + n_0) = 0$, отсюда следует (14). А во втором случае положим

$$n = 3^0 + \ldots + 3^{k-1} - c_k 3^k.$$

Тогда $\mu(n) = k + 1$ и $\mu(n + n_0) = k$, следовательно, имеет место (14).

Таким образом, построенная функция $f(t)$ является рекуррентной, но не является почти периодической.

Теорема 3. *Пусть рекуррентная функция $f(t)$ имеет непрерывную производную $f'(t)$. Тогда функция $f'(t)$ рекуррентна тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна на всей оси.*

Доказательство. Если функция $f'(t)$ рекуррентна, то по определению она равномерна непрерывна на всей оси [1]. Пусть рекуррентная функция $f(t)$ имеет равномерно непрерывную на всей оси производную $f'(t)$. Рассмотрим последовательность функций $g_k(t) = k(f(t + 1/k) - f(t))$, $k = 1,2,\ldots$. Легко проверить, что для каждой функции $g_k(t), k = 1,2,\ldots$ имеет место равенство

$$H(g_k) = \{k(\widetilde{f}(t + 1/k) - \widetilde{f}(t)) : \widetilde{f} \in H(f)\}.$$

Отсюда следует, что функции $g_k(t)$, $k = 1,2,...$ являются рекуррентными. Более того, при каждом $k = 1,2,...$ рекуррентной является вектор-функция $(f(t), g_k(t))$.

В силу равномерной непрерывности производной $f'(t)$, последовательность рекуррентных функций $g_k(t), k = 1,2,...$ сходится к функции $f'(t)$ по норме пространства C:

$$\sup_t |g_k(t) - f'(t)| = \sup_t \left|k(f(t + 1/k) - f(t)) - f'(t)\right| = \sup_t \left|k \int_t^{t+1/k} (f'(s) - f'(t))ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t_1 - t_2| < 1/k} |f'(t_1) - f'(t_2)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отсюда, согласно следствию 1, функция $f'(t)$ рекуррентна. Более того, рекуррентна вектор-функция $(f(t),f'(t))$, как равномерный предел последовательности рекуррентных вектор-функций $(f(t), g_k(t))$, $k = 1,2,...$. Теорема 3 доказана.

Из доказательства теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *Если функция $f(t)$ рекуррентна и имеет равномерно непрерывную на всей оси производную $f'(t)$, то вектор-функция $(f(t),f'(t))$ рекуррентна.*

Рассмотрим неопределенный интеграл от рекуррентной функции $f(t)$:

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds, \quad t \in (-\infty,\infty).$$

О рекуррентности неопределенного интеграла $F(t)$ имеет место следующая теорема (см., напр., [3]).

Теорема 4. *Функция $F(t)$ рекуррентна тогда и только тогда, когда она ограничена на всей оси.*

Приведем авторский вариант доказательства теоремы 4.

Доказательство. Пусть функция $F(t)$ ограничена. Покажем, что она является рекуррентной. Для этого достаточно проверить, что для любой функции $G(t) \in H(F)$ имеет место включение $F \in H(G)$.

Для функции $G(t) \in H(F)$ существуют числовая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $g(t) \in H(f)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} F(t + h_k) = G(t), \quad \lim_{k\to\infty} f(t + h_k) = g(t) \tag{15}$$

равномерно на каждом отрезке. Из тождества

$$F(t + h) = F(h) + \int_0^t f(s + h)\, ds, \quad h,t \in (-\infty,\infty), \tag{16}$$

и равенств (15) следует, что

$$G(t) = G(0) + \int_0^t g(s)ds, \quad t \in (-\infty,\infty). \tag{17}$$

В силу рекуррентности функции $f(t)$ и ограниченности функций $F(t)$ и $G(t)$ существуют числовая последовательность $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ и число ξ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} g(t + \nu_j) = f(t), \quad \lim_{j\to\infty} G(\nu_j) = \xi - G(0) \tag{18}$$

равномерно на каждом отрезке. Из (17) и (18) выводим равенства

$$G(t + \nu_j) = G(0) + G(\nu_j) + \int_0^t g(s + \nu_j)ds, \quad t \in (-\infty,\infty),$$

$$\lim_{j\to\infty} G(t+\nu_j) = \xi + \int_0^t f(s)ds = \xi + F(t) \tag{19}$$

равномерно на каждом отрезке. Заметим, что множество значений функции $G(t)$ и предельные точки последовательности $G(t+\nu_j)$ принадлежат отрезку $[m,M]$, где

$$m = \inf_t F(t), \quad M = \sup_t F(t).$$

Поэтому из (19) следуют неравенства

$$m \leqslant \xi + F(t) \leqslant M, \quad t \in (-\infty,\infty).$$

Отсюда, учитывая определения чисел m и M, выводим равенство $\xi = 0$. Следовательно, в силу (19), последовательность функций $G(t+\nu_j)$ сходится к функции $F(t)$ равномерно на каждом отрезке, т. е. $F \in H(G)$. Теорема 4 доказана.

Применяя схему доказательства теоремы 4, докажем следующие две теоремы.

Теорема 5. *Пусть функция $f(t)$ рекуррентна и ее неопределенный интеграл $F(t)$ ограничен. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Для любых двух функций $g_1(t)$, $g_2(t) \in H(f)$ существует единственное число $\xi(g_1,g_2)$, зависящее лишь от g_1, g_2 и такое, что если вдоль некоторой числовой последовательности $\{h_k^{(12)}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место сходимость $g_1(t+h_k^{(12)}) \to g_2(t)$, $k\to\infty$ равномерно на каждом отрезке, то отсюда следует сходимость

$$\int_0^{t+h_k^{(12)}} g_1(s)ds \to \xi(g_1,g_2) + \int_0^t g_2(s)ds, \quad k\to\infty$$

равномерно на каждом отрезке.

2. Для любых двух функций $g_1(t)$, $g_2(t) \in H(f)$ имеет место равенство

$$\xi(g_1,g_2) + \xi(g_2,g_1) = 0.$$

3. Вектор-функция $(f(t),F(t))$ рекуррентна.

4. Для любых трех функций $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t) \in H(f)$ имеет место равенство

$$\xi(g_1,g_2) + \xi(g_2,g_3) = \xi(g_1,g_3).$$

5. Если вдоль некоторой числовой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место сходимость $f(t+h_k)\to f(t)$, $k\to\infty$ равномерно на каждом отрезке, то отсюда следует сходимость

$$\int_0^{t+h_k} f(s)ds \to \int_0^t f(s)ds, \quad k\to\infty$$

равномерно на каждом отрезке.

Теорема 6. *Если функция $f(t)$ почти периодична и ее неопределенный интеграл $F(t)$ ограничен, то $F(t)$ почти периодична.*

Схему доказательств теорем 4–6 можно применять для установления рекуррентности или почти периодичности ограниченных решений дифференциальных уравнений. Например, можно привести другое доказательство обобщенной теоремы Бора-Нейгебауэра о почти периодичности ограниченного решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей и почти периодическим свободным членом [6]. В связи с этим отметим работу [10], где по такой же схеме доказано почти периодичность ограниченного и непрерывного на всей плоскости R^2 решения уравнения Пуассона $\Delta u = f$ с почти периодической правой частью f.

Доказательство теоремы 5. Пусть $g_1(t),\ g_2(t) \in H(f)$. Функции $g_1(t),\ g_2(t)$ являются рекуррентными и их интегралы также ограничены. Кроме того, существуют две числовые последовательности $\{h_k^{(12)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h_k^{(21)}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что имеют место пределы

$$\lim_{k\to\infty} g_1(t+h_k^{(12)}) = g_2(t), \quad \lim_{k\to\infty} g_2(t+h_k^{(21)}) = g_1(t)$$

равномерно на каждом отрезке. Не теряя общности, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{h_k^{(12)}} g_1(s)ds = \xi(g_1,g_2), \quad \lim_{k\to\infty} \int_0^{h_k^{(21)}} g_2(s)ds = \xi(g_2,g_1).$$

Докажем, что имеет место равенство

$$\xi(g_1,g_2) + \xi(g_2,g_1) = 0. \tag{20}$$

Отсюда, в силу произвольности выбранных последовательностей $\{h_k^{(12)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h_k^{(21)}\}_{k=1}^{\infty}$, следует, что числа $\xi(g_1,g_2)$ и $\xi(g_2,g_1)$ не зависят от этих последовательностей.

Для доказательства равенства (20) представим интеграл

$$\int_0^{t+h_k^{(12)}} g_1(s)ds$$

в следующем виде:

$$\int_0^{t+h_k^{(12)}} g_1(s)ds = \int_0^{h_k^{(12)}} g_1(s)ds + \int_0^{t} g_1(s+h_k^{(12)})ds.$$

В этом равенстве переходя к пределу при $k \to \infty$ получим:

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{t+h_k^{(12)}} g_1(s)ds = \xi(g_1,g_2) + \int_0^t g_2(s)ds, \quad t \in (-\infty,+\infty), \tag{21}$$

$$m_1 \leqslant \xi(g_1,g_2) + \int_0^t g_2(s)ds \leqslant M_1, \quad t \in (-\infty,+\infty),$$

где

$$m_1 = \inf_{t\in R^1} \int_0^t g_1(s)ds, \quad M_1 = \sup_{t\in R^1} \int_0^t g_1(s)ds.$$

Отсюда выводим:

$$m_1 \leqslant \xi(g_1,g_2) + \int_0^{t+h_k^{(21)}} g_2(s)ds \leqslant M_1, \quad t \in (-\infty,+\infty),$$

$$m_1 \leqslant \xi(g_1,g_2) + \int_0^{h_k^{(21)}} g_2(s)ds + \int_0^t g_2(s+h_k^{(21)})ds \leqslant M_1, \quad t \in (-\infty,+\infty).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ получим:

$$m_1 \leqslant \xi(g_1,g_2) + \xi(g_2,g_1) + \int_0^t g_1(s)ds \leqslant M_1, \quad t \in (-\infty,+\infty).$$

Отсюда следуют неравенства

$$m_1 \leqslant \xi(g_1,g_2) + \xi(g_2,g_1) + m_1, \quad \xi(g_1,g_2) + \xi(g_2,g_1) + M_1 \leqslant M_1.$$

Следовательно, имеет место равенство (20).

Из равенства (21) и аналогичного равенства

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{t+h_k^{(21)}} g_2(s)ds = \xi(g_2,g_1)+\int_0^t g_1(s)ds, \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

вытекает справедливость первого утверждения теоремы. Кроме того, из этих равенств и равенства (20) следует, что вектор-функция $(g_1(t),\int_0^t g_1(s)ds)$ рекуррентна. В частности, полагая $g_1=f$, получаем третье утверждение теоремы.

Теперь докажем, что для любых трех функций $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)\in H(f)$ имеет место равенство

$$\xi(g_1,g_2)+\xi(g_2,g_3)=\xi(g_1,g_3). \tag{22}$$

Возьмем три числовые последовательности $\{h_k^{(12)}\}_{k=1}^\infty$, $\{h_k^{(23)}\}_{k=1}^\infty$, $\{h_k^{(13)}\}_{k=1}^\infty$, вдоль которых имеют место следующие пределы:

$$\lim_{k\to\infty} g_1(t+h_k^{(12)})=g_2(t), \quad \lim_{k\to\infty}\int_0^{h_k^{(12)}} g_1(s)ds=\xi(g_1,g_2),$$

$$\lim_{k\to\infty} g_2(t+h_k^{(23)})=g_3(t), \quad \lim_{k\to\infty}\int_0^{h_k^{(23)}} g_2(s)ds=\xi(g_2,g_3),$$

$$\lim_{k\to\infty} g_1(t+h_k^{(13)})=g_3(t), \quad \lim_{k\to\infty}\int_0^{h_k^{(13)}} g_1(s)ds=\xi(g_1,g_3).$$

При любых k и j интеграл

$$\int_0^{h_k^{(12)}+h_j^{(23)}} g_1(s)ds$$

представим в следующем виде:

$$\int_0^{h_k^{(12)}+h_j^{(23)}} g_1(s)ds=\int_0^{h_k^{(12)}} g_1(s)ds+\int_0^{h_j^{(23)}} g_1(s+h_k^{(12)})ds=$$

$$=\int_0^{h_k^{(12)}} g_1(s)ds+\int_0^{h_j^{(23)}}\left(g_1(s+h_k^{(12)})-g_2(s)\right)ds+\int_0^{h_j^{(23)}} g_2(s)ds.$$

В этих равенствах положим $k=k_j$, где k_j выберем так, чтобы выполнялись условия $k_j>j$ и $|g_1(t+h_{k_j}^{(12)})-g_2(t)|<1/\left(j\left(1+\left|h_j^{(23)}\right|\right)\right)$ при любом $|t|\leqslant j+\left|h_j^{(23)}\right|$. После этого, переходя к пределу при $j\to\infty$ получаем равенство (22). При этом пользуемся тем, что

$$\left|g_1(t+h_{k_j}^{(12)}+h_j^{(23)})-g_3(t)\right|\leqslant\left|g_1(t+h_{k_j}^{(12)}+h_j^{(23)})-g_2(t+h_j^{(23)})\right|+$$

$$+\left|g_2(t+h_j^{(23)})-g_3(t)\right|\to 0, \quad j\to\infty.$$

Из (20) и (22) следует, что $\xi(f,f)=0$. Отсюда, в силу первого утверждения теоремы, вытекает справедливость пятого утверждения теоремы. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть функция $f(t)$ почти периодична и ее неопределенный интеграл $F(t)$ ограничен. Докажем, что $F(t)$ почти периодична. Для этого, согласно определению почти периодичности по Бохнеру, достаточно убедится в компактности множества $\{F(t+h): h\in R^1\}$ в пространстве C.

Возьмем произвольную числовую последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ и покажем, что последовательность функций $\{F(t+h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ компактна в пространстве C. В силу почти периодичности $f(t)$ (по Бохнеру), не теряя общности, можно считать, что имеет место предел

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in R^1}|f(t+h_k)-g(t)|=0. \tag{23}$$

Проверим, что тогда имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in R^1}\left|F(t+h_k)-\xi(f,g)-\int_0^t g(s)ds\right|=0, \tag{24}$$

где число $\xi(f,g)$ определено в теореме 5. Этим самым завершится доказательство теоремы.

Предположим, что (24) не верно. Тогда вдоль некоторой числовой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\left|F(t_k+h_k)-\xi(f,g)-\int_0^{t_k} g(s)ds\right|>0. \tag{25}$$

Но, с другой стороны, в силу (23) имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in R^1}|f(t+t_k+h_k)-g(t+t_k)|=0,$$

отсюда, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty}f(t+t_k+h_k)=z(t),\quad \lim_{k\to\infty}g(t+t_k)=z(t)$$

равномерно на каждом отрезке. Из последних пределов, в силу теоремы 5, выводим:

$$\lim_{k\to\infty}\left(F(t_k+h_k)-\xi(f,g)-\int_0^{t_k} g(s)ds\right)=\xi(f,z)-\xi(f,g)-\xi(g,z)=0.$$

А это противоречит (25). Теорема 6 доказана.

4. СОВМЕСТНАЯ РЕКУРРЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе приводятся некоторые результаты о совместной рекуррентности функций. Вначале приведем определение совместной рекуррентности функций.

Определение 1. Функции $f_1(t),\cdots,f_m(t)$ называют совместно рекуррентными, если вектор-функция $(f_1(t),\cdots,f_m(t))$ рекуррентна.

Рекуррентность вектор-функции $(f_1(t),\cdots,f_m(t))$ означает следующее: если вдоль некоторой числовой последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеют место пределы

$$\lim_{k\to\infty}f_1(t+h_k)=g_1(t),\quad \dots\quad ,\quad \lim_{k\to\infty}f_m(t+h_k)=g_m(t)$$

равномерно на каждом отрезке, то существует числовая последовательность $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ вдоль которой имеют место пределы

$$\lim_{j\to\infty}g_1(t+\nu_j)=f_1(t),\quad \dots\quad ,\quad \lim_{j\to\infty}g_m(t+\nu_j)=f_m(t)$$

равномерно на каждом отрезке.

Согласно следствию 2, рекуррентная функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ совместно рекуррентны, если $f'(t)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси. А по теореме 5 рекуррентная функция $f(t)$ и ее неопределенный интеграл $F(t)$ совместно рекуррентны, если функция $F(t)$ ограничена.

Очевидно, если функции $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$ совместно рекуррентны, то каждая из них рекуррентна. Обратно, если каждая из функций $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$ рекуррентна, то отсюда еще не следует их совместная рекуррентность. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Для любой рекуррентной функции $f(t)$ и любых равномерно непрерывных и ограниченных функций $f_1(t)$, …, $f_m(t)$ существуют функции $g_1(t) \in H(f_1)$, …, $g_m(t) \in H(f_m)$ такие, что функции $f(t)$, $g_1(t)$, …, $g_m(t)$ совместно рекуррентны.*

Доказательство. Пусть функция $f(t)$ рекуррентна и пусть $f_j(t) \in UC$, $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим вектор-функцию $(f(t), f_1(t), \ldots, f_m(t))$ и соответствующее ей множество $H[(f, f_1, \ldots, f_m)]$. В множестве $H[(f, f_1, \ldots, f_m)]$, согласно теореме Биркгофа [5], существует рекуррентная вектор-функция $(\widetilde{f}(t), \widetilde{f}_1(t), \ldots, \widetilde{f}_m(t))$. При этом все вектор-функции из множества $H[(\widetilde{f}, \widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_m)]$ также рекуррентны.

Так как функция $f(t)$ рекуррентна, то $f(t) \in H(\widetilde{f})$ и, следовательно, существует числовая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ вдоль которой имеет место предел

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{f}(t + h_k) = f(t)$$

равномерно на каждом отрезке. Не теряя общности, можно считать, что имеют место пределы

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{f}_1(t + h_k) = g_1(t), \quad \lim_{k\to\infty} \widetilde{f}_m(t + h_k) = g_m(t)$$

равномерно на каждом отрезке. Отсюда следует, что $(f(t), g_1(t), \ldots, g_m(t)) \in H[(\widetilde{f}, \widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_m)]$. Следовательно, вектор-функция $(f(t), g_1(t), \ldots, g_m(t))$, как элемент множества $H[(\widetilde{f}, \widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_m)]$, является рекуррентной и $g_1(t) \in H(\widetilde{f}_1) \subset H(f_1)$, …, $g_m(t) \in H(\widetilde{f}_m) \subset H(f_m)$. Терема 7 доказана.

Если в условиях теоремы 7 дополнительно предполагать почти периодичность функций $f_1(t)$, …, $f_m(t)$, то в качестве $g_1(t) \in H(f_1)$, …, $g_m(t) \in H(f_m)$ можно взять самих функций $f_1(t)$, …, $f_m(t)$. Это вытекает из следующей теоремы о совместной рекуррентности двух функций (см., напр., [3]).

Теорема 8. *Пусть $f(t)$ — рекуррентная функция и пусть $g(t)$ – почти периодическая функция. Тогда функции $f(t)$ и $g(t)$ являются совместно рекуррентными.*

Приведем свой вариант доказательства теоремы 8. Приводимое доказательство в последующем составляет основу построения новых рекуррентных функций по уже заданным рекуррентным функциям. Доказательству теоремы 8 предпошлем следующую лемму [11].

Лемма 1. *Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — произвольные положительные числа. Тогда для любых вещественных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и любого $\delta > 0$ существуют натуральное число l и целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что имеет место система неравенств*

$$|lc_i - p_i\omega_i| < \delta, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{26}$$

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции. При $n = 1$ справедливость леммы следует из следующего утверждения [12]: для любого вещественного числа a и натурального числа N найдётся рациональное число p/q такое, что $1 \leqslant q \leqslant N$ и имеет место неравенство

$$|a - p/q| < 1/q(N + 1).$$

Действительно, в последнем неравенстве полагая $a = c_1/\omega_1$, имеем:

$$|qc_1 - p\omega_1| < \omega_1/(N + 1).$$

Отсюда следует утверждение леммы при $n = 1$, если выбрать $N + 1 \geqslant \omega_1/\delta$ и положить $l = q$, $p_1 = p$.

Пусть лемма справедлива при $n = k$. Покажем, что тогда она верна при $n = k + 1$. Пусть последовательность положительных чисел $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда по предположению индукции существует последовательность целых положительных чисел l_m такая, что

$$|l_m c_i - p_{im}\omega_i| < \delta_m, \quad i = 1,2,...,k, \tag{27}$$

где $p_{1m}, p_{2m},...p_{km}-$ целые числа. Рассмотрим последовательность чисел $l_m c_{k+1}$ и каждый её член представим в виде $l_m c_{k+1} = s_m\omega_{k+1} + d_m$, где $0 \leqslant d_m < \omega_{k+1}$, $\quad s_m-$ целое число. Можно считать, что $d_m \to d$ при $m \to \infty$. Пусть $\delta > 0$. По первому шагу индукции существуют натуральное q и целое p такие, что

$$|qd - p\omega_{k+1}| < \delta/2.$$

Тогда при достаточно больших m из равенств

$$ql_m c_{k+1} = qs_m\omega_{k+1} + qd_m = qs_m\omega_{k+1} + qd + q(d_m - d) =$$

$$= qs_m\omega_{k+1} + p\omega_{k+1} + (qd - p\omega_{k+1}) + q(d_m - d)$$

следует

$$|ql_m c_{k+1} - (qs_m + p)\omega_{k+1}| = |(qd - p\omega_{k+1}) + q(d_m - d)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Таким образом, справедлива система неравенств

$$|ql_m c_i - qp_{im}\omega_i| < q\delta_m, \quad i = 1,2,...,k, \tag{28}$$

$$|ql_m c_{k+1} - (qs_m + p)\omega_{k+1}| < \delta \tag{29}$$

из которой при достаточно больших m следует утверждение леммы при $n = k + 1$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 8. Пусть $H[(f,g)]$ обозначает замыкание множества сдвигов $\{(f(t+h),g(t+h)) : h \in (-\infty,\infty)\}$ вектор-функции $(f(t),g(t))$ в топологии равномерной сходимости на каждом отрезке. Пусть $(\widetilde{f},\widetilde{g})$ принадлежит множеству $H[(f,g)]$, т. е. для некоторой последовательности h_k имеет место

$$\lim_{k\to\infty} f(t + h_k) = \widetilde{f}(t), \quad \lim_{k\to\infty} g(t + h_k) = \widetilde{g}(t) \tag{30}$$

равномерно на каждом отрезе. Теорема будет доказана, если мы покажем, что множество $H[(\widetilde{f},\widetilde{g})]$ содержит вектор-функцию (f,g).

Сначала предположим, что почти периодическая функция g является тригонометрическим многочленом:

$$g(t) = c_0 + c_1 \exp(i\lambda_1 t) + c_2 \exp(i\lambda_2 t) + ... + c_m \exp(i\lambda_m t), \tag{31}$$

где $c_0,c_1,...,c_m$ — комплексные числа, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ — ненулевые вещественные числа. В этом случае последовательность $g(t + h_k)$ имеет вид

$$g(t + h_k) = c_0 + c_1 \exp(i\lambda_1 h_k) \exp(i\lambda_1 t) + ... + c_m \exp(i\lambda_m h_k) \exp(i\lambda_m t), \tag{32}$$

и поэтому предельная функция $\widetilde{g}(t)$ имеет вид

$$\widetilde{g}(t) = c_0 + \widetilde{c}_1 \exp(i\lambda_1 t) + ... + \widetilde{c}_m \exp(i\lambda_m t),$$

где

$$\widetilde{c}_l = c_l \lim_{k\to\infty} \exp(i\lambda_l h_k), \quad l = 1,2,...,m. \tag{33}$$

В силу рекуррентности функции $f(t)$ существует последовательность ν_j такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\widetilde{f}(t+\nu_j)=f(t)$$

равномерно на каждом отрезке. Без ограничения общности можно считать, что имеет место

$$\lim_{j\to\infty}\widetilde{g}(t+\nu_j)=g_1(t)\equiv c_0+c_{11}\exp(i\lambda_1 t)+c_{12}\exp(i\lambda_2 t)+...+c_{1m}\exp(i\lambda_m t) \qquad (34)$$

равномерно на всей оси. Отсюда имеем включение $(f,g_1)\in H[(\widetilde{f},\widetilde{g})]$.

Выберем возрастающую подпоследовательность k_j, $j=1,2,\ldots$ такую, что

$$|f(t+\nu_j+h_k)-\widetilde{f}(t+\nu_j)|<1/j, \quad \text{при} \quad |t+\nu_j|\leqslant j+|\nu_j|, \quad k\geqslant k_j$$

и

$$\sup_t|g(t+\nu_j+h_k)-\widetilde{g}(t+\nu_j)|=\|g(t+h_k)-\widetilde{g}(t)\|<1/j \quad \text{при } k\geqslant k_j, \quad j=1,2,\ldots \quad .$$

Отсюда, в силу неравенств

$$|f(t+\nu_j+h_k)-f(t)|\leqslant|f(t+\nu_j+h_k)-\widetilde{f}(t+\nu_j)|+|\widetilde{f}(t+\nu_j)-f(t)|,$$

$$\|g(t+\nu_j+h_k)-g_1(t)\|\leqslant\|g(t+\nu_j+h_k)-\widetilde{g}(t+\nu_j)\|+\|\widetilde{g}(t+\nu_j)-g_1(t)\|,$$

следует, что

$$\lim_{j\to\infty}|f(t+\nu_j+h_{k_j})-f(t)|=0, \quad \lim_{j\to\infty}\|g(t+\nu_j+h_{k_j})-g_1(t)\|=0$$

равномерно на каждом отрезке. Следовательно, последовательность сдвигов $(f(t+\nu_j+h_{k_j}),g(t+\nu_j+h_{k_j}))$ сходится к вектор-функции $(f(t),g_1(t))$ и для функции $g_1(t)$ имеет место следующее представление

$$g_1(t)\equiv c_0+c_1\exp(i\mu_1)\exp(i\lambda_1 t)+c_2\exp(i\mu_2)\exp(i\lambda_2 t)+...+c_m\exp(i\mu_m)\exp(i\lambda_m t)$$

с коэффициентами

$$c_l\exp(i\mu_l)\equiv c_l\lim_{j\to\infty}\exp(i\lambda_l(\nu_j+h_{k_j})), \quad 0\leqslant\mu_l<2\pi, \quad l=1,2,...,m.$$

Аналогично, рассматривая последовательность сдвигов вектор-функции $(f(t+\nu_j+h_{k_j}),g_1(t+\nu_j+h_{k_j}))$, имеем:

$$\lim_{j\to\infty}\|g_1(t+\nu_j+h_{k_j})-g_2(t)\|=0,$$

где

$$g_2(t)\equiv c_0+c_1\exp(i2\mu_1)\exp(i\lambda_1 t)+c_2\exp(i2\mu_2)\exp(i\lambda_2 t)+...+c_m\exp(i2\mu_m)\exp(i\lambda_m t),$$

и верно включение $(f,g_2)\in H[(\widetilde{f},\widetilde{g})]$. Продолжая приведенное рассуждение, получим последовательность вектор-функций $(f,g_1),(f,g_2),\cdots,(f,g_N),...$. Согласно лемме 1, вектор-функция (f,g) является предельной точкой этой последовательности. В силу замкнутости множества $H[(\widetilde{f},\widetilde{g})]$, имеем $(f,g)\in H[(\widetilde{f},\widetilde{g})]$. Таким образом, теорема доказана в случае, когда почти периодическая функция $g(t)$ является тригонометрическим многочленом.

В общем случае, когда $g(t)$ является произвольной почти периодической функцией, вектор-функцию $(f(t),g(t))$ можно приблизить по норме пространства C последовательностью вектор-функций $(f(t),g_k(t))$, где $g_k(t)$, $k=1,2,\ldots$ — тригонометрические многочлены

[6]. Следовательно, вектор-функция $(f(t),g(t))$ является равномерным пределом последовательности рекуррентных вектор-функций $(f(t),g_k(t))$, $k = 1,2,\ldots$. Отсюда, в силу следствия 1, следует, что вектор-функция $(f(t),g(t))$ рекуррентна. Теорема 8 доказана.

Определение 2. Множество функций назовем множеством совместно рекуррентных функций, если любое конечное число функций этого множества совместно рекуррентны.

Простейшим примером множества совместно рекуррентных функций служит множество функций $\{\exp(i\lambda) : \lambda \in (-\infty,\infty)\}$. В дальнейшем мы построим более широкое множество совместно рекуррентных функций.

Отметим, что в общем случае линейная комбинация рекуррентных функций не является рекуррентной функцией. Важное свойство совместно рекуррентных функций $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ заключается, в частности в том, что любая их линейная комбинация $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_m f_m(t)$ рекуррентна, причем функции $f(t), f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$ совместно рекуррентны. Следовательно, линейная оболочка совместно рекуррентных функций является множеством совместно рекуррентных функций. Проверим, что в пространстве C замыкание любого множества совместно рекуррентных функций состоит из совместно рекуррентных функций.

Лемма 2. *Если L — множество совместно рекуррентных функций, то его замыкание $\overline{L}$ в пространстве C также состоит из совместно рекуррентных функций.*

Доказательство. Пусть $f_1(t), \ldots, f_m(t) \in \overline{L}$. Проверим, что вектор-функция $(f_1(t), \ldots, f_m(t))$ рекуррентна. Каждая функция $f_j(t)$, как элемент множества $\overline{L}$ в пространстве C, является равномерным пределом некоторой последовательности функций $\{f_j^{(k)}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ из L. При каждом $k = 1, 2, \ldots$ функции $f_1^{(k)}(t), \ldots, f_m^{(k)}(t)$, как элементы множества L, совместно рекуррентны. Следовательно, вектор-функция $(f_1(t), \ldots, f_m(t))$ является равномерным пределом последовательности рекуррентных вектор-функций $(f_1^{(k)}(t), \ldots, f_m^{(k)}(t))$, $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда, в силу следствия 1, вытекает, что вектор-функция $(f_1(t), \ldots, f_m(t))$ рекуррентна. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 вытекают

Следствие 3. *Замыкание линейной оболочки любого множества совместно рекуррентных функций по норме $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in R^1\}$ образует банахово пространство совместно рекуррентных функций.*

Следствие 4. *Для любой рекуррентной функции $f(t)$ замыкание $H^c(f)$ множества сдвигов $\{f(t+h) : h \in R^1\}$ в пространстве C состоит из совместно рекуррентных функций.*

В следующей теореме содержится алгоритм построения совместно рекуррентных функций.

Теорема 9. *Пусть вещественные функции $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_m(t)$ совместно рекуррентны. Тогда функции*

$$f_1(t) = \exp\left(i\int_0^t g_1(s)ds\right), \quad f_2(t) = \exp\left(i\int_0^t g_2(s)ds\right), \quad \ldots \quad , \quad f_m(t) = \exp\left(i\int_0^t g_m(s)ds\right)$$

вместе с функциями $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_m(t)$ совместно рекуррентны.

Данная теорема в частном случае, когда $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t)$ почти периодичны, доказана в работе [11].

Доказательство. Пусть вектор-функция $(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \cdots, \widetilde{f}_m)$ принадлежит множеству $H[(f_1, f_2, \cdots, f_m)]$, т. е. существует числовая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} f_l(t+h_k) = \widetilde{f}_l(t), \quad l = 1, \cdots, m \tag{35}$$

равномерно на каждом отрезке. Покажем, что имеет место включение $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)) \in H[(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_m)]$ и вектор-функции $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$, $(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t))$ совместно рекуррентны.

В силу рекуррентности функций $g_l(t), l = 1, 2, \cdots, m$, без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} g_l(t+h_k) = \widetilde{g}_l(t), \quad l = 1{,}2, \cdots, m. \tag{36}$$

равномерно на каждом отрезке.

Введем следующие обозначения:

$$G_l(t) = \int_0^t g_l(s), \quad \widetilde{G}_l(t) = \int_0^t \widetilde{g}_l(s), \quad l = 1, \cdots, m.$$

Легко проверить, что имеют место тождества

$$G_l(t+h) \equiv G_l(h) + \int_0^t g_l(s+h)\, ds, \quad l = 1{,}2, \cdots, m.$$

Из этих тождеств и равенств (35), (36) следует, что последовательность чисел $\exp(iG_l(h_k))$, $k = 1, 2, \ldots$ имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} \exp(iG_l(h_k)) = \exp(i\mu_{0l}), \quad 0 \leqslant \mu_{0l} < 2\pi, \quad l = 1, \cdots, m.$$

и имеют места равенства

$$\widetilde{f}_l(t) = \lim_{k\to\infty} \exp(iG_l(t+h_k)) = \exp(i\mu_{0l}) \exp(i\lambda_l \widetilde{G}_l(t)), \quad l = 1, \cdots, m. \tag{37}$$

Так как функции $g_l(t), l = 1, 2, \cdots, m$ совместно рекуррентны, то существует последовательность чисел ν_j, $j = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \widetilde{g}_l(t+\nu_j) = g_l(t), \quad l = 1{,}2, \ldots, m, \tag{38}$$

равномерно на каждом отрезке. Без ограничения общности можно считать, что числовые последовательности $\{\exp(i\widetilde{G}_l(\nu_j))\}_{j=1}^{\infty}$, $l = 1{,}2, \ldots, m$ сходящиеся. Поэтому, в силу (37) и (38), справедливы равенства

$$\lim_{j\to\infty} \widetilde{f}_l(t+\nu_j) = \exp(i\mu_{0l}) \lim_{k\to\infty} \exp(i\widetilde{G}_l(t+\nu_j)) =$$

$$= \exp(i\mu_{0l}) \exp(i\mu_{1l}) \exp(iG_l(t)), \quad l = 1, \cdots, m,$$

где

$$\exp(i\mu_{1l}) = \lim_{j\to\infty} \exp(i\widetilde{G}_l(\nu_j)), \quad 0 \leqslant \mu_{1l} < 2\pi, \quad l = 1, \cdots, m.$$

Таким образом, вектор-функция $(f_{11}(t), f_{12}(t), \ldots, f_{1m}(t))$, где

$$f_{1l}(t) = \lim_{j\to\infty} \widetilde{f}_l(t+\nu_j) = \exp(i\mu_l) \exp(iG_l(t)), \quad \mu_l = \mu_{0l} + \mu_{1l}, \quad l = 1, \cdots, m, \tag{39}$$

принадлежит множеству $H[(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \cdots, \widetilde{f}_m)]$.

С другой стороны, существует подпоследовательность $\{h_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ (как при доказательстве теоремы 8) такая, что имеют место неравенства

$$|g_l(t+\nu_j+h_{k_j}) - g_l(t)| < 1/j(1+|\nu_j|), \quad \text{при} \quad |t+\nu_j| \leqslant j + |\nu_j|, \quad l = 1{,}2, \cdots, m$$

и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} |G_l(t+\nu_j+h_{k_j}) - G_l(t) - G_l(h_{k_j}) - \widetilde{G}_l(\nu_j)| = 0, \quad l = 1{,}2, \cdots, m$$

равномерно на каждом отрезке. Поэтому справедливы представления

$$f_{1l}(t) \equiv \lim_{k\to\infty} f_l(t+\nu_j+h_{k_j}) = \exp(i\mu_l)f_l(t), \quad \mu_l = \mu_{0l}+\mu_{1l}, \quad l = 1,\cdots,m.$$

Аналогично, рассматривая последовательность сдвигов вектор-функции $(f_{11}(t+\nu_{1j}),f_{12}(t+\nu_{1j}),...,f_{ml}(t+\nu_{1j}))$, где $\nu_{1j} = \nu_j + h_{k_j}$, имеем

$$f_{2l}(t) = \lim_{j\to\infty} f_{1l}(t+\nu_{1j}) = \exp(i2\mu_l)f_l(t), \quad l = 1,\cdots,m.$$

Следовательно, $(f_{21}(t),f_{22}(t),\cdots,f_{2m}(t)) \in H[(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2,\cdots,\widetilde{f}_m)]$. Продолжая приведенное рассуждение, получим последовательность вектор-функций $(f_{N1}(t),f_{N2}(t),\ldots,f_{Nm}(t))$, $N = 1,2,\ldots$ из $H[(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2,\cdots,\widetilde{f}_m)]$. Из леммы 2 следует, что данная последовательность вектор-функций сходится к вектор-функции $(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t))$ равномерно на каждом отрезке. Множество $H[(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2,\ldots,\widetilde{f}_m)]$, в силу его замкнутости по топологии равномерной сходимости на каждом отрезке, содержит вектор-функцию $(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t))$. Так как включение $(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t)) \in H[(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2,\ldots,\widetilde{f}_m)]$ нами доказано вдоль той же числовой последовательности $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$, по которой имеет место включение $(g_1(t),g_2(t),\ldots,g_m(t)) \in H[(\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,\cdots,\widetilde{g}_m)]$, то вектор-функции $(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t))$, $(g_1(t),g_2(t),\ldots,g_m(t))$ совместно рекуррентны. Теорема 9 доказана.

Из теоремы 9 вытекает

Следствие 5. *Совместно рекуррентные вещественные функции $g_1(t)$, …, $g_m(t)$ совместно рекуррентны с функцией*

$$f(t) = c_1\exp\left(i\int_0^t g_1(s)ds\right) + \quad \ldots \quad + c_m\exp\left(i\int_0^t g_m(s)ds\right),$$

где c_1, …, c_m — произвольные комплексные числа.

5. ПОСТРОЕНИЕ БАНАХОВОГО ПРОСТРАНСТВА СОВМЕСТНО РЕКУРРЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе построим банахово пространство $\overline{B}$ совместно рекуррентных функций с равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{t\in R^1}|f(t)|. \tag{40}$$

Пространство $\overline{B}$ будет построено на основе результатов предыдущего параграфа, и оно будет содержать множество AP почти периодических функций.

Для любого линейного подпространства L пространства C введем понятие E-расширения L.

Определение 3. E-расширением линейного подпространства L пространства C назовем линейное подпространство $E(L) \subset C$, образованное линейными комбинациями $c_1f_1(t)+\ldots+c_mf_m(t)$ функций $f_1(t),\ldots,f_m(t)$, каждая из которых либо принадлежит L, либо имеет вид $\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right)$, где $g(t)$ — вещественная часть какой-либо функции из L.

Если линейное подпространство L состоит из совместно рекуррентных функций, например, $L = AP$, то его E-расширение $E(L)$, в силу теоремы 9 и следствия 5, также состоит из совместно рекуррентных функций. В этом случае замыкание $E(L)$ по норме пространства C, согласно следствию 3, образует банахово пространство совместно рекуррентных функций.

Положим $B_0 = AP$, где AP — множество всех почти периодических функций, и построим следующую бесконечную цепочку E-расширений:

$$B_1 = E(B_0), \quad B_2 = E(B_1), \quad \ldots, \quad B_N = E(B_{N-1}), \quad \ldots.$$

По построению и в силу теоремы 9 каждое из этих множеств состоит из совместно рекуррентных функций, а их объединение

$$B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

образует линейное пространство совместно рекуррентных функций. Рассмотрим замыкание $\overline{B}$ линейного пространства B по норме (40). В силу следствия 3, $\overline{B}$ — банахово пространство совместно рекуррентных функций.

Множество всех почти периодических функций AP является подпространством $\overline{B}$. Из следующей леммы вытекает, что $\overline{B}$ не совпадает с AP.

Лемма 3. *Если $g(t)$ — вещественная почти периодическая функция, обладающая свойствами*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g(s)ds = 0, \tag{41}$$

$$\sup_{t\in R^1} \left|\int_0^t g(s)ds\right| = \infty, \tag{42}$$

то функция $f(t) = \exp\left(i\int_0^t g(s)ds\right)$ принадлежит множеству $B_1 \backslash AP$.

Доказательство. Принадлежность функции $f(t)$ множеству B_1 следует из построения множества $B_1 = E(AP)$. Покажем, что $f(t) \notin AP$.

Предположим, что функция $f(t)$ является почти периодической. Тогда к функции $f(t)$ можно применить теорему об аргументе почти периодической функции [3]. Согласно этой теореме функция $f(t)$ представима в следующем виде

$$f(t) = \exp\left(i(ct + \psi(t))\right), \quad t \in R^1,$$

где c — вещественное число, $\psi(t))$ — вещественная почти периодическая функция. Отсюда следует, что имеет место равенство

$$\int_0^t g(s)ds = ct + \psi(t) + 2\pi m, \quad t \in R^1,$$

где m — фиксированное целое число. Последнее равенство поделим на t и перейдем к пределу при $t \to \infty$. Тогда, учитывая свойство (41), получим: $c = 0$ и

$$\int_0^t g(s)ds = \psi(t) + 2\pi m, \quad t \in R^1.$$

А это противоречит свойству (42). Лемма 3 доказана.

Можно построить пример почти периодической функции $g(t)$, обладающей свойствами (41), (42) (см., напр., [6]).

Любой линейный ограниченный функционал, который задан в подпространстве AP, по теореме Хана-Банаха [13] можно продолжить на все пространство $\overline{B}$. Например, можно рассматривать функционал

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds, \tag{43}$$

определенный для функций $f(t)$ из AP. Число $M(f)$ называют средним значением почти периодической функции $f(t)$ [6]. Значение $M(f)$ определено не для всех рекуррентных функций $f(t)$. Например, в книге [5] приводится пример рекуррентной функции, построенной

А. А. Марковым, для которой $M(f)$ по формуле (43) не определено. В связи с этим представляет интерес вопрос о распространении понятия среднего значения для рекуррентных функций из банахового пространства $\overline{B}$, применяя построения теоремы Хана-Банаха. Среднее значение рекуррентной функции из пространства $\overline{B}$ может быть полезно в теории динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор, Г. Почти периодические функции / Г. Бор. — М. : Едиториал УРСС, 2005. — 128 с.

2. Левитан, Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. — М. : ГИТТЛ, 1953. — 550 с.

3. Левитан, Б. М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 205 с.

4. Баскаков, А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 1978. — Т. 24, № 2. — С. 195–206.

5. Немыцкий, В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — М. : ГИТТЛ, 1949. — 448 с.

6. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

7. Миллионщиков, В. М. О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем / В. М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 9. — С. 1555–1559.

8. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

9. Гайцгори, В. Г. Управление системами с быстрыми и медленными движениями / В. Г. Гайцгори. — М. : Наука, 1991. — 224 с.

10. Yasutaka, S. Almost periodic solutions of Poisson's equation / S. Yasutaka // Proceedings of the American mathematical society. — 1971. — V. 28, № 1. — P. 195–198.

11. Абдуваитов, Х. А. О линейном множестве рекуррентных функций / Х. А. Абдуваитов, Э. М. Мухамадиев // Доклады АН Тадж. ССР. — 1976. — Т. 19, № 2. — С. 3–5.

12. Касселс, Дж. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. Касселс. — М. : Изд. ин. лит., 1961. — 212 с.

13. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Физматлит, 2004. — 572 с.

REFERENCES

1. Bohr G. Almost periodic functions. [Bor G. Pochti periodicheskiye funktsii]. Moskow: Editorial URSS, 2005, 128 p.

2. Levitan B.M. Almost periodic functions. [Levitan B.M. Pochti periodicheskiye funktsii]. Moskow: GITTL, 1953, 550 p.

3. Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., Zhikov V.V. Pochti periodicheskiye funktsii i differentsialniye uravneniya]. Moskow: Publishing house of Moscow University, 1978, 205 p.

4. Baskakov A.G. Spectral criteria for almost periodicity of solutions of functional equations. [Baskakov A.G. Spektralniye kriterii pochti periodichnosti resheniy funktsionalnykh uravneniy]. *Matematicheskiye zametki — Mathematical Notes*, 1978, vol. 24, no. 24, pp. 195–206.

5. Nemytskiy V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. [Nemytskiy V.V., Stepanov V.V. Kachestvennaya teoriya differentsialnykh uravneniy]. Moskow: GITTL, 1949, 448 p.

6. Demidovich B.P. Lectures on the mathematical theory of stability. [Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti]. Moskow: Nauka, 1967, 472 p.

7. Millionschikov V.M. On recurrent and almost periodic limit solutions of non-autonomous systems. [Millionschikov V.M. O rekurrentnykh i pochti periodicheskikh predelnykh resheniyakh neavtonomnykh sistem]. *Differentsialniye uravneniya — Differential Equations*, 1968, vol. 4, no. 9, pp. 1555–1559.

8. Baskakov A.G. Investigation of linear differential equations by methods of spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovaniye lineynykh differentsialnykh uravneniy metodami spektralnoy teorii raznostnykh operatorov i lineynykh otnosheniy]. *Uspekhi matematicheskikh nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

9. Gaitsgori V.G. Control of systems with fast and slow movements. [Gaitsgori V.G. Upravleniye sistemami s bystrymi i medlennymi dvizheniyami]. Moskow: Nauka, 1991, 224 p.

10. Yasutaka S. Almost periodic solutions of Poisson's equation. Proceedings of the American mathematical society, 1971, vol. 28, no. 1, pp. 195–198.

11. Abduvaitov Kh.A., Mukhamadiev E. On the linear set of recurrent functions. [Abduvaitov Kh.A., Mukhamadiev E. O lineynom mnozhestve rekurrentnykh funktsiy]. *Doklady AN Tadzh. SSR — Reports of the Academy of Sciences Taj. SSR*, 1976, vol. 19, no. 2, pp. 3–5.

12. Cassels J. Introduction to the theory of Diophantine approximations. [Cassels J. Vvedeniye v teoriyu diofantovykh priblizheniy]. Moskow: Publishing house of foreign literature, 1961, 212 p.

13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. [Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza]. Moskow: Fizmatlit, 2004, 572 p.

Мухамадиев Э., доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Mukhamadiev E., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Наимов А. Н., доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Naimov A. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Гайцгори В. Г., кандидат физико-математических наук, доцент, профессор департамента математики, Университет Маккуори, Сидней, Австралия
E-mail: vladimir.gaitsgory@mq.edu.au

Gaitsgori V. G., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematics, Macquarie University, Sydney, Australia
E-mail: vladimir.gaitsgory@mq.edu.au