УДК 517.927.2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ*

М. Б. Зверева[1], М. И. Каменский[1], С. А. Шабров[1], Рено де Фитт Поль[2]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Руанский университет*

Поступила в редакцию 29.09.2020 г.

Аннотация. В работе метод разделения переменных применяется для нахождения точного решения математической модели четвертого порядка с производными по мере. Для анализа возникающих трудностей мы используем поточечный метод интерпретации решений, предложенный Ю. В. Покорный. Этот метод показал свою эффективность: построена точная параллель классической теории дифференциальных уравнений для граничных задач с негладкими решениями как второго, так и более высокого порядков, вплоть до осцилляционных теорем.

Ключевые слова: метод Фурье, поточечный подход, негладкое решение, смешанная задача.

APPLICATION OF THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES TO FIND A SOLUTION TO A FOURTH-ORDER MATHEMATICAL MODEL WITH NON-SMOOTH SOLUTIONS

M. B. Zvereva, M. I. Kamenskii, S. A. Shabrov, P. Raynaud de Fitte

Abstract. In this work, the method of separation of variables is used to find the exact solution of a mathematical model of the fourth order with derivatives with respect to measure. To analyze the analyzing difficulties, we use the pointwise method of interpretation of solutions proposed by Yu. V. Pokornyi. This method has shown its effectiveness: an exact parallel of the classical theory of differential equations for boundary value problems with nonsmooth solutions of both second and higher orders, up to oscillation theorems, has been constructed.

Keywords: Fourier method, pointwise approach, nonsmooth solution, mixed problem.

Последние десятилетия бурно развивается качественная теория с негладкими решениями: построена точная параллель классической теории граничных задач второго порядка, вплоть до осцилляционных теорем [1–3]; получен ряд результатов для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений четвертого и шестого порядков [4–10]. Это произошло после выхода в 1999 году работы Ю. В. Покорного [11] в которой был предложен поточечный подход к трактовке дифференциального уравнения с негладкими решениями: вместе с интегралом Стилтьеса было предложено использовать производные Радона–Никодима. Эту эффективность можно объяснить достаточно просто: при использовании производных по мере уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным, а это даёт возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20–51–15003 НЦНИ–а.

При использовании теории распределений по Шварцу–Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Во-первых, удается установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно, во-вторых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удается решить до сих пор, и, в-третьих, уравнения в обобщенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно.

В работе изучается математическая модель, реализуемая в виде смешанной задачи

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} + \left(ru'_x\right)'_\sigma - uQ'_\sigma; \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0; \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0,t) - ru'_x(0,t) + \gamma_2 u(0,t) = 0; \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0; \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell,t) - ru'_x(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых поперечных свободных колебаний стержневой системы с внутренними особенностями и помещенной на упругое основании с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения.

Решение уравнения в (1) мы будем искать в классе E функций $u(x,t)$, каждая из которых при фиксированном t является абсолютно непрерывной на $[0;\ell]$ функцией, производная $u'_x(x,t)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; квазипроизводная $\left(pu''_{x\mu}\right)(x,t)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x,t)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; при каждом фиксированном x $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по t. При этом под решением математической модели (1) мы будем понимать функцию из класса E, удовлетворяющую граничным и начальным условиям из (1).

Уравнение

$$M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} + \left(ru'_x\right)'_\sigma - uQ'_\sigma$$

задано почти всюду (по мере σ) на декартовом произведении расширения $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$ и временного промежутка $[0;T]$. Построение множества $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ осуществляется следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell]\backslash S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi - 0$, $\xi + 0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$ для всех x, y, для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ само уравнение принимает вид

$$M'_\sigma(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) = -\Delta\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\xi,t) + \Delta\left(ru'_x\right)(\xi,t) - u(\xi,t)\Delta Q(\xi),$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

При применении метода разделения переменных для нахождения решения (1) возникает спектральная задача

$$\begin{cases} LX \equiv \left(pX''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - (rX'_x)'_\sigma + XQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma X(x); \\ \wp_1 X \equiv \left(pX''_{x\mu}\right)(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0; \\ \wp_2 X \equiv \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0) - ru'_x(0) + \gamma_2 u(0) = 0; \\ \wp_3 X \equiv \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0; \\ \wp_4 X \equiv -\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell) + ru'_x(\ell) + \gamma_4 u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр.

При выполнении следующих условий

1. $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ σ–абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$,
2. $\inf\limits_{x\in[0;\ell]} p(x) > 0$,
3. $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$,

в работе [12] доказана

Теорема 1. *Пусть пусть выполнены условия 1–3;* $\{\lambda_n\}$ *— собственные значения задачи* (2)*, причем каждое из них записаны столько, какова их геометрическая кратность. Тогда, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Скорость роста собственных значений, установленная в теореме 1, уточнена в работе [13]: вместо степени $2/3+\delta$ была получена $2/5+\delta$.

Доказанная теорема позволяет обосновать возможность применения метода разделения переменных.

Для удобства введем следующий класс функций: множество E_σ состоит из функций $X(x)$, каждая из которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, производная $X'_x(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; квазипроизводная $pX''_{x\mu}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pX''_{x\mu}\right)'_x(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1–3; кроме того,* $\psi_i(x) \in E_\sigma$*, функция* $\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}$ *абсолютно непрерывны на* $[0;\ell]$*,* $\left(\frac{L\psi_i(x)}{M'_\sigma(x)}\right)'_x$ *— σ–абсолютно непрерывна на* $[0;\ell]$ *(*$i = 1,2$*);* $\wp_j\psi_0 = \wp_j(L\psi_0) = \wp_j\psi_1 = 0$ *(*$j = 1,2,3,4$*). Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t \right), \tag{3}$$

где $\varphi_k(x)$ *— нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению* λ_k*,*

$$A_k = \int\limits_0^\ell M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\sigma, \quad B_k = \int\limits_0^\ell M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\sigma,$$

является решением математической модели (1)*, причем ряд* (3) *можно дифференцировать по* t *дважды, и на* $[0;\ell]$ *четыре раза: сначала по* x*, потом по* μ*, снова по* x*, и затем по* σ*; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике* $[0;\ell]\times[0;T]$.

Доказательство. Оценим коэффициенты ряда Фурье функции $\psi_0(x)$. Имеем

$$A_k = \int\limits_0^\ell \psi_0(x) M'_\sigma(x) \varphi_k(x) d\sigma = \int\limits_0^\ell \psi_0(x) \frac{1}{\lambda_k} \left((p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma} - (r{\varphi_k}'_x)'_\sigma + Q'_\sigma \varphi_k \right) d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^\ell \psi_0(x) \frac{1}{\lambda_k} (p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma} d\sigma - \int\limits_0^\ell \psi_0(x) \frac{1}{\lambda_k} (r{\varphi_k}'_x)'_\sigma d\sigma + \int\limits_0^\ell \psi_0(x) \frac{1}{\lambda_k} (p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma} Q'_\sigma \varphi_k \, d\sigma. \quad (4)$$

Первый интеграл последнего равенства проинтегрируем по частям четырежды, второй — дважды, а также воспользуемся свойствами функции $\varphi_k(x)$, и условиями теоремы, будем иметь

$$A_k = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^\ell \varphi_k(x) L\psi_0 \, d\sigma = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^\ell \varphi_k(x) M'_\sigma(x) \left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma} \right)(x) \, d\sigma. \quad (5)$$

Последнее равенство означает, что числа $\lambda_k A_k$ есть коэффициенты ряда Фурье функции $\left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma} \right)(x)$, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^3 A_k^2|$ сходится.

Аналогично оценим B_k:

$$B_k = \int\limits_0^\ell M'_\sigma(x) \varphi_k(x) \psi_1(x) d\sigma = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^\ell \psi_1(x) \left((p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma} - (r{\varphi_k}'_x)'_\sigma + Q'_\sigma \varphi_k \right) d\sigma. \quad (6)$$

Как и для A_k, разобьем интеграл в последнем равенстве на три, первые два проинтегрируем по частям, придем к равенству

$$B_k = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^\ell \varphi_k(x) M'_\sigma(x) \left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma} \right)(x) \, d\sigma, \quad (7)$$

и, следовательно, $\lambda_k B_k$, как и ранее, являются коэффициентами ряда Фурье непрерывной на $[0, \ell]$ функции $\left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma} \right)(x)$. Получаем неравенство, вытекающее из аналога неравенства Бесселя,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2 \leqslant \int\limits_0^\ell M'_\sigma(x) \left(\frac{L\psi_1(x)}{M'_\sigma(x)} \right)^2 d\sigma,$$

из которого следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial^2 u}{\partial\mu \partial x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (p{\varphi_k}''_{x\mu})''_{x\sigma}(x) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} \left(r \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (r{\varphi_k}'_x)'_\sigma(x) \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t \right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} {\varphi_k}'_x(x) \left(-A_k\sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + B_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k\lambda_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t - B_k\sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t\right).$$

Все ряды, написанные выше, оцениваются рядом

$$K\sum_{k=1}^{\infty}\left(|A_k\lambda_k| + |B_k\sqrt{\lambda_k}|\right),$$

который сходится. Отсюда вытекает равномерная и абсолютная сходимость всех рядов, полученных из (3) почленным дифференцированием. А так как функция $u(x,t)$, определенная равенством (3), очевидно удовлетворяет граничным и начальным условиям, то $u(x,t)$ — действительно решение задачи (1). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

2. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

5. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

6. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

7. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

8. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

9. Borodina, E. A. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity / E. A. Borodina, S. A. Shabrov, M. V. Shabrova // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012023.

10. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives / S. A. Shabrov, O. M. Ilina, E. A. Shaina, D. A. Chechin // Journal of Physics : Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — 2020. — P. 012044.

11. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

12. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Е. А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 207–216.

13. Шабров, С. А. Об уточнении скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, М. В. Шаброва, Е. А. Шайна // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — Т. 193. — С. 158–162.

14. О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко, Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 91–98.

15. Зверева, М. Б. Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием / М. Б. Зверева, М. И. Каменский, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 88–98.

16. Дифференциал Стилтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А. Д. Баев, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.

17. Лылов, Е. В. Достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели малых колебаний сетки из струн с сосредоточенными массами / Е. В. Лылов, С. А. Шабров // Теория и техника радиосвязи. — 2012. — № 3. — С. 122–124.

18. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

REFERENCES

1. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

2. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

3. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm Oscillation Method in Spectral Problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

4. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

5. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

6. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an

integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

7. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

8. Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About one boundary value problem of the sixth order with a strong nonlinearity. [Borodina E.A., Golovanyova F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj granichnoyj zadache shestogo poryadka s sil'noyj nelineyjnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 65–69.

9. Borodina E.A., Shabrov S.A., Shabrova M.V. Nonlinear sixth order models with nonsmooth solutions and monoton nonlinearity. Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012023.

10. Shabrov S.A., Ilina O.M., Shaina E.A., Chechin D.A. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon–Nikodim derivatives Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems, 2020, P. 012044.

11. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

12. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Shayna E.A. About the velocity of increase of eigenvalue of the fourth order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Shayjna E.A. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral'noyj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 207–216.

13. Shabrov S.A., Shabrova M.V., Shaina E.A. On the rate of growth of eigenvalues of a fourth-order spectral problem with derivatives with respect to measure. [Shabrov S.A., Shabrova M.V., Shayjna E.A. Ob utochnenii skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral'noyj zadachi chetvertogo poryadka s proizvodnymi po mere]. *Itogi nauki i texn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz. — Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 193, pp. 158–162..

14. Golovko N.I., Golovanova F.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. About possibility of application of Fourier method to variable mathematical model. [Golovko N.I., Golovaneva F.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. O vozmozhnosti primeneniya metoda Fur'e k raznoporyadkovoyj matematicheskoyj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 91–98.

15. Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition. [Zvereva M.B., Kamenskiyj M.I., Shabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebaniyj struny s nelineyjnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88–98.

16. Baev A.D., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. The Stieltjes differential in

modeling oscillations of a string with localized singularities. [Baev A.D., Zalukaeva ZH.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Differencial Stilt'esa v modelirovanii kolebaniyj struny s lokalizovannymi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 73–83.

17. Lylov E.V., Shabrov S.A. Sufficient conditions for the applicability of the Fourier method to the mathematical model of small vibrations of a grid of strings with lumped masses. [Lylov E.V., Shabrov S.A. Dostatochnye usloviya primenimosti metoda Fur'e k matematicheskoyj modeli malyx kolebaniyj setki iz strun s sosredotochennymi massami]. *Teoriya i texnika radiosvyazi — Theory and technique of radio communication*, 2012, no. 3, pp. 122–124.

18. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

Зверева Маргарита Борисовна, кандидат физико–математических наук, доцент каф. математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of mathematical analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Каменский Михаил Игоревич, доктор физико–математичесских наук, профессор, заведующий каф. функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Kamenskii Mikhail Igorevich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of functional analysis and operator equations, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, доктор физико–математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Рено де Фитт Поль, доктор наук, профессор Руанского Университета, Руан, Франция
E-mail: prf@univ-rouen.fr

Raynaud de Fitte Paul, PhD, professor, University of Rouen Normandy, Rouen, France
E-mail: prf@univ-rouen.fr