

# КУЛОНОВСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СО СВОБОДНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ТЕХНИКА РАСЧЕТОВ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С. И. Мармо, Е. А. Пронин

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 12.07.2021 г.

**Аннотация.** Подробно описана техника вычислений кулоновских матричных элементов теории возмущений высоких порядков, основанная на введении свободных параметров в штурмовское разложение кулоновской функции Грина. Приведены элементарные асимптотические выражения далеких членов рядов для матричных элементов, позволяющие определять значения свободных параметров, обеспечивающих их сходимость, в том числе в надпороговой области. Обсуждаются способы расчетов (и контроля их точности) гипергеометрических функций Аппеля  $F_1$  и  $F_2$ , через которые выражаются матричные элементы.

**Ключевые слова:** кулоновское поле, функции Грина, свободные параметры, функции Аппеля, рекуррентные соотношения.

## COULOMB GREEN'S FUNCTIONS WITH FREE PARAMETERS: MATRIX ELEMENT CALCULATION TECHNIQUE

S. I. Marmo, E. A. Pronin

**Abstract.** The technique for calculating the Coulomb matrix elements of higher-order perturbation theory is described in detail, based on the introduction of free parameters into the Sturm expansion of the Coulomb Green's function. Elementary asymptotic expressions for the distant terms of the series for the matrix elements are given, which make it possible to determine the values of the free parameters that ensure their convergence, including in the above-threshold region. Methods for calculating (and controlling accuracy) of the Appel hypergeometric functions  $F_1$  and  $F_2$ , through which the matrix elements are expressed, are discussed.

**Keywords:** Coulomb field, Green's functions, free parameters, Appell functions, recurrence relations.

### ВВЕДЕНИЕ

После стандартного интегрирования по угловым переменным амплитуды  $N$ -фотонных процессов в кулоновском поле (ниже используем атомные единицы и стандартные обозначения кулоновской задачи)  $U = -Z/r$ , обусловленных переходами между состояниями дискретного спектра, выражаются через радиальные матричные элементы

$$M_{fi}^{(N)} = \langle R_{n_f l_f} | r^{L_N} g_{l_{N-1}}(\mathcal{E}_{N-1}) \dots r^{L_2} g_{l_1}(\mathcal{E}_1) r^{L_1} | R_{n_i l_i} \rangle. \quad (1)$$

Здесь  $R_{n_i l_i}, R_{n_f l_f}$  — радиальные волновые функции начального и конечного состояний электрона,

$$R_{nl} = C_{nl} r^l e^{-Zr/n} \Phi(-n + l + 1, 2l + 2; 2Zr/n), \quad (2)$$

где  $\Phi(a, c; x) \equiv {}_1F_1(a, c; x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция [1],  $g_l(\mathcal{E}; r_1, r_2)$  — радиальная кулоновская функция с орбитальным моментом  $l$  и энергией  $\mathcal{E}$ . Предполагается, что для оператора взаимодействия электрона с электромагнитной волной было использовано мультипольное разложение: в дипольном приближении все  $L_k = 1$ . Наряду с переходами между состояниями дискретного спектра будем рассматривать связанно-свободные переходы. В этом случае волновая функция начального или конечного состояний в (1) принадлежит непрерывному спектру и имеет вид

$$R_{pl} = C_{pl} r^l e^{-ipr} \Phi(iZ/p + l + 1, 2l + 2; 2ipr). \quad (3)$$

Явные выражения нормировочных множителей  $C_{nl}$  и  $C_{pl}$  в дальнейшем не понадобятся.

Удобный способ вычисления матричных элементов связанно-связанных и связанно-свободных переходов дает полученное в [2] разложение функции Грина  $g_l(E)$  по функциям Штурма (решениям уравнения Штурма—Лиувилля) кулоновской задачи:

$$g_l(\mathcal{E}; r, r') = \frac{4}{\nu(2l+1)!} \left( \frac{2r}{\nu} \cdot \frac{2r'}{\nu} \right)^l e^{-\frac{r+r'}{\nu}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2l+2)_k}{k!(k+l+1-\eta)} \Phi(-k, 2l+2; 2r/\nu) \Phi(-k, 2l+2; 2r'/\nu), \quad (4)$$

$\nu = \frac{1}{\sqrt{-2(\mathcal{E}+i0)}}$ ,  $\eta = Z\nu$ . Знак мнимой добавки в энергетическом параметре  $\nu$  соответствует функции  $g_l(\mathcal{E}; r, r')$  с асимптотикой расходящихся волн. Вычисление интегралов по радиальным переменным в (1) выполняется с помощью разложения вырожденных гипергеометрических функций в (2), (3), (4) в ряды и почленного интегрирования:

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{a-1} \Phi(-k, c; xt) \Phi(b, c'; yt) = \Gamma(a) F_2(a, -k, b, c, c'; x, y), \quad (5)$$

где

$$F_2(a, b, b', c, c'; x, x') = \sum_{k, k'=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+k'} (b)_k (b')_{k'}}{k! k'! (c)_k (c')_{k'}} x^k x'^{k'} \quad (6)$$

— функция Аппеля от двух переменных [1]. Последующий расчет  $M_{fi}^{(N)}$  состоит в вычислении функций Аппеля вида  $F_2(a, -k, -k', c, c', x, y)$  с двумя или  $F_2(a, -k, b, c, c', x, y)$  с одним отрицательным верхним параметром и суммировании рядов, состоящих из произведений этих функций. Очевидно, что для успеха расчетов необходима сходимость рядов и устойчивая процедура вычисления  $F_2$  с большими  $k, k'$ . Остановимся сначала на первой проблеме.

Рассмотрим самый простой случай — двухфотонный дипольный  $1s \rightarrow 1s$  переход в атоме водорода ( $Z = 1$ ). Через матричные элементы

$$M_{1s \leftarrow 1s}^{(N=2)} = \langle R_{10} | r g_1(\mathcal{E}) r | R_{10} \rangle \quad (7)$$

таких переходов выражается поляризуемость атома водорода. С расчета этой величины с помощью функции Грина в импульсном представлении [3] начались аналитические и численные исследования многофотонных процессов в кулоновском поле, библиография которых насчитывает десятки работ, см. ссылки в [4]. Аналитически поляризуемость водорода может быть рассчитана разными способами, в том числе с помощью представления (4) для функции Грина, однако здесь мы используем штурмовское разложение для иллюстрации вопроса о сходимости рядов для матричных элементов.

В частном случае двухфотонного  $1s \rightarrow 1s$  перехода матричный элемент  $M_{fi}^{(N)} = M_{1s \leftarrow 1s}^{(N=2)}$  упрощается и представляется рядом из произведения гипергеометрических функций  $F(a, b; c; x) \equiv {}_2F_1(a, b; c; x)$ :

$$M_{1s \leftarrow 1s}^{(N=2)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} m_k^{(2)}, \tag{8}$$

$$m_k^{(2)} \sim \frac{(4)_k}{k!(k+2-\nu)} F(-k, 5; 4; \frac{2}{1+\nu}) F(-k, 5; 4; \frac{2}{1+\nu}).$$

Исследуем поведение входящих сюда гипергеометрических функций при больших  $k$ . Асимптотика  ${}_2F_1(-k, a; c; z)$  при  $k \rightarrow \infty$  следует из соотношения

$$\begin{aligned} {}_2F_1(-k, a; c; z) &= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(c)}{\Gamma(k+a+1)\Gamma(c-a)} z^{-a} {}_2F_1(a+1-c, a; a+1+k; z^{-1}) + \\ &+ \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(c)}{\Gamma(k+c-a+1)\Gamma(a)} (1-z)^k \left(\frac{z-1}{z}\right)^{c-a} \times \\ &\times {}_2F_1\left(c+a, 1-a; c+1-a+k; \frac{z-1}{z}\right), \tag{9} \\ |\arg z| < \pi, \quad |\arg(z-1)/z| < \pi, \end{aligned}$$

которое получается из [1] (формулы (2.9.1), (2.9.13), (2.9.24), (2.9.27)). Представление функций  ${}_2F_1$  в правой части (9) в виде обычных гипергеометрических рядов и дает искомое асимптотическое разложение, справедливое при  $\text{Re } k \rightarrow \infty$  и всех  $z$ , за исключением разреза  $\text{Im } z = 0, \text{Re } z \leq 1$ . Первые члены асимптотики имеют вид

$$\begin{aligned} {}_2F_1(-k, a; c; z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (kz)^{-a} (1 + O(1/kz)) + \\ + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \left(\frac{z-1}{kz}\right)^{c-a} (1-z)^k \left(1 + O\left(\frac{z-1}{kz}\right)\right) \tag{10} \end{aligned}$$

и отличаются от приведенных в известных справочных руководствах [1] (формулы (2.3.14), (2.3.15)) и [12] (формулы (15.7.2), (15.7.3)), совпадая с последними лишь при  $z \rightarrow 0$ .

Вычислим теперь асимптотику общего члена в (6). Заметим, что для функций  ${}_2F_1$  из (6) разность  $c - a$  есть отрицательное целое число, поэтому  $\Gamma(c - a)$  в знаменателе первого члена в (9) обращается в бесконечность, и первый член в асимптотике (9) исчезает (такая ситуация возникает только в нерелятивистской кулоновской задаче: в релятивистском случае или при использовании модельного потенциала Фьюса для расчета переходов валентного электрона в сложных атомах первое слагаемое в (6) и соответствующие члены в асимптотике  $F_2$  существуют). В результате асимптотика общего члена ряда для матричного элемента дается простым выражением:

$$m_k^{(2)} \sim k^4 \left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^k,$$

из которого очевидно, что при отрицательных энергиях функции Грина,  $E < 0$ , параметр  $\nu > 0$ , так что модуль основания степени  $\left|\frac{\nu-1}{\nu+1}\right| < 1$  и ряд сходится. Однако при положительных энергиях,  $E > 0$ , (надпороговых частотах) параметр  $\nu$  становится мнимым,  $\left|\frac{\nu-1}{\nu+1}\right| = 1$  и ряд (6) расходится. Чтобы перенести удобную технику расчетов с кулоновской функцией (4)

на область положительных энергий промежуточных состояний (т.е. на область надпороговых частот), были предложены две модификации штурмовского разложения [4], связанные с введением в него свободных параметров.

## ФУНКЦИЯ ГРИНА С ОДНИМ СВОБОДНЫМ ПАРАМЕТРОМ

### Общие формулы

В работе [5] функция Грина (4) была преобразована в несимметричный ряд с конечной внутренней суммой по тем же функциям, что и (4):

$$\begin{aligned}
 g_l(E; r, r') &= \frac{4}{\nu(2l+1)!} \left( \frac{2r}{\nu} \cdot \frac{2r'}{\nu} \right)^l \left( \frac{\nu}{\alpha} \right)^{2l+2} e^{-(2/\alpha-1/\nu)r} e^{-r'/\nu} \times \\
 &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2l+2)_k}{(l+1-\eta)_{k+1}} \left( \frac{\alpha-\nu}{\alpha} \right)^k \Phi(-k, 2l+2; 2r/\alpha) \times \\
 &\times \sum_{n=0}^k \left( \frac{\alpha}{\alpha-\nu} \right)^n \frac{(l+1-\eta)_n}{n!} \Phi(-n, 2l+2; 2r'/\alpha).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Параметр  $\alpha$  здесь является свободным (произвольным), предельным переходом  $\alpha \rightarrow \nu$  получаем из (11) исходное штурмовское разложение (4). Выбором свободного параметра можно добиться сходимости рядов для матричных элементов  $M_{fi}^{(N)}$ . Вычислим матричный элемент второго порядка с функцией Грина (11):

$$M_{fi}^{(N=2)} = \langle R_{n_f l_f} | r^{L_2} g_l(\mathcal{E}) r^{L_1} | R_{n_i l_i} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} m_k^{(N=2)}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 m_k^{(N=2)} &\sim \frac{(2l+2)_k}{(l+1-\eta)_{k+1}} \left( \frac{\alpha-\nu}{\alpha} \right)^k \times \\
 &\times F_2(l_f + l + L_2 + 3, -n_f + l_f + 1, -k, 2l_f + 2, 2l + 2; \frac{\nu s_2}{n_f}, \frac{\nu s_2}{\alpha}) \times \\
 &\times \sum_{n=0}^k \frac{(l+1-\eta)_n}{k!} \left( \frac{\alpha}{\alpha-\nu} \right)^n F_2(l + l_i + L_1 + 3, -n, -n_i + l_i + 1, 2l + 2, 2l_i + 2; \frac{\nu s_1}{\alpha}, \frac{\nu s_1}{n_i}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$s_1 = \frac{2n_i}{\nu + n_i}, \quad s_2 = \frac{2n_f \alpha}{\alpha(\nu - n_f) + 2\nu n_f}.$$

Исследуем поведение общего члена  $m_k$ , чтобы выяснить условие сходимости (12). Для этого необходимо найти асимптотику левой функции Аппеля  $F_2$  и конечной суммы по  $n$  в (13) при  $k \rightarrow \infty$ . Асимптотика  $F_2(a, -k, b; c, c', x, y)$  дается выражением (38), причем для значений параметров в  $F_2$  из (13) в ней остается только второе слагаемое. Из (38) также следует, что общий член суммы по  $n$  при больших  $n$  ведет себя как  $n^a \left( 1 - \frac{2\nu n_i}{\alpha(\nu + n_i)} \right)^n$  (с  $a > 0$ ), т.е. при максимальном значении  $n = k \rightarrow \infty$  в зависимости от свободного параметра  $\alpha$  принимает или максимальное или минимальное значение. Предположим, что в последнем случае во внутренней сумме максимальным будет первый член (с  $n = 0$ ). Учитывая, аналогично оценке (36), в асимптотике и первый, и последний члены внутренней суммы, получим для  $m_k$  при  $k \rightarrow \infty$  следующее выражение:

$$m_k \sim k^{n_f + L_2} z_1^k \left[ c_1 k^{n_i + L_1} z_2^k + c_2 k^\nu (1 - \nu/\alpha)^k \right], \tag{14}$$

где

$$z_1 = \frac{\alpha(n_f - \nu)}{\alpha(n_f - \nu) - 2\nu n_f}, \quad z_2 = \frac{\alpha(n_i + \nu) - 2\nu n_i}{\alpha(n_i + \nu)},$$

$c_1, c_2$  — постоянные. Строгое исследование асимптотики внутренней суммы в [5] приводит к такому же результату.

Для исследования сходимости вместо свободного параметра  $\alpha$  удобно ввести переменную

$$\beta = \frac{\alpha - \nu}{\nu},$$

тогда выражение (14) принимает вид

$$m_k \sim k^{n_f + L_2} \left[ C_1 k^{n_i + L_1} \left( \frac{\beta - \frac{n_i - \nu}{n_i + \nu}}{\beta - \frac{n_f + \nu}{n_f - \nu}} \right)^k + C_2 k^\nu \left( \frac{\beta}{\beta - \frac{n_f + \nu}{n_f - \nu}} \right)^k \right]. \quad (15)$$

Из (14) видно, что обычный штурмовский ряд, в который (12) переходит при  $\beta = 0$  ( $\alpha = \nu$ ), сходится при  $E < 0$  (вещественном  $\nu$ ) и расходится при  $E > 0$  (мнимом  $\nu$ ). При использовании (11) вместо (4) выбором свободного параметра удается обеспечить сходимость ряда и при мнимых значениях  $\nu$ . Для этого можно, например, положить  $\beta = \varepsilon \frac{n_i - \nu}{n_i + \nu}$ , где  $\varepsilon > 0$  и достаточно мал.

При расчете матричных элементов  $M_{fi}^{(N)}$  высокого порядка ( $N \geq 3$ ) с разложением (11) нужно последовательно суммировать обобщенные штурмовские ряды. При исследовании их сходимости следует учесть, что если  $\langle r | V | i \rangle$  при  $r \rightarrow \infty$  имеет асимптотику

$$\langle r | V | i \rangle \sim \sum_j d_j r^{b_j} \exp(-r/\nu_j),$$

то асимптотика функции Грина, проинтегрированной с «обкладкой»  $\langle r | g_l(E) V | i \rangle$  при  $r \rightarrow \infty$  есть

$$\langle r | g_l(E) V | i \rangle \sim \sum_j d'_j r^{b_j + 1} \exp(-r/\nu_j) + d' r^{\nu - 1} \exp(-r/\nu). \quad (16)$$

Последний результат легко получить, используя для функции Грина  $g_l$  известное представление (см., например, [6]) в виде произведения функций Уиттекера  $M$  и  $W$ . Принимая во внимание (16) и проводя асимптотические оценки так, как это сделано выше, находим для общего члена ряда  $m_k^{(j)}$ , соответствующего  $j$ -той функции Грина в  $M_{fi}^{(N)}$ , при  $k \rightarrow \infty$

$$m_k^{(j)} \sim \sum_{j'=0}^j c_{j'} k^{a_{j'}} q_{j'}^k, \quad (17)$$

$$q_{j'} = \left( \beta_j - \frac{\nu_{j'} - \nu_j}{\nu_{j'} + \nu_j} \right) / \left( \beta_j - \frac{\nu_{j+1} + \nu_j}{\nu_{j+1} - \nu_j} \right), \quad \nu_0 \equiv n_i, \quad \nu_N \equiv n_f.$$

Из (17) следует, что возможность получения сходящегося ряда для  $M_{fi}^{(N)}$  определяется лишь энергиями (параметрами  $\nu_j$ ) функций Грина и начального и конечного состояний, т.е. при расчете матричных элементов высокого порядка свободные параметры для каждой из функций Грина выбираются независимо. Положив в  $j$ -той функции Грина  $\beta_j = \varepsilon \frac{\nu_{j-1} - \nu_j}{\nu_{j-1} + \nu_j}$ , получим сходящийся ряд для матричных элементов произвольного порядка.

Рассмотрим теперь переход в непрерывный спектр. В этом случае матричный элемент

$$M^{(N)}(E_f, n_i) = \langle E_f l_f | r g_{l_{N-1}}(E_{N-1}) \dots r g_{l_1}(E_1) r | n_i l_i \rangle \quad (18)$$

получается из  $M^{(N)}(n_f, n_i)$  заменой  $n_f \rightarrow \nu_f = i/\sqrt{2E_f}$ . Суммирование рядов в (18) следует проводить справа налево. Очевидно, что для первых  $(N - 2)$ -х функций Грина асимптотика общего члена ряда определяется соотношением (17). Для  $(N - 1)$ -й функции Грина выражение для  $m_k^{(N-1)}$  при  $k \rightarrow \infty$  изменяется, поскольку в результате указанной выше замены второй параметр в крайней левой функции  $F_2$  становится нецелым и в асимптотике этой функции  $F_2$ , и, соответственно,  $m_k^{(N-1)}$  возникают дополнительные члены:

$$\begin{aligned}
 m_k^{(N-1)} &\sim \left[ c_1 k^{a_1} q_1^k + c_2 k^{a_2} q_2^k \right] \left[ d_1 k^{b_1} q_1^k + \dots + d_N k^{a_N} q_N^k \right], \\
 q_1' &= \left( \beta_{N-1} - \frac{\nu_N + \nu_{N-1}}{\nu_N - \nu_{N-1}} \right)^{-1}, \quad q_2' = \left( \beta_{N-1} - \frac{\nu_N - \nu_{N-1}}{\nu_N + \nu_{N-1}} \right)^{-1}, \\
 q_j &= \beta_{N-1} - \frac{\nu_{j-1} - \nu_{N-1}}{\nu_{j-1} + \nu_{N-1}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Анализ выражений (17), (19) показывает, что для переходов в непрерывный спектр, происходящих с набором энергии  $E_i < E_1 < \dots < E_{N-1} < E_f$ , всегда можно выбрать свободные параметры  $\beta_i$  так, чтобы обеспечить сходимость рядов. На практике для быстрой сходимости  $M^{(N)}$ -рядов достаточно выбирать свободный параметр так, чтобы минимизировать величину

$$Q = \max(q_1' q_1, \dots, q_1' q_N, q_2' q_1, \dots, q_2' q_N). \tag{20}$$

**Вычисление функций Аппеля  $F_2(a, -k, -k', c, c'; x, y)$  и  $F_2(a, b, -k, c, c'; x, y)$**

После интегрирования по радиальным переменным с использованием функции Грина в форме (11) матричные элементы (1) выражаются через ряд, имеющий следующую структуру:

$$M^{(N)} = \sum C_{k_N} B_{k_N n_N} \dots A_{n_3 k_2} B_{k_2 n_2} A_{n_2 k_1} B_{k_1 n_1}. \tag{21}$$

Здесь суммирование по  $k_i$  ведется от нуля до бесконечности, а по  $n_i$  — от 0 до  $k_i$ . Матрицы  $A, B, C$  составлены из функций Аппеля вида

$$F_2(a, -m, -m', c, c'; x, y) \tag{22}$$

(если конечное состояние принадлежит непрерывному спектру, то в  $C$  входят функции  $F_2(a, b, -k, c, c'; x, y)$  с комплексным параметром  $b$ ). Выбором свободного параметра в функции Грина (11) удается обеспечить сходимость рядов в (21) в надпороговой области, однако скорость сходимости во многих случаях, например, в припороговой или далекой надпороговой области энергий, не слишком велика. Соответственно, для достижения точности в несколько десятичных знаков в суммах по  $k_i$  необходимо брать порядка 100 слагаемых, т.е. для расчета одного матричного элемента четвертого требуется вычислить порядка  $10^4 - 10^5$  функций Аппеля  $F_2$ . В силу большого объема вычислений весьма желательно иметь быстрый и дающий высокую точность алгоритм вычисления (22) с большими значениями  $k$  и  $n$ . Очевидно также, что наиболее быстро функции  $F_2$  вычисляются с помощью соотношений для смежных функций. Введем обозначение

$$F(b + n, \beta + k) \equiv F_2(\alpha, b + n, \beta + k, c, \gamma; x, y)$$

и выпишем эти соотношения, которые можно получить так же, как рекуррентные соотношения для функций  ${}_2F_1$ :

$$\begin{aligned}
 (c - b - 1)F(b, \beta) + [2b - c + 2 + x(\alpha - b - \beta - 1)]F(b + 1, \beta) + \\
 + (b + 1)(x - 1)F(b + 2, \beta) + x\beta F(b + 1, \beta + 1) = 0,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 & (c - b - 1)(1 - y)F(b, \beta + 1) + \\
 & + [(2b - c + 2)(1 - y) + x(\alpha + \beta - b - \gamma)]F(b + 1, \beta + 1) + \\
 & + (b + 1)(x + y - 1)F(b + 2, \beta + 1) + (\gamma - \beta - 1)xF(b + 1, \beta) = 0,
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 & (b - c)(b - c + 1)(1 - y)F(b - 1, \beta) + (b - c + 1) \times \\
 & \times [(2c - 4b + 2)(1 - y) + x(2b - 2\alpha + \gamma + y(\alpha - b - \beta))]F(b, \beta) + \\
 & + \{[6b(b - c + 2 + (c - 2)(c - 3))(1 - y) + x[2b(2\alpha + 2c - 3b - \gamma - 5) + \\
 & + (c - 2)(\gamma - 2\alpha + 2) + y[b(3b - 2\alpha + 2\beta - 2c + 5) + \\
 & + (c - 2)(\alpha - \beta - 1)]] + x(\alpha - \gamma - b)(\alpha - b - 1)\}F(b + 1, \beta) + \\
 & + (b + 1)\{(2c - 4b - 6)(1 - y) + x[6b - 2\alpha + \gamma - 2c + 8 + \\
 & + y(c + \alpha - \beta - 3b - 4) + x(2\alpha - 2b - \gamma - 2)]\}F(b + 2, \beta) + \\
 & + (b + 1)(b + 2)(1 - x)(1 - x - y)F(b + 3, \beta) = 0.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Еще три рекуррентных соотношения можно получить из (23)–(25), воспользовавшись свойством симметрии

$$F_2(\alpha, b, \beta, c, \gamma; x, y) = F_2(\alpha, \beta, b, \gamma, c; y, x).$$

Выпишем явно два первых из них:

$$\begin{aligned}
 & (c' - \beta - 1)F(b, \beta) + [2\beta - c' + 2 + y(\alpha - b - \beta - 1)]F(b, \beta + 1) + \\
 & + (\beta + 1)(y - 1)F(b, \beta + 2) + ybF(b + 1, \beta + 1) = 0,
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & (c' - \beta - 1)(1 - x)F(b + 1, \beta) + \\
 & + [(2\beta - c' + 2)(1 - x) + y(\alpha - \beta + b - \gamma)]F(b + 1, \beta + 1) + \\
 & + (\beta + 1)(x + y - 1)F(b + 1, \beta + 2) + (\gamma - b - 1)yF(b, \beta + 1) = 0,
 \end{aligned} \tag{27}$$

Для наглядности рекуррентные соотношения (23), (24), (26), (27) на рис. 1 изображены на плоскости  $b\beta$ . Рекурсии (23), (24) и (26), (27) можно попарно сложить и получить рекурсии, изображенные на рис. 2, которые в ряде случаев оказываются более устойчивыми.

Отметим, что в работах [7], [8], [9], в которых получен ряд рекуррентных соотношений для  $F_2$ , рекурсии (23)–(26) (полученные А. Г. Файнштемом при выполнении работы [5]) не приводятся.

Опишем схему расчета функций Апеля с помощью рекуррентных соотношений. Пусть необходимо вычислить функции  $F_2(a, -k, -n, c, c'; x, y)$  с  $0 \leq k \leq K$  и  $0 \leq n \leq N$ . Будем заполнять значениями  $F_2$  массив  $\mathcal{F}(1 : K + 1, 1 : N + 1)$ . Заметив, что в рекурсиях (23), (24) при  $b = -1$  равняются нулю коэффициенты при  $F_2(a, 1, \beta, c, c'; x, y)$  и в рекурсиях (26), (27) равняются нулю при  $\beta = -1$  коэффициенты при  $F_2(a, b, 1, c, c'; x, y)$ , дополним матрицу  $\mathcal{F}$  нулевыми столбцом  $\mathcal{F}(0 : K + 1, 0)$  и строкой  $\mathcal{F}(0, 0 : N + 1)$ . Учитывая, что

$$F_2(a, 0, \beta, c, c'; x, y) = {}_2F_1(a, \beta; c'; y) \quad \text{и} \quad F_2(a, b, 0, c, c'; x, y) = {}_2F_1(a, b; c; x),$$

заполним столбец  $\mathcal{F}(0 : K + 1, 1)$  и строку  $\mathcal{F}(1, 0 : N + 1)$  функциями  ${}_2F_1$ . Эти функции тоже удобно рассчитывать с помощью известных трехчленных рекуррентных соотношений [1], расчет следует вести в сторону роста  ${}_2F_1$ , направление роста определяется с помощью асимптотики (10). Имея две начальные строки (или столбца), можем вычислить остальные элементы по рекуррентным соотношениям (23), (24), (26), (27). Главная трудность, которую

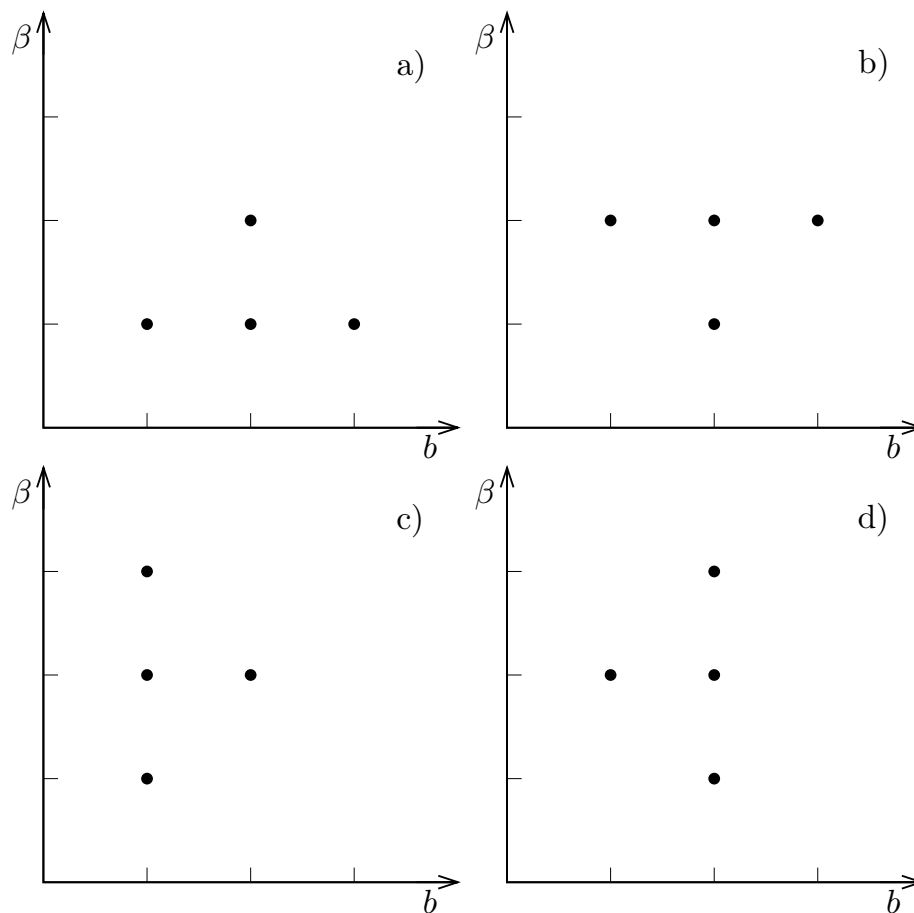


Рис. 1. Рекуррентные соотношения для функции Аппеля  $F_2(\alpha, b+n, \beta+k, c, \gamma; x, y)$ : а) — формула (23), б) — формула (24), с) — формула (26), д) — формула (27).

необходимо преодолеть при расчете  $F_2(a, -n, -k, c, c'; x, y)$  по рекуррентным соотношениям, состоит в вычислении функций с большими  $n$  и  $k$  с достаточной точностью. Вследствие убывания членов в сходящихся (при правильном выборе свободных параметров) рядах для матричных элементов функции  $F_2(a, -n, -k, c, c'; x, y)$  также убывают с ростом  $n$  и  $k$ , поэтому точность при вычислении далеких членов матрицы теряется. Однако разные рекурсии имеют разную степень неустойчивости, и потеря точности возникает в разных областях значений  $k$  и  $n$ . Хотя аналитически устойчивость рекурсий можно проанализировать с помощью асимптотики (38) только на краях матрицы, т.е. при  $t \ll n$ ,  $n \ll t$ , пробные расчеты позволяют подобрать достаточно устойчивые рекурсии или их комбинации, позволяющие избежать значительных потерь точности. Например, матрицу  $\mathcal{F}$  можно заполнять с помощью рекурсий с рис. 1d) или рис. 2a), заполняя матрицу по горизонтали или с помощью рис. 1b) или рис. 2b), заполняя матрицу по вертикали. Можно также заполнять матрицу от краев к диагонали или комбинировать разные способы. В конечном счете, достаточно подобрать способ, позволяющий избежать катастрофических сокращений, и использовать программные средства повышения точности вычислений, позволяющих оперировать числами, имеющими до нескольких сотен десятичных знаков (см., например, [10]). Такие программы значительно увеличивают время вычислений, но при отсутствии катастрофической потери точности быстродействие современных компьютеров позволяет достичь приемлемого соотношения между затратами времени и точностью вычислений. В частности, с помощью программы [10] столбец функций  $F_2(a, b, -k, c, c'; x, y)$  непосредственно вычисляется по рекурсии (26), используемой «вверх».



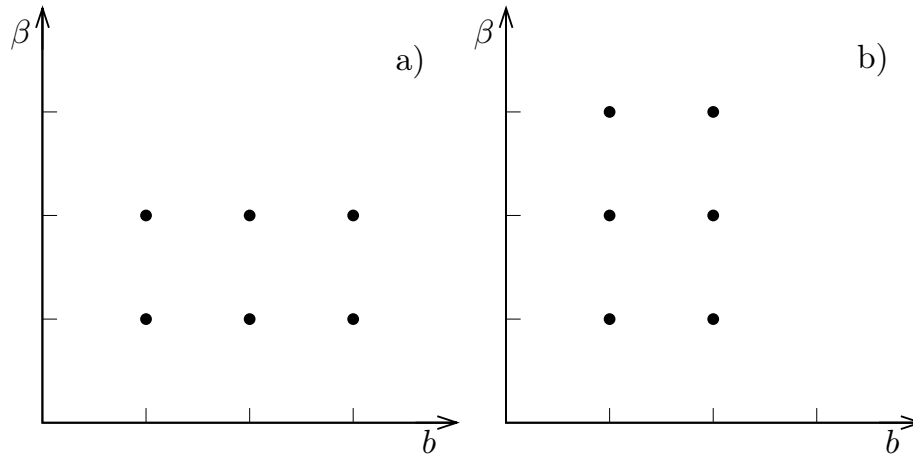


Рис. 2. Объединение рекурсий (23) и (24) — рис. а) и (25) и (26) — рис. б)

Таблица 1. Точность вычисления функций Аппеля  $F_2(a, -n, -k, c, c'; x, y)$  в одной из матриц  $A_{nk}$  в (21) при надпороговой частоте  $\omega = 2|E_{1s}|$ . Приведенные величины (без знака) показывают число правильных значащих цифр. Вычисления проводились со 100 значащими цифрами.

$m \setminus m'$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
1	-91	-94	-94	-93	-94	-94	-94	-93	-94	-94	-93
20	-94	-88	-87	-87	-88	-88	-88	-88	-88	-88	-88
40	-94	-93	-80	-79	-81	-82	-82	-82	-82	-83	-83
60	-94	-93	-91	-72	-71	-73	-74	-76	-76	-76	-77
80	-94	-93	-93	-88	-65	-63	-64	-67	-68	-69	-70
100	-94	-94	-93	-92	-87	-57	-55	-56	-59	-61	-62
120	-94	-94	-93	-93	-89	-85	-50	-47	-48	-51	-53
140	-94	-94	-94	-93	-92	-86	-83	-43	-39	-40	-42
160	-94	-93	-93	-93	-93	-89	-84	-81	-34	-32	-32
180	-94	-93	-93	-93	-93	-92	-86	-81	-79	-27	-25
200	-94	-94	-94	-93	-93	-92	-90	-84	-79	-38	-26

При расчете матриц большого размера следует контролировать точность вычисленных функций  $F_2(a, -n, -k, c, c'; x, y)$  с большими  $k$  и  $n$ . Такой контроль можно проводить с помощью тех соотношений (23)–(26), которые не использовались в расчетах. На практике можно вычислять относительные невязки всех рекуррентных соотношений (23)–(27) и затем выбирать наибольшую из них —  $d_{kn}$ . Пример точности вычисления функций Аппеля  $F_2(a, -n_2, -k_1, c, c'; x, y)$  из матрицы  $A_{n_2 k_1}$ , возникающей в матричных элементах (1) с энергиями  $\mathcal{E}_1 = 3E_{1s}$  и  $\mathcal{E}_2 = 5E_{1s}$ , приведен в табл. 1. В ней представлены целые части десятичных логарифмов максимальных относительных невязок,  $x_{nk} = [\log_{10}|d_{kn}|]$ , т.е. фактически число правильных десятичных знаков. Вычисления проводились со 100 десятичными знаками, из которых при  $n = k \sim 200$  удается сохранить 25.

### ФУНКЦИЯ ГРИНА С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе [4] было предложено обобщенное штурмовское разложение кулоновской функции

Грина  $g_l$ , которое представляет собой двойной ряд по штурмовским функциям:

$$g_l(E; r, r') = \sum_{k, k'=0}^{\infty} g_{kk'}^l(\nu; \alpha, \alpha') S_{kl} \left( \frac{2r}{\alpha} \right) S_{k'l} \left( \frac{2r'}{\alpha'} \right), \quad (28)$$

где

$$S_{kl}(2r/\alpha) = \frac{2(2l+2)_k}{\alpha k!} (2r/\alpha)^l \exp(-r/\alpha) \Phi(-k, 2l+2; 2r/\alpha). \quad (29)$$

Параметры  $\alpha$  и  $\alpha'$  в функциях  $S_{kl}$ ,  $S_{k'l}$  являются свободными (произвольными). Принципиальным обстоятельством, придающим значительную гибкость в использовании обобщенного штурмовского разложения в различных приложениях, является факторизованная зависимость членов ряда (28) от  $r$ ,  $r'$  и энергетического параметра  $\nu = 1/\sqrt{-2(E+i0)}$ . Вся зависимость от энергии  $E$  содержится в ядре  $g_{kk'}^l(\nu; \alpha, \alpha')$ , которое не зависит от радиальных переменных и выражается через гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} g_{kk'}^l(\nu; \alpha, \alpha') &= f(\alpha, \alpha') \times \\ &\times \left[ \frac{{}_2F_1(-k, l+1-\eta; 2l+2; z)}{l+1-\eta} {}_F_1(l+1-\eta; -k', k'+2l+2; l+2-\eta; y, y') + \right. \\ &\left. + \sum_{p=1}^k C_k^p(-z)^p \frac{{}_2F_1(-k+p, l+1-\eta+p; 2l+2+p; z)}{(2l+2)_p} \Phi_p^{l, k'} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_p^{l, k'} &= - \frac{(l+2+\eta-p)_{p-1} (1-y)^{k'}}{(1-y')^{k'+2l+2}} \times \\ &\times {}_F_1(-p+1; -k', k'+2l+2; l+2+\eta-p; 1/(1-y), 1/(1-y')), \\ f(\alpha, \alpha') &= \frac{2^{4l+4}}{\Gamma(2l+2)} \frac{1}{\nu^{2l+1} (\alpha\alpha')^{l+1}} \frac{\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\alpha}\right)^k}{\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\alpha}\right)^{k+2l+2}} \frac{\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\alpha'}\right)^{k'}}{\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\alpha'}\right)^{k'+2l+2}}, \\ z &= - \frac{4\alpha\nu}{(\alpha-\nu)^2}, \quad y = \frac{\alpha-\nu}{\alpha+\nu} \frac{\alpha'+\nu}{\alpha'-\nu}, \quad y' = \frac{\alpha-\nu}{\alpha+\nu} \frac{\alpha'-\nu}{\alpha'+\nu}, \end{aligned} \quad (31)$$

$C_k^p$  – биномиальный коэффициент. Функция Аппеля в  $\Phi_p^{l, n'}$  есть конечный полином по обоим аргументам. Следовательно, (30) содержит две существенно различающиеся группы членов: функция Аппеля в первом члене имеет целый отрицательный параметр  $-n'$  и эквивалентна линейной комбинации  $(n'+1)$  не сводящихся к полиномам гипергеометрических функций  ${}_2F_1$ ; члены с  $\Phi_p^{l, n'}$  представляют собой произведение гипергеометрических полиномов одной переменной –  ${}_2F_1$ , и двух переменных –  $F_1$ .

Рациональный выбор свободных параметров в соответствии со спецификой конкретной задачи позволяет в ряде случаев кардинально упростить процедуру расчета матричных элементов с  $g_l(E; r, r')$ . Так, положив в (28)  $\alpha = n/Z, \alpha' = n'/Z$ , удастся выразить матричные элементы дипольных двухфотонных  $|nl\rangle \rightarrow |n'l'\rangle$  переходов выражаются в замкнутой форме в виде линейной комбинации  $g_{kk'}^l$  из (30). В случае трехфотонных переходов непосредственное использование (28) приводит к четырехкратному ряду, однако выбором свободных параметров удастся свести матричный элемент к комбинации однократных рядов из произведений двух  $g_{kk'}^l$ , в которых остается один свободный параметр. Аналитическим продолжением по переменной  $n'$  из амплитуд связанно-связанных переходов получаются амплитуды связанно-свободных переходов. Например, трехфотонные матричные элементы переходов в непрерывный спектр из основного состояния выражается через ряды вида

$$S_{m_1, m_2} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3)!}{k!} g_{a-m_1, k}(\nu_2; i/p, \alpha) g_{k+m_2, 0}(\nu_1; \alpha, 1/Z) \quad (32)$$

Соответствующие формулы приведены в [11], там же подробно обсуждается выбор свободных параметров на основе асимптотик  $g_{kk'}^l$  с большим нижним индексом.

Остановимся здесь на вычислении  $g_{kk'}^l$ , основную трудность при котором представляет вычисление первой функции Аппеля  $F_1$  в (30). Заметим, что функцию  $F_1$  общего вида можно разложить в ряд по  ${}_2F_1$ . Используя двойной ряд для  $F_1$  [1, (5.7.6)] и преобразуя символы Похгаммера, получим

$$\begin{aligned} F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) &= \sum_m \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{m! (\gamma)_m} x^m \sum_n \frac{(\alpha + m)_n (\beta')_n}{n! (\gamma + m)_n} y^n = \\ &= \sum_m \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{m! (\gamma)_m} x^m {}_2F_1(\alpha + m, \beta'; \gamma + m; y). \end{aligned}$$

Преобразуем функцию  ${}_2F_1$  под суммой с помощью соотношения [1, (2.9.4)], оставив индекс суммирования только в нижнем параметре  ${}_2F_1$ :

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = (1 - y)^{-\beta'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{m! (\gamma)_m} x^m {}_2F_1(\gamma - \alpha, \beta'; \gamma + m; \frac{y}{y - 1}). \quad (33)$$

Полученный ряд легко исследовать на сходимость. Общий член ряда  $A_m$  имеет следующее поведение при  $m \rightarrow \infty$ :

$$A_m \sim m^{\alpha + \beta - \gamma - 1} x^m.$$

Таким образом, если у функции  $F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y)$  хотя бы один из аргументов по модулю меньше единицы, ее можно вычислять, раскладывая по функциям  ${}_2F_1$ .

В первой функции  $F_1$  из (30) параметр  $\beta = -k'$ , т.е. целый неположительный, поэтому, как отмечено выше,  $F_1(l + 1 - \eta; -k', k' + 2l + 2; l + 2 - \eta; y, y')$  раскладывается в конечную сумму  ${}_2F_1$ , которые можно вычислять с помощью стандартных компьютерных программ. Однако практика показывает, что такой способ расчета не является лучшим. Более удобную возможность вычисления функций  $F_1$ , применимую также и при  $|x| > 1$ , дает ее интегральное представление [1, 5.8.5]:

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-ux)^\beta (1-uy)^{\beta'}} du. \quad (34)$$

Все остальные функции  $F_1$  в (30) (которые входят в  $\Phi_p^{l, n'}$ ) имеют неположительный целый первый параметр. Если представить функцию  $F_1$  в следующем виде:

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta + \beta')_m}{m! (\gamma)_m} y^m {}_2F_1(-m, \beta; \beta + \beta'; 1 - x/y), \quad (35)$$

то  ${}_2F_1$  представляет собой конечный ряд, и вся функция Аппеля становится конечным легко вычисляемым рядом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя в принципиальном отношении расчеты составных матричных элементов с помощью кулоновских функций Грина (11), (28) со свободными параметрами описаны в работах [4], [5], научное общение показывает, что недостаточная детализация затрудняет понимание предложенных методов и самостоятельное их использование. Авторы надеются, что настоящая статья восполняет имеющиеся пробелы и позволит заинтересованному пользователю реализовать технику расчетов со свободными параметрами в выбранной им программной среде.

Кроме того, представленные в статье рекуррентные соотношения для функций Аппеля  $F_2$  (23)–(27) и асимптотики (10) и (38) гипергеометрических функции  ${}_2F_1$  и  $F_2$  малодоступны или отсутствуют в научной литературе и могут иметь самостоятельный интерес.

Авторы благодарны А. И. Магунову, Ф. А. Корнееву, А. С. Корневу за интерес к нашим методам надпороговых расчетов, стимулировавший написание представленной статьи.

### Приложение. Асимптотики гипергеометрических функций ${}_2F_1$ и $F_2$

Найдем асимптотику (9) способом, который можно будет использовать и для исследования функций  $F_2$ . Представим  ${}_2F_1$  в интегральном виде [1]:

$${}_2F_1(-k, a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tz)^k dt. \quad (36)$$

Быстро меняющаяся функция  $(1-tz)^k$  достигает максимального значения либо при  $t=0$ , либо при  $t=1$  в зависимости от значения  $z$ . Значение  $z$  заранее неизвестно, поэтому учтем вклад в асимптотику обеих точек:  ${}_2F_1(-k, a; c; z) \stackrel{as}{\approx} F^{(t=0)} + F^{(t=1)}$ . Вблизи  $t=0$ , заменив  $(1-tz)^k \rightarrow e^{-kzt}$ ,  $1-t \rightarrow 1$  и верхний предел на бесконечность, вычислим

$$F^{(t=0)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-kzt} dt = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (kz)^{-a}.$$

Видим, что результат совпадает с первым членом в (10). Точно так же, вводя новую переменную  $t' = 1-t$ , вычислим

$$F^{(t=1)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} (1-z)^k \int_0^\infty t'^{c-a-1} \exp\left(-\frac{kzt'}{z-1}\right) dt' = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \left(\frac{z-1}{kz}\right)^{c-a} (1-z)^k$$

— это второй член в (10). Заметим, проведенное здесь вычисление асимптотики является, фактически, применением метода Лапласа [13].

Найдем теперь асимптотику функции Аппеля  $F_2(a, -k, b, c, c', x, y)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Выразим ее из соотношения (5) и используем для первой из функций  $\Phi$  обычное интегральное представление ([1], формула (6.5.1)). Выполняя затем интегрирование по  $t$ , получим

$$\begin{aligned} F_2(a, -k, b, c, c'; x, y) &= \\ &= \frac{\Gamma(c')}{\Gamma(b)\Gamma(c'-b)} \int_0^1 \frac{u^{b-1} (1-u)^{c'-b-1}}{(1-yu)^a} {}_2F_1\left(-k, a; c; \frac{x}{1-yu}\right) du. \end{aligned} \quad (37)$$

Воспользовавшись для  ${}_2F_1$  асимптотикой (10) и вычисляя интеграл по  $u$  (слагаемое с быстроменяющейся функцией  $[1-x/(1-yu)]^k$  оценивается так же, как выше, причем вклад в асимптотику дают граничные точки  $u=0$  и  $u=1$ ), окончательно получаем

$$\begin{aligned} F_2(a, -k, b, c, c'; x, y) &\sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (kx)^{-a} + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(a)\Gamma(c'-b)} \left(\frac{x-1}{kx}\right)^{c+b-a} (-y)^{-b} (1-x)^k + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x+y-1}{kx}\right)^{c+c'-a-b} (1-y)^{c'-a-b} y^{b-c'} \left(\frac{1-x-y}{1-y}\right)^k. \end{aligned} \quad (38)$$

Относительная точность (38) определяется большей из величин  $1/kx$ ,  $1/ky$ . Возводимые в степень комплексные величины берутся с наименьшими по модулю значениями аргументов. В частном случае  $b = 0$  функция Аппеля  $F_2$  переходит в  ${}_2F_1$  и (38) совпадает с (10).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи: В 3 т. — М. : Наука. — Т. 1. — 1973. — 294 с.
2. Hostler L. Coulomb Green function in f-dimensional space / L. Hostler // J. Math. Phys. — 1970. — V. 11. — P. 2966–2970.
3. Gavrila, M. Elastic scattering of photons by a hydrogen atom / M. Gavrila // Phys. Rev. — 1967. — V. 163. — P. 147–156.
4. Крыловецкий, А. А. Обобщенные штурмовские разложения кулоновской функции Грина и двухфотонные формулы Гордона / А. А. Крыловецкий, Н. Л. Манаков, С. И. Мармо // ЖЭТФ. — 2001. — Т. 119. — С. 45–70.
5. Манаков, Н. Л. Аналитическое продолжение кулоновских функций Грина в область непрерывного спектра / Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, А. Г. Файнштейн // ТМФ. — 1984. — Т. 59. — С. 49–57.
6. Рапопорт, Л. П. Теория многофотонных процессов в атомах / Л. П. Рапопорт, Б. А. Зон, Н. Л. Манаков. — М. : Атомиздат, 1978. — 184 с.
7. Opps, S. Recursion formulas for Appell's hypergeometric function F, with some applications to radiation field problems / S. Opps, N. Saad, H. M. Srivastava // Appl. Math. and Comp. — 2009. — V. 207. — P. 545–558.
8. Wang, X. Recursion formulas for Appell functions / X. Wang // Int. Trans. and Spec. Func. — 2012. — V. 23, № 6. — P. 111–123.
9. Brychkov, Yu. A. On some formulas for the Appell function  $F_2(a, b, b'; c, c'; w; z)$  / Yu. A. Brychkov, N. Saad // Int. Trans. and Spec. Func. — 2014. — V. 25, № 2. — P. 111–123.
10. Bailey, D. H. MPFUN2020: A new thread-safe arbitraryprecision package / D. H. Bailey // <https://www.davidhbailey.com/dhbpapers/mpfun2020.pdf>, 2021.
11. Мармо, С. И. Метод расчета многофотонной ионизации атома водорода при надпороговых частотах / С. И. Мармо // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2005. — № 1. — С. 62–74.
12. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М. : Наука, 1979. — 832 с.
13. Олвер, Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер. — М. : Наука, 1990. — 528 с.

### REFERENCES

1. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. [Beyjtmen G., Erdeyji A. Vysshie transcendentnyye funkci]. Moscow, 1973, vol. 1, 294 p.
2. Hostler L. Coulomb Green function in f-dimensional space. J. Math. Phys., 1970, vol. 11, pp. 2966–2970.
3. Gavrila M. Elastic scattering of photons by a hydrogen atom. Phys. Rev., 1967, vol. 163, pp. 147–156.
4. Krylovetskii A.A., Manakov N.L., Marmo S.I. Generalized Sturm expansions of the Coulomb Green's function and two-photon Gordon formulas. [Kryloveckiy A.A., Manakov N.L., Marmo S.I. Obobshhennye shturmovskie razlozheniya kulonovskoyj funkci Grina i dvuxfotonnyye formuly Gordona]. *ZHETF — JETP*, 2001, vol. 119, pp. 45–70.
5. Manakov N.L., Marmo S.I., Fainshtein A.G. Analytic continuation of the Sturm expansion of Coulomb Green's functions to the region of the continuous spectrum. [Manakov N.L., Marmo S.I.,

Fayjnshteyjn A.G. Analiticheskoe prodolzhenie kulonovskix funkciyj Grina v oblast' nepreryvnogo spektra]. *TMF — Theoret. and Math. Phys*, 1984, vol. 59, pp. 49–57.

6. Rapoport L.P., Zon B.A., Manakov N.L. Theory of Multiphoton Processes in Atoms. [Rapoport L.P., Zon B.A., Manakov N.L. Teoriya mnogofotonnyx processov v atomax]. Moscow, 1978, 184 p.

7. Opps S., Saad N., Srivastava H.M. Recursion formulas for Appell's hypergeometric function  $F$ , with some applications to radiation field problems. *Appl. Math. and Comp.*, 2009, vol. 207, pp. 545–558.

8. Wang X. Recursion formulas for Appell functions. *Int. Trans. and Spec. Func.*, 2012, vol. 23, no. 6, pp. 111–123.

9. Brychkov Yu.A., Saad N. On some formulas for the Appell function  $F_2(a, b, b'; c, c'; w; z)$ . *Int. Trans. and Spec. Func.*, 2014, vol. 25, no. 2, pp. 111–123.

10. Bailey D.H. MPFUN2020: A new thread-safe arbitraryprecision package. <https://www.davidhbailey.com/dhbpapers/mpfun2020.pdf>, 2021.

11. Marmo S.I. Method for calculating multiphoton ionization of an atom hydrogen at above-threshold frequencies. [Marmo S.I. Metod rascheta mnogofotonnoy ionizacii atoma vodoroda pri nadporogovyx chastotax]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2005, no. 1, pp. 62–74.

12. Handbook of Mathematical Functions / Ed. by M. Abramovitz, I. Stegun. [Spravochnik po special'nyx funkciyam / pod red. M. Abramovica, I. Stigan]. Moscow : Nauka, 1979, 832 p.

13. Olver F. Asymptotics and special functions. [Olver F. Asimptotika i special'nye funkicii]. Moscow: Nauka, 1990, 528 p.

*Мармо Сергей Иванович, доктор физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия  
E-mail: marmo@phys.vsu.ru*

*Marmo Sergey Ivanovich, associate professor of the Department of Theoretical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: marmo@phys.vsu.ru*

*Пронин Евгений Александрович, кандидат физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия  
E-mail: pronin1@mail.ru*

*Pronin Evgeniy Alexandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: pronin1@mail.ru*