УДК 517.53; 517.54

О ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ВАЛИРОНА

О. В. Охлупина

Брянский государственный инженерно-технологический университет

Поступила в редакцию 14.02.2020 г.

Аннотация. В данной работе получено полное описание классов целых функций типа Валирона с весом из Lp-пространств. Доказательство всех утверждений в статье строится с использованием основных методов комплексного анализа.

Ключевые слова: фактор бесконечного произведения, целая функция, порядок целой функции, корневые множества, факторизационное представление.

ABOUT THE WEIGHT CLASSES OF ENTIRE FUNCTIONS OF VALIRON'S TYPE

O. V. Okhlupina

Abstract. In this paper, a representation of classes of entire functions of the Valiron type with weight from Lp-spaces is constructed. The proof of all statements in the article is constructed using the methods of complex and functional analysis.

Keywords: an entire function, order of an entire function, root sets, factorization representation, infinite product factor.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи по описанию корневых множеств и получению факторизационных представлений разнообразных классов функций имеют особое значение в теории функций комплексного переменного и её приложениях. Широко известны работы начала 20-го столетия о корнях целых функций, имеющих заданный рост, при стремлении к бесконечно удалённой точке, о факторизационном представлении функций ограниченного вида и классов Харди в круге единичного радиуса. Изучению и полному описанию различных классов функций посвящены труды Б. И. Левина, М. М. Джрбашяна, Н. В. Говорова, А. М. Седлецкого, Ф. А. Шамояна, Б. И. Коренблюма, К. Сейпа, Б. Н. Хабибуллина и других учёных.

Введём необходимые обозначения, предваряющие изложение основного результата работы.

Стандартно символом C обозначим комплексную плоскость. $H(C)$ — множество всех целых функций в ней. Для $f \in H(C)$ обозначим $Z_f = \{z \in C : f(z) = 0\}$.

Пусть $q \in N$, $z,\zeta \in C$, тогда $A_q(z,\zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{q} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^j\right)$ — фактор бесконечного произведения Вейерштрасса порядка q.

Для последовательности комплексных чисел $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|z_k| \leqslant |z_{k+1}|$, $k = 1,2,...$, $|z_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$, обозначим $n(r) = card\{z_k : |z_k| \leqslant r\}$, $0 < r < +\infty$. Если $Z = Z_f$, то соответствующую считающую функцию назовём n_f.

Для $0 < p < +\infty$, $0 < \rho < +\infty$ определим класс функций:

$$N_{\rho}^{p}(C) = \left\{ f \in H(C) : \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^{p}}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty \right\}.$$

В данной работе построено факторизационное представление, а также получено описание корневых множеств функций класса $N_{\rho}^{p}(C)$.

Если положить в рассматриваемом классе p равным единице, полученный в данной статье результат трансформируется в теорему Валирона (см. [1])

При доказательстве основного результата работы использовались методы, изложенные в работах [2–5].

Корневые множества классов целых и субгармонических функций с другим весом из L_p-пространств были описаны автором в работах [4], [5].

ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Теорема 1. Пусть $0 < \rho < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $\rho \notin N$. Тогда эквивалентны утверждения:

a) Найдётся $f \in N_{\rho}^{p}(C)$, такая что $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно представить в виде $Z = Z_f$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{n^p\left(2^k\right)}{2^{\rho p k}} < +\infty$.

Доказательство. Согласно свойствам несобственных интегралов, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{n^p\left(2^k\right)}{2^{\rho p k}} < +\infty$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty$.

При $2^k \leqslant r \leqslant 2^{k+1}$, $n\left(2^k\right) \leqslant n(r) \leqslant n\left(2^{k+1}\right)$:

$$I = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\left(2^{k+1}\right)\right)^p}{2^{k\rho p}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^p(2^m)}{2^{(m-1)\rho p}} = 2^{\rho p} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^p(2^m)}{2^{m\rho p}}.$$

Поэтому из сходимости $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{n^p\left(2^k\right)}{2^{\rho p k}} < +\infty$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty$.

Функция $n(r)$ монотонна на $R_+ = [0; +\infty)$. Используя этот факт, несложно показать справедливость обратного утверждения.

Пусть $f \in N_{\rho}^{p}(C)$, $Z = Z_f$. Докажем сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{n^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty$.

Применяя неравенство Иенсена, имеем $n_f(r) \leqslant \ln M(er,f) + C_f$. Поэтому

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{n_f^p(r)}{r^{\rho p+1}} dr \leqslant \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^p M(er,f)}{r^{\rho p+1}} dr \leqslant e^{\rho p} \int\limits_{e}^{+\infty} \frac{\ln^p M(t,f)}{t^{\rho p+1}} dt < +\infty.$$

Доказали, что из a) следует b). Перейдём к доказательству обратного утверждения.

Пусть q — целое число, такое, что $q \leqslant \rho < q+1$. $E_q(z,z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} A_q(z,z_k)$.

Покажем, что $E_q(z,z_k)$ сходится на компактных подмножествах C при $E_q(z,z_k) \in N_{\rho}^{p}(C)$.

Установим сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^{q+1}} < +\infty$ при $q > \rho - 1$. Сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt$.

Пусть $1 < p < +\infty$. Согласно неравенству Гёльдера, имеем, что для сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt$ достаточно обеспечить сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\left(q+2-\rho-\frac{1}{p}\right)p'}}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$. Это означает, что для выполнения условия $\rho - 1 < q < +\infty$ подберём $q \in N$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\rho - 1 < q < \rho$.

Докажем, что при выбранных q произведение $E_q(z,z_k) \in N_\rho^p(C)$.

Применяя оценку произведения Вейерштрасса, получаем:

$$\ln M(r,E_q) \leqslant K_q \left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt + r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt \right), \quad |z| = r.$$

Поэтому

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{1+\rho p}} dr \leqslant$$

$$\leqslant K_q^p \left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^r t^{-q-1} n(t)\, dt\right)^p}{r^{1+(\rho-q)p}} dr + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(\int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt\right)^p}{r^{1+(\rho-q-1)p}} dr \right) = K_q^p (I_1 + I_2).$$

Сходимость интегралов $I_1,\ I_2$ несложно показать с применением методов, представленных автором в работе [4].

Тогда $E_q(z,z_k) \in N_\rho^p(C)$ (с нулями в точках последовательности$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$).

Пусть $0 < p \leqslant 1$. Построим функцию, нулями которой являются точки последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Применяя оценку для $E_q(z,z_k)$, получим:

$$\ln M(r,E_q) \leqslant K_q \left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt + r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt \right),$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{1+\rho p}} dr \leqslant K_q^p \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt + r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt \right)^p}{r^{1+\rho p}} dr \leqslant$$

$$\leqslant K_q^p \left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^q \int\limits_1^r t^{-q-1} n(t)\, dt\right)^p}{r^{1+\rho p}} dr + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left(r^{q+1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t)\, dt\right)^p}{r^{1+\rho p}} dr \right) = K_q^p (I_1 + I_2).$$

Сходимость $I_1,\ I_2$ доказывается методами, изложенными в [4].

Из сходимости интегралов I_1 и I_2 получаем, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{1+\rho p}} dr < +\infty$, при этом $\rho - 1 < q < \rho$, $\rho \notin N$, $0 < p < +\infty$.

Теорема доказана.

Для целых ρ имеет место утверждение:

Теорема 2. Пусть $f \in N_\rho^p(C)$, $\rho \in N$. $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|z_k| \leqslant |z_{k+1}|$, $k = 1,2,...$, $|z_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно представить в виде $Z = Z_f$ для некоторой функции $f \in N_\rho^p(C)$;

b) $\delta_f(r) = \left|\sum\limits_{|z_k|\leqslant r} \frac{1}{z_k^{\rho}}\right|$ удовлетворяет условиям: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} < +\infty$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(n(r))^p dr}{r^{\rho p+1}} < +\infty$, где $n(r)$ — число нулей функции f в круге D_r, $0 < r < +\infty$.

При доказательстве данной теоремы используются методы из работ [3], [4]. Необходимость условий из пункта b) вытекает из неравенства Иенсена.

ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Теорема I. Пусть ρ — нецелое неотрицательное число, $0 < p < +\infty$, $\rho - 1 < q < \rho$. Тогда равносильны следующие утверждения:

a) $f \in N_\rho^p(C)$;

b) f допускает представление

$$f(z) = z^m \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)\exp(h(z)),$$

где $z \in C$, $h(z)$ — многочлен степени меньше ρ, m — некоторое неотрицательное целое число, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{n^p(2^k)}{2^{k\rho p}} < +\infty$.

Теорема II. Пусть $\rho \in N$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

a) $f \in N_\rho^p(C)$;

b) f допускает следующее представление

$$f(z) = z^m \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{\rho}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)\exp(h(z)),$$

где $z \in C$, $h(z)$ — многочлен степени меньше, чем ρ, $m \in Z$, $m \geqslant 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{n^p(2^k)}{2^{k\rho p}} < +\infty$, $\delta_f(r) = \left|\sum\limits_{|z_k|\leqslant r}\frac{1}{z_k^{\rho}}\right|$ удовлетворяет условию $\int\limits_1^{+\infty}\frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} < +\infty$.

Доказательство Теоремы I.

Покажем, что из пункта a) следует b). Предположим, что $f \in N_\rho^p(C)$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - множество корней f. Получаем, что по теореме 1: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{n^p(2^k)}{2^{k\rho p}} < +\infty$. Из неё же следует сходимость бесконечного произведения $E_q(z,z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)$ при $\rho - 1 < q < \rho$ и его принадлежность классу $N_\rho^p(C)$.

Тогда $g(z) = \frac{f(z)}{E_q(z,z_k)}$, $z \in C$, принадлежит $H(C)$, при этом $g(z) \neq 0$, $z \in C$.

Покажем, что $g(z) = \exp(h(z))$, причём $h(z)$ — многочлен степени m, $m < \rho$. Докажем, что $g \in N_\rho^p(C)$.

Согласно равенству $\ln|g(z)| = \ln|f(z)| - \ln|E_q(z,z_k)|$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^-\left|E_q\left(re^{i\varphi},z_k\right)\right|d\varphi,$$

где $\ln^-|a| = \max(0, -\ln|a|)$, $a \in C$.

С учётом равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\left|E_q\left(re^{i\varphi},z_k\right)\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|E_q\left(re^{i\varphi},z_k\right)\right|d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^-\left|E_q\left(re^{i\varphi},z_k\right)\right|d\varphi$$

воспользуемся равенством Иенсена:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^-\left|E_q\left(re^{i\varphi},z_k\right)\right|d\varphi+\int\limits_{0}^{r}\frac{n\left(t\right)}{t}dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|E_q\left(re^{i\varphi},z_k\right)\right|d\varphi\leqslant\ln M\left(r,E_q\right).$$

Из последних оценок вытекает: $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\leqslant C\ln M(r,E_q)+\ln M(r,f)$.

Для произвольных $0<r<R$ получим: $\ln M(r,g)\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R+r}{R-r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|g\left(Re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi$.

Пусть $R=2r$, тогда согласно оценке $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\leqslant C\ln M(r,E_q)+\ln M(r,f)$ имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(r,g))^p}{r^{p\rho+1}}dr\leqslant C_1\left(\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(2r,E_q))^p}{r^{p\rho+1}}dr+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(2r,f))^p}{r^{p\rho+1}}dr\right)=$$

$$=C_2\left(\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(r,E_q))^p}{r^{p\rho+1}}dr+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(r,f))^p}{r^{p\rho+1}}dr\right)<+\infty,$$

т. е. $g\in N^p_\rho\left(C\right)$, при этом $g\left(z\right)\neq0$, $z\in C$.

Тогда $g(z)=\exp\left(h\left(z\right)\right)$, $h\left(z\right)$ — целая функция. Пусть $u(z)=Reh\left(z\right)$, $z\in C$. Не ограничивая общности, предположим: $u(z)\geqslant1$.

Из того, что функция g принадлежит классу $N^p_\rho\left(C\right)$, получаем $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\left(\ln\widetilde{M}(r,u)\right)^p}{r^{p\rho+1}}dr<+\infty$, где $\widetilde{M}(r,u)=\max\left(u,0\right)$. По теореме о среднем и, исходя из предыдущих рассуждений, имеем: $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(r,u))^p}{r^{p\rho+1}}dr<+\infty$. Согласно монотонности функции $\ln M(r,u)$ и тому, что последний интеграл сходится, получаем $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{M(R,u)}{R^{\rho p}}=0$. Применяя формулу Шварца, получим: $h\left(z\right)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kz^k$, где $k<\rho p$. Причём $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{(\ln M(r,h))^p}{r^{p\rho+1}}dr<+\infty$. Учитывая, что $M(r,h)\approx\left|h_m\right|r^m$, имеем: $m<\rho$.

Обратное утверждение очевидно. Теорема I доказана.

Доказательство Теоремы II основано на применении теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boas, R. P. Entire functions / R.P. Boas. — New York : Acad. Press, Ink., 1989.

2. Шамоян, Ф. А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций / Ф. А. Шамоян // Сибирский матем. журнал. — 1999. — Т. 40, № 6. — С. 1422–1440.

3. Шамоян, Ф. А. Введение в теорию весовых Lp-классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко. — Брянск : Группа компаний “Десяточка”, 2009.

4. Охлупина, О. В. Обобщение одной теоремы Валирона на случай целых функций / О. В. Охлупина // Вестник Брянского государственного университета: Педагогика. Психология. История. Право. Литературоведение. Языкознание. Экономика. Точные и естественные науки. — 2015. — № 3(26). — С. 400–408.

5. Охлупина, О. В. Обобщение одной теоремы Валирона на случай субгармонических функций / О. В. Охлупина // Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки. — 2012. — № 4(2). — С. 34–44.

6. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. — М. : Мир, 1973. — 342 с.

REFERENCES

1. Boas R.P. Entire functions. New York, Acad. Press, Ink., 1989.

2. Shamojan F.A. Parametric representation and description of the root sets of the weight classes of holomorphic in the circle functions. [Shamojan F.A. Parametricheskoe predstavlenie i opisanie kornevyh mnozhestv vesovyh klassov golomorfnyh v kruge funkcij]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1999, vol. 40, no. 6, pp. 1422–1440.

3. Shamoyan F.A., Shubabko E.N. Introduction to the theory of weighted Lp-classes of meromorphic functions. [Shamoyan F.A., Shubabko E.N. Vvedenie v teoriyu vesovyh Lp-klassov meromorfnyh funkcij]. Bryansk, 2009.

4. Ohlupina O.V. Generalization of a theorem of Valiron on the case of entire functions. [Ohlupina O.V. Obobshchenie odnoj teoremy Valirona na sluchaj celyh funkcij]. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta: Pedagogika. Psihologiya. Istoriya. Pravo. Literaturovedenie. YAzykoznanie. Ekonomika. Tochnye i estestvennye nauki — Bryansk State University Bulletin: Pedagogy. Psychology. History. Right. Literary criticism. Linguistics. Economy. Exact and natural sciences*, 2015, no. 3 (26), pp. 400–408.

5. Ohlupina O.V. Generalization of a theorem of Valiron on the case of subharmonic functions. [Ohlupina O.V. Obobshchenie odnoj teoremy Valirona na sluchaj subgarmonicheskih funkcij]. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta: Tochnye i estestvennye nauki — Bryansk State University Bulletin: Exact and Natural Sciences*, 2012, no. 4(2), pp. 34–44.

6. Stejn I. Singular integrals and differential properties of functions. [Stejn I. Singuljarnye integraly i differencial'nye svojstva funkcij]. Moscow: Mir, 1973, 342 p.

Охлупина Ольга Валентиновна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Математика", Брянский государственный инженерно-технологический университет, Брянск, Россия
E-mail: helga131081@yandex.ru

Okhlupina Olga Valentinovna, Candidate Sc. (Physics and Mathematics), associate Professor of the Department "Mathematics", Bryansk state engineering-technological University, Bryansk, Russia
E-mail: helga131081@yandex.ru