УДК 517.977.52

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

К. Б. Мансимов, М. У. Чырахова

Бакинский государственный университет;
Институт систем управления НАН Азербайджана

Поступила в редакцию 08.12.2019 г.

Аннотация. В предлагаемой работе рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая разностными аналогами интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра и интегрального уравнения типа Вольтерра соответственно. При предположении выпуклости множеств допустимых скоростей рассматриваемых систем уравнений доказан аналог дискретного принципа максимума Понтрягина. В случае выпуклости областей управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного (дифференциального) условия максимума.

Ключевые слова: разностное уравнение Вольтерра, специальное приращение функционала качества, дискретный принцип максимума, линеаризованный принцип максимума.

K. B. Mansimov, M. U. Chyrakhova

Abstract. In this paper, we consider one stepwise optimal control problem described by difference analogs of Volterra type integro-differential equation and Volterra type integral equation, respectively. Under the assumption that the sets of admissible velocities of the considered systems of equations are convex, discrete Pontryagin maximum principle analog is proved. In the case of convexity of the control domains, the necessary optimality condition is proved in the form of a linearized (differential) maximum condition.

Keywords: NECESSARY OPTIMAL CONDITIONS IN ONE DISCRETE STEP CONTROL PROBLEM.

ВВЕДЕНИЕ

Многие реальные процессы описываются интегральными уравнениями и их разностными аналогами (см., напр., [1–5]). В работах [6, 7] изучен ряд задач оптимального управления, описываемые разностными уравнениями типа Вольтерра, представляющий собой аналог интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра.

Предлагаемая работа посвящена установлению необходимых условий оптимальности в одной дискретной задаче управления, описываемой различными разностными уравнениями типа Вольтерра в разных областях фазового пространства. Такие задачи оптимального управления называются также ступенчатыми задачами оптимального управления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $U \subset R^r$ и $V \subset R^q$ заданные непустые и ограниченные множества, t_0, t_1, t_2 — заданные точки, причем разности $t_1 - t_0$ и $t_2 - t_1$ — есть натуральные числа.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой разностных уравнений типа Вольтерра:

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau)), \quad t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1\}, \tag{1}$$

$$y(t+1) = \sum_{\tau=t_1}^{t} g(t,\tau,y(\tau),u(\tau)), \quad t \in T_2 = \{t_1, t_1+1, \dots, t_2-1\}, \tag{2}$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)). \tag{3}$$

Здесь $f(t,\tau,x,u)$, $g(t,\tau,y,u)$ — заданные n и m–мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по x и y соответственно, $G(x)$ — заданная непрерывно дифференцируемая m–мерная вектор-функция, $u(t)$, $v(t)$ — r и q–мерные соответственно дискретные управляющие функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \tag{4}$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \tag{5}$$

Пару $(u^0(t), v^0(t))$, удовлетворяющую вышеприведенным ограничениям, назовем допустимым управлением.

На решениях системы уравнений (1)-(3) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим терминального типа функционал вида

$$S(u,v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)). \tag{6}$$

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Требуется найти минимальное значение функционала (6) при ограничениях (1)–(4).

Допустимое управление $(u^0(t), v^0(t))$ доставляющее минимальное значение функционалу (6), при ограничениях (1)–(4), назовем оптимальным управлением.

СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

Пусть $(u^0(t), v^0(t))$ фиксированное допустимое управление, а $(x^0(t), y^0(t))$ соответствующее ему решение системы (1)–(3).

Предположим, что множества

$$f(t,\tau,x^0(t),U) = \{\alpha : \alpha = f(t,\tau,x^0(\tau),u(\tau)),\ u(\tau) \in U, \tau \in T_1\}, \tag{7}$$

$$g(t,\tau,y^0(t),V) = \{\beta : \beta = g(t,\tau,y^0(\tau),v(\tau)),\ v(\tau) \in V, \tau \in T_2\} \tag{8}$$

при всех (t,τ) выпуклы. Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ — произвольное число, а $u(t,\varepsilon)$ такое допустимое управление, что

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau,\varepsilon),u(\tau,\varepsilon)) \equiv (1-\varepsilon) \sum_{\tau=t_0}^{t} \left(f(t,\tau,x(\tau,\varepsilon),u^0(\tau)) + \varepsilon f(t,\tau,x(\tau,\varepsilon),u(\tau)) \right), \tag{9}$$

$$y(t+1,\varepsilon) = \sum_{\tau=t_1}^{t} g(t,\tau,x(\tau,\varepsilon),v(\tau)), \tag{10}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = G(x(t,\varepsilon)), \tag{11}$$

где $u(t) \in U$, $t \in T_1$ — произвольный вектор.

Это возможно в силу выпуклости множества (7).

Введем обозначения

$$a(t) = \left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \tag{12}$$

$$b(t) = \left.\frac{\partial y(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{13}$$

Принимая во внимание (9), (10) в силу условий гладкости наложенные на правые части уравнений (1), (2) получим, что $a(t)$ и $b(t)$ являются решениями следующих уравнений в вариаций:

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t} f_x(t,\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))a(\tau) + \left(f(\tau,\tau,x^0(\tau),u(\tau)) - f(t,\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))\right), \tag{14}$$

$$b(t+1) = \sum_{t=t_1}^{t} g_y(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau))b(\tau), \tag{15}$$

$$y(t_1) = G_x(x^0(t_1)). \tag{16}$$

Используя формулу Тейлора перейдем к вычислению специального приращения критерия качества соответствующее допустимым управлениям $(u(t,\varepsilon),v^0(t))$ и $(u^0(t),v^0(t))$.

Имеем

$$S(u(t,\varepsilon),v^0(t)) - S(u^0(t),v^0(t)) = \left(\varphi_1(x(t_1,\varepsilon)) + \varphi_1(x^0(t_1))\right) + \left(\varphi_2(y(t_2,\varepsilon)) - \varphi_2(y^0(t_2))\right) = \\ = \varepsilon\frac{\partial\varphi_1'(x^0(t_1)))}{\partial x}a(t_1) + \varepsilon\frac{\partial\varphi_2'(y^0(t_2)))}{\partial y}b(t_2) + o(\varepsilon). \tag{17}$$

Пусть $\psi^0(t)$, $p^0(t)$ пока произвольные n и m-мерные вектор-функции. Из (14), (15) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\psi^{0\prime}(t)a(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi^{0\prime}(t)\left(f_x\left(t,\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)a(\tau) + \right. \\ \left. + \left(f\left(t,\tau,x^0(\tau),u(\tau)\right) - f\left(t,\tau,x^0(\tau),u^0(\tau)\right)\right)\right), \tag{18}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t)b(t+1) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{\tau=t_1}^{t}p^{0\prime}(t)g_y(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau))b(\tau). \tag{19}$$

Легко доказать, что

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t)b(t+1) = p^{0\prime}(t_2-1)b(t_2) - p^{0\prime}(t_1-1)b(t_1) + \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t-1)b(t) = \\ = p^{0\prime}(t_2-1)b(t_2) - p^{0\prime}(t_1-1)G_x(x^0(t_1))a(t_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t-1)b(t). \tag{20}$$

Учитывая тождества (18)–(20) и применяя дискретный аналог формулы Фубини (см., напр., [1–4]), специальное приращение функционала качества (6) представляется в виде

$$\Delta_u S_\varepsilon(u^0,v^0) = \varepsilon\frac{\partial\varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x}a(t_1) + \varepsilon\frac{\partial\varphi_2'(y^0(t_2))}{\partial y}b(t_2) +$$

$$+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\psi^{0\prime}(t)a(t)-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi^{0\prime}(\tau)(f_x(\tau,t,x^0(t),u^0(t))a(t)+(f(\tau,t,x^0(t),u(t))-f(\tau,t,x^0(t),u^0(t))))+$$
$$+\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t-1)b(t)+\varepsilon p^{0\prime}(t_2-1)b(t_2)-\varepsilon G_x(x^0(t_1))a(t_1)-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(\tau)g_y(\tau,t,y^0(t),v^0(t))b(t)+o(\varepsilon). \quad (21)$$

Ясно, что

$$a(t_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1}[f_x(t_1,t,x^0(t),u^0(t))a(t)+(f(t_1,t,x^0(t),u(t))-f(t_1,t,x^0(t),u^0(t)))].$$

Поэтому формула приращения (21) примет вид

$$\Delta_u S_\varepsilon(u^0,v^0)=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x}[(f_x(t_1,t,x^0(t),u^0(t))a(t)+$$
$$+(f(t_1,t,x^0(t),u(t))-f(t_1,t,x^0(t),u^0(t)))]+\varepsilon\frac{\partial\varphi_2'(y^0(t_2))}{\partial y}b(t_2)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\psi^{0\prime}(t)a(t)-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi^{0\prime}(\tau)(f_x(\tau,t,x^0(t),u^0(t))a(t)+(f(\tau,t,x^0(t),u(t))-f(\tau,t,x^0(t),u^0(t)))\right]+$$
$$+\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t-1)b(t)+\varepsilon p^{0\prime}(t_2-1)b(t_2)-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}G_x(x^0(t_1))[(f_x(t_1,t,x^0(t),u^0(t))a(t)+$$
$$+(f(t_1,t,x^0(t),u(t))-f(t_1,t,x^0(t),u^0(t)))]-\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(\tau)g(\tau,t,y^0(t),v^0(t))b(t)+o(\varepsilon). \quad (22)$$

Группируя подобные члены из (22) будем иметь

$$\Delta_u S_\varepsilon(u^0,v^0)=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\psi^{0\prime}(t)+\frac{\partial\varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x}f_x(t_1,t,x^0(t),u^0(t))-\right.$$
$$\left.-G_x(x^0(t_1))f_x(t_1,t,x^0(t),u^0(t))-\varepsilon\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi^{0\prime}(\tau)f(\tau,t,x^0(t),u(t))\right]a(t)+$$
$$+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,x^0(t),u(t))-f(t_1,t,x^0(t),u^0(t))]-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi^{0\prime}(\tau)[f(\tau,t,x^0(t),u(t))-f(\tau,t,x^0(t),u^0(t))]-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}G_x(x^0(t_1))(f(t_1,t,x^0(t),u^0(t))-$$
$$-f(\tau,t,x^0(t),u^0(t)))+\varepsilon\frac{\partial\varphi_2'(y^0(t_2))}{\partial y}b(t_2)+\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(t-1)b(t)+\varepsilon p^{0\prime}(t_2-1)b(t_2)-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}p^{0\prime}(\tau)g_y(\tau,t,y^0(t),v^0(t))b(t)+o(\varepsilon). \quad (23)$$

Введем обозначения

$$H(t,x,u,\psi^0)=\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi^{0\prime}(\tau)f(\tau,t,x(t),u(t))-$$

$$-\frac{\partial\varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x}f(t_1,t,x(t),u(t))+G_x(x^0(t_1))f(t_1,t,x(t),u(t)),$$

$$N(t,y,v,p^0)=\sum_{\tau=t}^{t_1-1}p^{0\prime}(\tau)g(\tau,t,y(t),v(t)),$$

и предположим, что $\psi^0(t)$ и $p^0(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\psi^0(t)=H_x(t,x^0(t),u^0(t),\psi^0(t)),$$

$$p^0(t-1)=M_y(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t)),$$

$$p^0(t_2-1)=-\frac{\partial\varphi_2(y^0(t_2))}{\partial y}.$$

Тогда формула приращения (23) примет вид

$$\Delta_u S_\varepsilon(u^0,v^0)=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}(H(t,x^0(t),u(t),\psi^0(t))-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi^0(t)))+o(\varepsilon).$$

Теперь возмущенное управление определим в виде

$$y(t+1,\mu)=\sum_{\tau=t_1}^{t}g(t,\tau,y^0(\tau,\mu),v^0(\tau,\mu))\equiv$$
$$\equiv(1-\mu)\sum_{\tau=t_1}^{t}g(t,\tau,y(\tau,\mu),v^0(\tau))+\mu\sum_{\tau=t_1}^{t}g(t,\tau,y(\tau,\mu),v(\tau)),\quad(24)$$

где $\mu\in[0,1]$ — произвольное число, а $v(\tau)\in V$, $t\in T_2$ — произвольное допустимое управление.

Положим по определению

$$c(t)=\left.\frac{\partial y(t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$$

Тогда нетрудно доказать, что $c(t)$ является решением следующей системы уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}&c(t+1)=\sum_{\tau=t_1}^{t}[g_y(t,\tau,y(\tau),v^0(\tau))c(\tau)+g(t,\tau,y^0(\tau),v(\tau))-g(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau))],\\&c(t_1)=0.\end{aligned}\quad(25)$$

С помощью (25) аналогично доказательству разложения (24) доказывается, что специальное разложение $\Delta_v S_\mu(u_0,v_0)$ функционала (6) имеет вид

$$\Delta_v S_\mu(u^0,v^0)=-\mu\sum_{t=t_0}^{t_1-1}(M(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t))-M(t,y^0(t),v(t),p^0(t)))+o(\mu).\quad(26)$$

Из разложений (24), (26) непосредственно следует справедливость утверждения

Теорема 1. Если множества (7), (8) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u^0(t),v^0(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}(H(t,x^0(t),u(t),\psi^0(t))-H(t,x^0(t),u^0(t),\psi^0(t)))\leqslant 0,\quad(27)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}(M(t,y^0(t),v(t),p^0(t))-M(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t)))\leqslant 0, \tag{28}$$

выполнялись для всех $u(t)\in U$, $t\in T_1$, $v(t)\in V$, $T\in T_2$ соответственно.

Пара неравенств (27), (28) представляет собой аналог дискретного принципа максимума [8].

АНАЛОГ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УСЛОВИЯ МАКСИМУМА

Предположим, что вектор-функция $f(t,\tau,x,u)$ $(g(t,\tau,y,v))$ в задаче (1)–(6) имеет непрерывную производную по (x,u) $((y,v))$, а множества U и V выпуклые. Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ — произвольное число, а $u(t)\in U$, $t\in T$ произвольное допустимое управление.

Через $u(t,\varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление, такое, что $x(t,\varepsilon)$ является решением уравнения

$$x(t+1,\varepsilon)=\sum_{\tau=t_0}^{t}f(t,\tau,x(\tau,\varepsilon),u(\tau,\varepsilon))\equiv\sum_{\tau=t_0}^{t}f(t,\tau,x(\tau,\varepsilon),(1-\varepsilon)u^o(t)+\varepsilon u(\tau)). \tag{29}$$

При этом, возмущенное уравнение для $y(t,\varepsilon)$ будет иметь вид

$$y(t+1,\varepsilon)=\sum_{\tau=t_1}^{t}g(t,\tau,y(\tau,\varepsilon),v^0(\tau)), \tag{30}$$

$$y(t_1,\varepsilon)=G(x(t_1,\varepsilon)). \tag{31}$$

Пусть

$$\alpha(t)=\left.\frac{\partial z(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$
$$\beta(t)=\left.\frac{\partial y(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

В силу условий гладкости, наложенные на правые части уравнений (1), (2) из (29)–(31) получаем, что $(\alpha(t),\beta(t))$ является решением системы уравнений в вариациях

$$\alpha(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}[f_x(t,\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))\alpha(\tau)+f_u(t,\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))(u(\tau)-u^0(\tau))], \tag{32}$$

$$\beta(t+1)=\sum_{\tau=t_1}^{t}g_y(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau))\beta(\tau). \tag{33}$$

$$\beta(t_1)=G_x(x^0(t_1))\alpha(t_1). \tag{34}$$

Используя уравнения в вариациях (32), (33), (34) по аналогии с доказательством разложения (24) доказывается, что

$$\Delta_u S_\varepsilon(u^0,v^0)=S(u^0+\varepsilon(u-u^0),v^0)-S(u^0,v^0)=$$
$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}(H'_u(t,x^0(t),u^0(t),\psi^0(t))(u(t)-u^0(t))+o(\varepsilon). \tag{35}$$

Теперь предположим, что $\mu\in[0,1]$ — произвольное число, а $v(\tau)\in V$, $T\in T_2$ — произвольное допустимое управление.

В этом случае по аналогии с (26) можно доказать, что

$$\Delta_v S_\mu(u^0,v^0)=S(u^0,v^0+\mu(v-v^0))-S(u^0,v^0)=$$

$$= -\mu \sum_{t=t_1}^{t_2-1} (M'_v(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t))(v(t) - v^0(t)) + o(\mu). \quad (36)$$

С помощью разложений (35), (36) доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2 (аналог линеаризованного условия максимума). Если в рассматриваемой задаче множества U и V выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0(t))$ необходимо чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t,x^0(t),u^0(t),\psi^0(t))(u(t) - u^0(t)) \leqslant 0,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_v(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t))(v(t) - v^0(t)) \leqslant 0,$$

выполнялись для всех $v(t) \in V$, $t \in T_2$ и $v(t) \in V$, $t \in T_2$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский, В. Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 4. — С. 42–50.

2. Колмановский, В. Б. О предельной периодичности решений нелокальных систем Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 5. — С. 31–43.

3. Choi, S. K. Existence and boundness of solutions for Volterra discrete equations / S. K. Choi, Y. H. Goo, N. J. Koo //Journal of the Chungeheong mathematical Society. — 2006. — V. 19, № 3. — P. 237–244.

4. Мансимов, К. Б. Оптимизация процессов описываемыых разностными уравнениями типа Вольтерра / К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев. — Lambert Academic Publishing, 2017. — 264 p.

5. Васильева, А. Б. Интегральное уравнения / А. Б. Васильева, А. Н. Тихонов. — М. : МГУ им М.В. Ломоносова, 1989. — 156 с.

6. Масталиев, Р. О. Исследование одного класса дискретных задач оптимального управления / Р. О. Масталиев // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени доктора философии по математике. — Баку. — 21 с.

7. Масталиев Р. О. Особые управления в дискретных системах Вольтерра / Р. О. Масталиев, К. Б. Мансимов // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук. — 2008. — № 1. — С. 44–49.

8. Методы оптимизации / Р. Габасов и др. — Минск : Четыре четверти, 2011. — 272 с.

REFERENCES

1. Kolmanovsky V.B. On the asymptotic properties of solutions of some nonlinear Volterra systems. [Kolmanovskiy V.B. Ob asimptoticheskix svoystvax resheniy nekotoryx nelineynyx sistem Vol'terra]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2000, no. 4, pp. 42–50.

2. Kolmanovsky V.B. On the limiting periodicity of solutions of nonlocal Volterra systems. [Kolmanovsky V.B. O predel'noy periodichnosti resheniy nelokal'nyx sistem Vol'terra]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2001, no. 5, pp. 31–43.

3. Choi S.K., Goo Y.H., Koo N.J. Existence and boundness of solutions for Volterra discrete equations. Journal of the Chungeheong mathematical Society. 2006, vol. 19, no. 3, pp. 237–244.

4. Mansimov K.B., Mastaliev R.O. Optimization of processes described by difference equations of the Volterra type. [Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Optimizatsiya protsessov opisyvayemyx raznostnymi uravneniyami tipa Vol'terra]. Lambert Academic Publishing, 2017, 264 p.

5. Vasilieva A.B., Tikhonov A.N. Integral equations. [Vasilieva A.B., Tikhonov A.N. Integral'noye uravneniya]. Moscow: Moscow State University named after M.V. Lomonosov, 1989, 156 p.

6. Mastaliev R.O. Investigation of one class of discrete optimal control problems. [Mastaliyev R.O. Issledovaniye odnogo klassa diskretnyx zadach optimal'nogo upravleniya]. Avtoref. diss. na soisk. uch. stepeni doktora filosofii po matematike– Avtoref. diss. for Ph.D. in mathematics, Baku, 2011, 21 p.

7. Mastaliev R.O., Mansimov K.B. Special controls in discrete Volterra systems. [Mastaliyev R.O., Mansimov K.B. Osobyye upravleniya v diskretnyx sistemakh Vol'terra]. *Vestnik BGU, ser. fiz.-mat. nauk – Bulletin of BSU, ser. physical-mat. sciences*, 2008, no. 1, pp. 44–49.

8. Gabasov R. et. al. Optimization methods. [Gabasov R. i dr. Metody optimizatsii]. Minsk, 2011, 272 p.

Мансимов К. Б., д.ф.-м.н., проф. зав. кафедрой Математическая кибернетика Бакинского гос. университета, Баку, Азербайджан

Mansimov K. B., Doctor of Philosophy, prof. Head Department of Mathematical Cybernetics of Baku State University, Baku, Azerbaijan

Чырахова М. У., диссертант Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Chyrakhova M. U., candidate of the Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com