УДК 517.9

ОБ УРАВНЕНИИ ФРЕДГОЛЬМА С ВЕСОВЫМ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА*

Л. Н. Ляхов, Н. И. Трусова

Воронежский государственный университет;
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского;
Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина

Поступила в редакцию 10.01.2020 г.

Аннотация. Исследуется весовой частно-интегральный оператор в $\mathbb{R}_n$ в весовом пространстве Лебега $L_p^\gamma(D)$ с мерой интегрирования $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx_i,\ \gamma_i > -1$. Формально определен геометрический смысл и вводится понятие порядка весового частно-интегрального оператора. Получено достаточное условие ограниченности таких операторов в L_p^γ. Доказывается существование и единственность решения весового частно-интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: частный интеграл, порядок частного интеграла, весовой частно-интегральный оператор, весовое анизотропное пространство Лебега, уравнение Фредгольма второго рода.

FREDHOLM EQUATION WITH WEIGHTED PARTIAL-INTEGRAL OPERATOR OF POSITIVE ORDER

L. N. Lyakhov, N. I. Trusova

Abstract. We study the weighted partial integral operator in $\mathbb{R}_n$ in the weighted Lebesgue space $L_p^\gamma(D)$ with the measure of integration $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx_i$, $\gamma_i > -1$. The geometric meaning is formally defined and the concept of the order of a weighted partial integral operator is introduced. A sufficient condition for such operators to be bounded in L_p^γ is obtained. The existence and uniqueness of the solution of the weighted Fredholm partial integral equation of the second kind is proved.

Keywords: partial integral, order of partial integral, weighted partial integral operator, weighted anisotropic Lebesgue space, Fredholm equation of the second kind.

1. ВЕСОВЫЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть $D = \{x : 0 < x_i < b_i\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, α и $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, состоящие из m и $n-m$ различных натуральных чисел, дополняющих друг друга до набора $(1,2,\ldots,n)$, и $D = D_\alpha \times D_{\overline{\alpha}}$, где частные параллелепипеды D_α и $D_{\overline{\alpha}}$ имеют общую вершину в начале координат и прилегают к гиперплоскостям $x_{\overline{\alpha}} = 0$ и $x_\alpha = 0$ соответственно.

Определение. *Выражение*

$$(K_\alpha u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha),\ x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}})\,, \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 19–41–480002).

$$d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)=\prod_{i=1}^{m} t_{\alpha_i}^{\gamma_{\alpha_i}}\,dt_{\alpha_i},\ \gamma_{\alpha_i}>-1\,,\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m),\quad 1\leqslant m<n,$$

будем называть весовым частно-интегральным оператором в $\mathbb{R}_n$.

В отличие от определения классических частно–интегральных операторов (см. [1], [2]), в (1) не включены случаи $\alpha=0$ (K_0 — оператор умножения на функцию) и $\alpha=(1,\ldots,n)$ ($K_{(1,\ldots,n)}$ — интегральный оператор).

Частные интегралы функций от сферической симметрии. Частный интеграл по шару с центром в начале координат от сферически симметричной функции приводит к весовому одномерному частному интегралу со степенным весом:

$$\int\limits_{|x<R|} f(|x|,y)\,dx=|S_1(n)|\int\limits_0^R f(r,y)\,r^{n-1}\,dr,\qquad |S_1(n)|=\int\limits_{|x|=1} dS.$$

Выражение $\int\limits_0^R f(x,y)\,x^\gamma\,dx$ можно понимать как интеграл по шару дробной размерности. Действительно, правосторонний интеграл Римана—Лиувилля

$$I^\alpha_{b-}(\tau)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_\tau^b\frac{f(t)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt\,,\quad \tau<b$$

целого порядка $\alpha=n$, рассматриваемый как определенный интеграл при $\tau=0$, можно представить в виде интеграла по шару в $\mathbb{R}_n$:

$$\Gamma(\alpha)\,I^\alpha_{b-}(0)=\frac{|S_1(n)|}{|S_1(n)|}\int\limits_0^b f(t)\;t^{\alpha-1}\,dt=\frac{1}{|S_1(n)|}\int\limits_{\{x:\,|x|<b\}\in\mathbb{R}_n} f(|x|)\;dx\,. \tag{2}$$

Теперь вместо формулы площади единичной сферы применим формулу „площади нагруженной сферы“[1)]

$$|S_1(n)|_\gamma=2^n\,|S_1^+(n)|_\gamma,$$

где

$$|S_1^+(n)|_\gamma=\int\limits_{S_1^+(n)=\{|\Theta|=1,\ \Theta_i>0\}}\prod_{i=1}^n\Theta_i^{\gamma_i}\,dS=\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\,.$$

Тогда на основе двух равенств $\alpha=n+\gamma=n+1+(\gamma-1)$, где n — целая часть числа α, а дробная часть $\{\alpha\}=\gamma$ представлена в виде $\gamma=\sum\limits_{i=1}^n\gamma_i$, $0\leqslant\gamma_i<1$, получим две формы формулы (1):

$$\Gamma(\alpha)\,I^\alpha_{b-}(0)=\frac{|S_1(n)|_\gamma}{|S_1(n)|_\gamma}\int\limits_0^b f(t)\;t^{\alpha-1}\,dt= \tag{3}$$

$$=\frac{1}{|S_1(n)|_\gamma}\int\limits_{\{|x|<b\}\in\mathbb{R}_n} f(|x|)\;x^\gamma\,dx\,,\quad x^\gamma=\prod_{i=1}^n|x_i|^{\gamma_i}$$

[1)] Эта формула справедлива для произвольных $\gamma_i>-1$ (см. [3], с. 360) и была использована для определения оператора Киприянова-Бельтрами в [4] на сфере дробной размерности.

для $\alpha = n + \gamma$ и

$$\Gamma(\alpha)\, I^{\alpha}_{b-}(0) = \frac{|S_1(n+1)|_{-\beta}}{|S_1(n+1)|_{-\beta}} \int\limits_0^b f(t)\ t^{\alpha-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{|S_1(n+1)|_{-\beta}} \int\limits_{\{|x|<b\}\in\mathbb{R}_{n+1}} f(|x|)\ x^{-\beta}\, dx\,, \qquad x^{-\beta} = \prod_{i=1}^{n+1} |x_i|^{-\beta_i} \tag{4}$$

для $\alpha = n + 1 - \beta$, где $\beta = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$.

Геометрический смысл весового интеграла. *Из* (3) *видим, что определенный интеграл Римана—Лиувилля дробного порядка* α *при* $\gamma \to 0$ *окажется интегралом по шару в* $\mathbb{R}_n$*, а из* (4) *при* $\gamma \to 1$ *— интегралом по шару в* $\mathbb{R}_{n+1}$*. Следовательно, число* $\alpha{=}n{+}\gamma$*, равное порядку определенного дробного интеграла Римана—Лиувилля, оказывается (формально) дробной размерностью шара в евклидовом пространстве. Каждая координатная ось* x_i *— радиальная в неком пространстве точек дробной размерности* $1{+}\gamma_i$, $\gamma_i > -1$.

Выражение (1) представляет собой оператор дробного порядка $|\alpha_m| + m$, а каждая его интегральная переменная может интерпретироваться как радиальная в пространстве точек дробной размерности равной $1{+}\gamma_i > 0$. Отметим, что частно-интегральные операторы, рассматриваемые ранее в [1], [2] при $\gamma = 0$, имеют порядок равный единице.

Весовое пространство Лебега $L^{\gamma}_p(D)$ определено нормой

$$\|f\|_{L^{\gamma}_p(D)} = \left(\int\limits_D |f(x)|^p d\mu_\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad d\mu_\gamma(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i} dx\,,\, \gamma_i > -1.$$

Далее будем полагать $1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 1/p + 1/q = 1$.

Для функций $f \in L^{\gamma}_p(D)$ и $g \in L^{\gamma}_q(D)$ справедливо неравенство Гёльдера

$$\int\limits_D |\, f(x)\, g(x)\, |\, d\mu_\gamma(x)| \leqslant \left(\int\limits_D |f(x)|^p\ d\mu_\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_D |g(x)|^q\, d\mu_\gamma(x) \right)^{\frac{1}{q}} = \tag{5}$$

$$= \|f\|_{L^{\gamma}_p(D)}\, \|g\|_{L^{\gamma}_q(D)}\,.$$

Пусть мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных чисел $\gamma_i{>}{-1}$, и пусть $D_i = (0, b_i)$, $D = D_1 \times \ldots \times D_n$. Следуя [5] (с. 9), введем весовое анизотропное пространство Лебега $L^{\gamma}_{\mathbf{p}}(D)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i \geqslant 1$:

$$u \in L^{\gamma}_{\mathbf{p}}(D_1 \times \ldots \times D_n), \quad \text{если конечна норма} \quad \|u\|_{L^{\gamma}_{\mathbf{p}}(D)} =$$

$$= \left(\int\limits_{D_n} \left(\int\limits_{D_{n-1}} \ldots \left(\int\limits_{D_2} \left[\int\limits_{D_1} |\, u(x)|^{p_1} x_1^{\gamma_1}\, dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots \ldots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} dx_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} x_n^{\gamma_n} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

2. КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРА K_α В L^{γ}_p

Все переменные, входящие в (1), разбиваем на три группы. Первая t_α — переменные интегрирования, вторая x_α — переменные, имеющие номера переменных интегрирования и $x_{\bar{\alpha}}$

— оставшиеся переменные. Каждая из этих групп переменных принадлежит трем параллелепипедам, размерности которых равны m, m и $n-m$ соответственно. Эти области будем обозначать: D_{t_α}, D_{x_α}, $D_{x_{\bar\alpha}}$ и тогда $D = D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar\alpha}}$. Положим $x^\gamma = x_{\bar\alpha}^{\gamma_{\bar\alpha}}\, x_\alpha^{\gamma_\alpha}$.

Достаточные условия (критерий) ограниченности оператора K_α сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. *Оператор K_α при $1 \leqslant m < n$ ограничен в $L_p^\gamma(D)$, если его ядро и функция принадлежат анизотропным лебеговским пространствам соответственно*

$$k_\alpha = k_\alpha(x_\alpha, x_{\bar\alpha}; t_\alpha) \in L_{(q,p,pq)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha,\gamma_{\bar\alpha})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar\alpha}}),$$

$$u = u(x_{\overline{\alpha}}, t_\alpha) \in L_{(p,p^2)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}}).$$

При этом

$$\|K_\alpha^{(m)} u\|_{L_p^\gamma} \leqslant C_\alpha\, \|u\|_{L_{(p,p^2)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_{\overline{\alpha}})}\,(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\bar\alpha}})}, \tag{6}$$

где

$$C_\alpha = \|k_\alpha\|_{L_{(q,p,pq)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha,\gamma_{\bar\alpha})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar\alpha}})}.$$

Схема доказательства этой теоремы аналогична используемой в работах [6], [7], где обычное неравенство Гёльдера надо заменить неравенством (5), и мы не приводим доказательство теоремы 1.

Обозначения областей интегрирования в (6)удобно заменить на более короткие:
$D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\bar\alpha}} = D_{t_\alpha, x_\alpha, x_{\bar\alpha}}$ и $D_{t_\alpha} \times D_{x_{\bar\alpha}} = D_{t_\alpha, x_{\bar\alpha}}$.

В некоторых случаях анизотропные пространства Лебега удобно представлять в виде пространств функций со значениями в банаховых пргостранствах, см. [8] (с. 19). Тогда неравенство (6) примет вид

$$\|K_\alpha u\|_{L_p^\gamma} \leqslant \|k_\alpha\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha}))}\, \|u\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))}\,. \tag{7}$$

2.1. НАТУРАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА K_α. КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ

Имеет место следующий критерий ограниченности оператора K_α^r, $r = 1,2,\ldots$.

Теорема 2. *Пусть*

$$k_\alpha(x; t_\alpha) \in L_{p^r q}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha})), \quad f(x) \in L_{p^{r+1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha})),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда $(K_\alpha^r f)(x) \in L_p^\gamma D)$. При этом

$$\|K_\alpha^r f\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant \prod_{i=1}^{r} \|k_\alpha\|_{L_{p^i q}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha}))} \cdot \|f\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\|K_\alpha^r f\|_{L_p^\gamma(D)} = \left\| \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)(K_\alpha^{r-1} f(x_{\bar\alpha}, t_\alpha))\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \right\|_{L_p^\gamma(D)}.$$

Применив неравенствго (5), получим

$$\|K^r_\alpha f\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \Bigg[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \Bigg[\int\limits_{D_{x_\alpha}} \Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |k_\alpha(x;t_\alpha)|^q \, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \Bigg)^{\frac{p}{q}} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |K^{r-1}_\alpha f(x_{\bar\alpha},t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \Bigg)^{\frac{p}{p}} d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha) \Bigg]^{\frac{p}{p}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \Bigg]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |K^{r-1}_\alpha f(x_{\bar\alpha},t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \Bigg)^{\frac{p}{p}} \times$$

$$\times \Bigg[\int\limits_{D_{x_\alpha}} \Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |k_\alpha(x;t_\alpha)|^q \, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \Bigg)^{\frac{p}{q}} d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha) \Bigg]^{\frac{p}{p}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \Bigg]^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь применим неравенство (5) к внешнему интегралу. Тогда

$$\|K^r_\alpha f\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \Bigg[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |K^{r-1}_\alpha f(x_{\bar\alpha},t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \Bigg)^{\frac{p^2}{p}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \Bigg]^{\frac{1}{p^2}} \times$$

$$\times \Bigg[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \Bigg[\int\limits_{D_{x_\alpha}} \Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |k_\alpha(x;t_\alpha)|^q \, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \Bigg)^{\frac{p}{q}} d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha) \Bigg]^{\frac{pq}{p}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \Bigg]^{\frac{1}{pq}}.$$

Отсюда

$$\|K^r_\alpha f\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|K^{r-1}_\alpha f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha}))}.$$

Применяя поочередно данное неравенство, получим цепочку неравенств

$$\|K^r_\alpha f\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|K^{r-1}_\alpha f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha}))} \leqslant$$

$$\leqslant \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2q}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|K^{r-2}_\alpha f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^3}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha}))} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \prod_{i=1}^{r} \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^iq}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^{r+1}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha}))},$$

т. е. справедливо неравенство (8).

Доказательство закончено.

2.2. ИТЕРИРОВАННОЕ ЯДРО ОПЕРАТОРА K_α

Введем следующую последовательность итерированных ядер оператора K_α. Первая итерация совпадает с самим ядром оператора

$$k^{(1)}_\alpha(x;t_\alpha) = k_\alpha(x;t_\alpha).$$

Вторая итерация — это действие оператора K_α на ядро $k_\alpha^{(1)}$:

$$k_\alpha^{(2)}(x;t_\alpha)=\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} k_\alpha(x;\tau_\alpha)k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\bar\alpha};t_\alpha)\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha).$$

r-Итерация имеет вид

$$k_\alpha^{(r)}(x;t_\alpha)=\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} k_\alpha^{(r-1)}(x;\tau_\alpha)k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\bar\alpha};t_\alpha)\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)$$

и называется r-итерированным ядром оператора K_α.

Для оператора K_α^r, воспользовавшись оценками (7), получим следующее неравенство

$$\|K_\alpha^r u\|_{L_p^\gamma}\leqslant\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))}\|u\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}};L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))}\,. \tag{9}$$

Теорема 3. r-Итерированное ядро оператора K_α^r удовлетворяет неравенству

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\|k_\alpha\|_{L_{pq^r}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)}\prod_{i=1}^{r-1}\|k_\alpha\|_{L_{p^2q^i}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению r-итерированного ядра имеем

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)}=$$

$$=\Bigg\|\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} k_\alpha^{(r-1)}(x;\tau_\alpha)k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\bar\alpha};t_\alpha)\ \,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)\Bigg\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)}.$$

Применяя неравенство (5), получим

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)}\leqslant\Bigg\|\Bigg(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}}|k_\alpha^{(r-1)}(x;\tau_\alpha)|^q\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)\Bigg)^{\frac1q}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}}|k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\bar\alpha};t_\alpha)|^p\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)\Bigg)^{\frac1p}\Bigg\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)}=$$

$$=\Bigg[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}}\Bigg[\int\limits_{D_{x_\alpha}}\Bigg(\int\limits_{D_{t_\alpha}}\Bigg(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}}|k_\alpha^{(r-1)}(x;\tau_\alpha)|^q\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)\Bigg)^{\frac qq}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}}|k_\alpha(\tau_\alpha,x_{\bar\alpha};t_\alpha)|^p\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)\Bigg)^{\frac qp}d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)\Bigg)^{\frac pq}d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha)\Bigg]^{\frac{pq}{p}}d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}(x_{\bar\alpha})}\Bigg]^{\frac1{pq}}.$$

Подынтегральную функцию $\int\limits_{D_{\tau_\alpha}}|k_\alpha^{(r-1)}(x;\tau_\alpha)|^q\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)$ можно вынести за знак интеграла по переменной t_α, следовательно

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)}\leqslant\Bigg[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}}\Bigg[\int\limits_{D_{x_\alpha}}\Bigg(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}}|k_\alpha^{(r-1)}(x;\tau_\alpha)|^q\,d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha)\Bigg)^{\frac pq}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{D_{t_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} |k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\bar\alpha}; t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha) \Bigg]^{\frac{pq}{p}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \Bigg]^{\frac{1}{pq}}.$$

Функция $\left(\int\limits_{D_{t_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} |k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\bar\alpha}; t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \right)^{\frac{p}{q}}$ не зависит от x_α, поэтому

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha})\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \left[\int\limits_{D_{x_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} |k_\alpha^{(r-1)}(x; \tau_\alpha)|^q \, d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha) \right]^{\frac{pq}{p}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{D_{t_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} |k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\bar\alpha}; t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \right]^{\frac{pq}{q}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \right]^{\frac{1}{pq}}.$$

Снова применим неравенством (5) с теми же показателями p и q. Предыдущее неравенство примет вид

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha})\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \left[\int\limits_{D_{x_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} |k_\alpha^{(r-1)}(x; \tau_\alpha)|^q \, d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) \right)^{\frac{p}{q}} d\mu_{\gamma_\alpha}(x_\alpha) \right]^{\frac{pq^2}{p}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \right]^{\frac{1}{pq^2}} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{D_{x_{\bar\alpha}}} \left[\int\limits_{D_{t_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{\tau_\alpha}} |k_\alpha(\tau_\alpha, x_{\bar\alpha}; t_\alpha)|^p \, d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) \right)^{\frac{q}{p}} d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \right]^{\frac{p^2 q}{q}} d\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(x_{\bar\alpha}) \right]^{\frac{1}{p^2 q}}.$$

Отсюда

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha})\right)} \leqslant \|k_\alpha^{(r-1)}\|_{L_{pq^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, x_\alpha})\right)} \|k_\alpha\|_{L_{p^2 q}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, t_\alpha})\right)}. \tag{11}$$

Таким образом, норма r-итерированного ядра оценивается через $(r-1)$-итерированное ядро. В неравенстве (11) заменив r на $r-1$ и пространство $L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}$ на пространство $L_{pq^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}$, получим

$$\|k_\alpha^{(r-1)}\|_{L_{pq^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, x_\alpha})\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \|k_\alpha^{(r-2)}\|_{L_{pq^3}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, x_\alpha})\right)} \|k_\alpha\|_{L_{p^2 q^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, t_\alpha})\right)}.$$

Аналогично продолжая оценки для $r-2$, $r-3$ и т.д. итерированных ядер, в конце придем к следующей оценке ядра $k_\alpha^{(2)}(x; \tau_\alpha)$:

$$\|k_\alpha^{(2)}\|_{L_{pq^{r-1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha, x_\alpha})\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \|k_\alpha\|_{L_{pq^r}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, x_\alpha})\right)} \|k_\alpha\|_{L_{p^2 q^{r-1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha, t_\alpha})\right)}.$$

Как видим, полученные оценки совпадают с (10).

Доказательство закончено.

Следствие. *Пусть*

$$k_\alpha \in \left\{ L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq^r}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right) \ \cap\ L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2q^{r-1}}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)\right\},$$

тогда

$$\|K^r_\alpha u\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant$$

$$\leqslant \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq^r}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)} \prod_{i=1}^{r-1} \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2q^i}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)} \|u\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha})\right)}. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как оператор K^r_α отвечает r-итерированному ядру $k^{(r)}_\alpha$, то воспользовавшись неравенствами (9) и (10), получим (12).

Доказательство закончено.

3. ВЕСОВОЕ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА

3.1. РЕЗОЛЬВЕНТА ЯДРА k_α

Правая часть неравенства (12) содержит произведение r множителей: первый принадлежит анизотропному пространстве $L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq^r}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)$, а второй — $L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2q^i}\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)$, $i = 1,\ldots,r-1$. Как видим при неограниченном росте r мы вынуждено придем к существенно ограниченным функциям по соответствующим переменным. Т. е. необходимо потребовать принадлежности ядра k_α пространствам вида $L^{\gamma_\alpha}_\infty\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right) \cap L^{\gamma_{\bar\alpha}}_\infty\left(D_{x_{\bar\alpha}}; L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)$.

Известно, что пространство $L_k(D)$ вложено в $L_s(D)$, если область D конечна и $k > s$, то есть справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_s(D)} \leqslant [\mu(D)]^{\frac{1}{s}-\frac{1}{k}} \|u\|_{L_k(D)}$$

(см. [9], «Вложение функциональных пространств», Л.П. Купцов, стр. 123, или [10], стр. 72). В случае весовых L^γ_p - норм мы имеем неравенство вида

$$\|u\|_{L^\gamma_s(D)} \leqslant [\mu_\gamma(D)]^{\frac{1}{s}-\frac{1}{k}} \|u\|_{L^\gamma_k(D)}, \ \mu_\gamma(D) = \int\limits_D x^\gamma dx.$$

Следовательно,

$$\|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq^r}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)} \leqslant A_\alpha \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_\infty\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)},$$

$$\|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2q^i}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)} \leqslant A_\alpha \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_\infty\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)},$$

где константа A_α зависит от области интегрирования и равна

$$A_\alpha = \sup_{1\leqslant i\leqslant r-1} \left\{ (\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}))^{\frac{1}{p^2q^i}}, (\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}))^{\frac{1}{pq^r}} \right\}.$$

Введем обозначение

$$S_\alpha = \max\left\{ \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_\infty\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)}, \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_\infty\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)} \right\},$$

тогда неравенство (10) примет вид

$$\|k_\alpha^{(r)}\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha})\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \|k_\alpha\|_{L_{pq^r}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)} \prod_{i=1}^{r-1} \|k_\alpha\|_{L_{p^2q^i}^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)} \leqslant A_\alpha^r S_\alpha^r.$$

Пусть функция $V_r(x_{\bar\alpha})$ определена следующим образом

$$V_r(x_{\bar\alpha}) = \|k_\alpha^{(r)}(x_{\bar\alpha})\|_{L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})}.$$

Рассмотрим ряд

$$V(x_{\bar\alpha};\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r\ V_{r+1}(x_{\bar\alpha}). \tag{13}$$

Если λ выбрано так, что $|\lambda|\,A_\alpha\,S_\alpha < 1$, то ряд (13) сходится абсолютно и равномерно и является регулярным.

Резольвентой ядра $k_\alpha(x;t_\alpha)$ оператора K_α называется функция

$$r_\alpha(x;t_\alpha;\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r\ k_\alpha^{(r+1)}(x;t_\alpha) \in L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right).$$

3.2. ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ОПЕРАТОРОМ K_α

При решении уравнений методом последовательных приближений возникнет необходимость в бесконечных итерациях ядер весовых частно-интегральных операторов. Это приводит к требованию принадлежности ядра по соответствующим переменным пространству существенно ограниченных функций.

Известно (см., например монографию С.М. Никольского [11], с. 13), что если функция f существенно ограничена на ограниченном измеримом множестве D, то существует конечный предел

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(D)}.$$

Соответствующий класс функций обозначается $L_\infty(D)$.

Через $L_\infty^\gamma(D)$ будем обозначать множество существенно ограниченных функций вида $\varphi = x^{\gamma/p} f(x)$, $x_i^{\gamma_i} > -1$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p^\gamma(D)}.$$

Пространство таких функций обозначим $L_\infty^\gamma(D)$.

Частно-интегральным уравнением Фредгольма второго рода с весовыми частно-интегральными операторами (1) называется уравнение

$$\varphi(x) = \lambda K_\alpha \varphi(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}_n. \tag{14}$$

Такое уравнение с непрерывными ядрами в пространстве непрерывных функций в $\mathbb{R}_2$ изучалось в [1], [2].

Решение уравнения (14) ищем методом последовательных приближений. Вначале за нулевое приближение примем $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$. Подставив нулевое приближение в уравнение (14), определим $\varphi^{(1)}(x)$:

$$\varphi^{(1)}(x) = f(x) + \lambda(K_\alpha\varphi^{(0)})(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x;t_\alpha)\varphi^{(0)}(x_{\bar\alpha},t_\alpha)d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha^{(1)}(x;t_\alpha) f(x_{\bar\alpha},t_\alpha) d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)\,.$$

Выразим $\varphi^{(2)}(x)$ через первое приближение $\varphi^{(1)}(x)$:

$$\varphi^{(2)}(x) = f(x) + \lambda (K_\alpha \varphi^{(1)})(x) =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_{D_{\tau_\alpha}} k_\alpha(x;\tau_\alpha) \left[f(x_{\bar\alpha},\tau_\alpha) + \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha^{(1)}(\tau_\alpha,x_{\bar\alpha};t_\alpha) f(x_{\bar\alpha},t_\alpha) d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) \right] d\mu_{\gamma_\alpha}(\tau_\alpha) =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x;t_\alpha) f(x_{\bar\alpha},t_\alpha) d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) + \lambda^2 \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha^{(2)}(x;t_\alpha) f(x_{\bar\alpha},t_\alpha) d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha).$$

Аналогично устанавливается ν-е приближение $\varphi^{(\nu)}(x)$:

$$\varphi^{(\nu)}(x) = f(x) + \lambda (K_\alpha \varphi^{(\nu-1)})(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x;t_\alpha) \varphi^{(\nu-1)}(x_{\bar\alpha},t_\alpha) d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha).$$

Функцию $\varphi^{(\nu)}(x)$ можно представить в виде конечной суммы

$$\varphi^{(\nu)}(x) = \sum_{r=0}^{\nu} \lambda^r (K_\alpha^{(r)} f)(x), \tag{15}$$

где $(K_\alpha^r f)(x)$ определяется равенством (1).

Таким образом, естественно ожидать, что мы получим решение уравнения (14) в виде ряда Неймана

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \left(K_\alpha^r f\right)(x)\,. \tag{16}$$

Пусть

$$M_\alpha = \sup_{1\leqslant i\leqslant r-1} \left\{ (\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}))^{\frac{1}{p^2 q^i}}, (\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}))^{\frac{1}{pq^r}} \right\}_{r=1}^{\infty},$$

$$N_\alpha = \sup_r \left\{ (\mu_{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}))^{\frac{1}{p^r q}} \right\}_{r=1}^{\infty},\ G_\alpha = \max\{M_\alpha, N_\alpha\},$$

$$S_\alpha = \max\left\{ \|k_\alpha\|_{L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)}, \|k_\alpha\|_{L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_{(p,q)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)} \right\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть ядро k_α оператора* (1) *и правая часть неравенства* (8) *удовлетворяют условию:*

$$P_\alpha = \sup\left\{ \|k_\alpha\|_{L_{p^r q}^{\gamma_{x_{\bar\alpha}}}(D_{\bar\alpha};L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \right\}_{r=1}^{\infty} < \infty,$$

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \sup\left\{ \|f\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}};L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} \right\}_{r=1}^{\infty} < \infty,$$

и пусть $|\lambda|\, G_\alpha\, S_\alpha < 1$. Тогда в $L_p^\gamma(D)$ существует предел $\Phi = \lim_{r\to\infty} \Phi_\nu$ функциональной последовательности

$$\Phi_\nu f = \varphi^{(\nu)}(x) = \sum_{i=0}^{\nu} \lambda^i K_\alpha^i f(x)\,.$$

Оператор Φ *действует ограниченно из* $L^{(\gamma_\alpha,\gamma_{\bar\alpha})}_{(p,\infty)}(D)$ *в* $L^\gamma_p(D)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\|\Phi\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \underline{\lim}_{\nu\to\infty} \|\Phi_\nu\|_{L^\gamma_p(D)}. \tag{17}$$

Решение уравнения Фредгольма с весовым частно интегральным-оператором (1) *существует в виде операторного ряда Неймана*

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r K^r_\alpha f\,,$$

причем

$$\|\varphi\|_{L^\gamma_p} \leqslant \frac{\|f\|_{\Lambda_\alpha}}{1-|\lambda| G_\alpha\, S_\alpha}.$$

Это решение единственно.

Доказательство. Покажем, что последовательность (15) является фундаментальной в $L^\gamma_p\,(D)$. Пусть ℓ — произвольное натуральное число. Тогда

$$\|\varphi^{(\nu+\ell)} - \varphi^{(\nu)}\|_{L^\gamma_p(D)} = \left\| \sum_{r=\nu+1}^{\nu+\ell} \lambda^r\, \left(K^r_\alpha f\right)(x) \right\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=\nu+1}^{\nu+\ell} |\lambda|^r\, \|\left(K^r_\alpha f\right)(x)\|_{L^\gamma_p(D)}\,.$$

Используя неравенства (9) и(10), имеем

$$\|\varphi^{(\nu+\ell)} - \varphi^{(\nu)}\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \sum_{r=\nu+1}^{\nu+\ell} |\lambda|^r\, \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{pq^r}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(q,p)}(D_{\tau_\alpha,x_\alpha})\right)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{r-1} \|k_\alpha\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2q^i}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}_{(p,q)}(D_{\tau_\alpha,t_\alpha})\right)} \|f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha})\right)}.$$

Учитывая обозначения введенные для G_α и S_α, получим

$$\|\varphi^{(\nu+\ell)} - \varphi^{(\nu)}\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \|f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha})\right)} \sum_{r=\nu+1}^{\nu+\ell} |\lambda|^r\, G^r_\alpha\, S^r_\alpha =$$

$$= \|f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha})\right)} (|\lambda|\, G_\alpha\, S_\alpha)^\nu\, \sum_{r=1}^{\ell} |\lambda|^r\, G^r_\alpha\, S^r_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha})\right)} (|\lambda|\, G_\alpha\, S_\alpha)^\nu\, \sum_{r=1}^{\infty} |\lambda|^r\, G^r_\alpha\, S^r_\alpha\,.$$

Таким образом

$$\|\varphi^{(\nu+\ell)} - \varphi^{(\nu)}\|_{L^\gamma_p(D)} \leqslant \|f\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^2}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L^{\gamma_\alpha}_p(D_{t_\alpha})\right)} (|\lambda|\, G_\alpha\, S_\alpha)^\nu\, \frac{1}{1-|\lambda|\, G_\alpha\, S_\alpha}.$$

При увеличении ν величина $(|\lambda|\, G_\alpha\, S_\alpha)^\nu$ стремится к нулю. Таким образом, мы показали, что последовательность (15) является фундаментальной в $L^\gamma_p(D)$. Далее покажем, что функция $\varphi \in L^\gamma_p(D)$, определенная рядом (16), будет являтся решением уравнения (14).

Введем оператор

$$\Phi_\nu f=\varphi^{(\nu)}(x)=\sum_{i=0}^{\nu}\lambda^i K_\alpha^i f(x)\,. \tag{18}$$

Положим $\Phi_\infty=\Phi$:

$$\Phi f(x)=\varphi(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r K_\alpha^r f. \tag{19}$$

Из (18), (19) и (8) следует, что

$$\lim_{\nu\to\infty}\|\Phi_\nu f-\Phi f\|_{L_p^\gamma(D)}=\lim_{\nu\to\infty}\left\|\sum_{i=\nu+1}^{\infty}\lambda^i K_\alpha^i f\right\|_{L_p^\gamma(D)}=$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\|\lambda^{\nu+1}K_\alpha^{\nu+1}\sum_{i=0}^{\infty}K_\alpha^i f\right\|_{L_p^\gamma(D)}=\lim_{\nu\to\infty}\left\|\lambda^{\nu+1}K_\alpha^{\nu+1}\varphi\right\|_{L_p^\gamma(D)}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\nu\to\infty}(|\lambda|\,G_\alpha\,S_\alpha)^{\nu+1}\|\varphi\|_{L^{\gamma_{\bar\alpha}}_{p^{\nu+2}}\left(D_{x_{\bar\alpha}};L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha})\right)}\,.$$

Следовательно

$$\lim_{\nu\to\infty}\|\Phi_\nu f-\Phi f\|_{L_p^\gamma(D)}=0\,,$$

т.е. существует сильный предел функциональной последовательности $\Phi_\nu f$, который обозначим $\text{s-}\lim\limits_{\nu\to\infty}\Phi_\nu f=\Phi f$ (см. [12], с. 104, определение).

В силу существования сильного предела, заключаем что предельный оператор $\Phi=\Phi_\infty$ ограничен (см. [12], с. 104, следствие 1 (теорема о резонансе) и следствие 2) и выполняется неравенство (17).

Подставляя в правую часть уравнения (14) функцию $\varphi(x)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\lambda^r\,\left(K_\alpha^r f\right)(x)$, получим

$$\lambda K_\alpha\left(\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\,\left(K_\alpha^r f\right)(x)\right)+f=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda^r\,\left(K_\alpha^r f\right)(x)+f=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\,\left(K_\alpha^r f\right)(x)=\varphi(x)\,.$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ — решение уравнения (14).

Из ограниченности

$$\lim_{\nu\to\infty}\|\Phi_\nu f\|_{L_p^\gamma(D)}=\lim_{\nu\to\infty}\|\varphi^{(\nu)}\|_{L_p^\gamma(D)}\leqslant\frac{\|f\|_{\Lambda_\alpha}}{1-|\lambda|\,G_\alpha S_\alpha}$$

и существования предела

$$\varphi(x)=\lim_{\nu\to\infty}\Phi_\nu f(x)=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\lambda^\nu K_\alpha^\nu\right)f(x)=\Phi f(x)\,,$$

следует ограниченность оператора $\|\Phi\|$ (см.[12], с. 104, следствие 1 (теорема о резонансе)) и выполнение неравенства

$$\|\Phi\|_{L_p^\gamma(D)}\leqslant\varliminf_{\nu\to\infty}\|\Phi_\nu\|_{L_p^\gamma(D)}$$

([12], с. 104, следствие 2) и существует обращающий оператор $\Phi=\lim_{\nu\to\infty}\Phi_\nu$, отображающий $L_p^\gamma(D)$ в $L_p^\gamma(D)$.

Таким образом, функция

$$\varphi = \lim_{\nu\to\infty} \varphi^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{r=0}^{\nu} \lambda^r K_\alpha^r f = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r K_\alpha^r f$$

является решением уравнения (14).

Покажем единственность решения (16), следуя монографии [13] (см. стр. 435).

Пусть $\psi(x) \in L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))$ — любое решение уравнения (14) и пусть $\omega(x)$ разность решений $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, т.е. $\omega(x) = \psi(x) - \varphi(x)$. Докажем, что $\omega(x) \equiv 0$ почти всюду при $|\lambda| G_\alpha S_\alpha < 1$. Подставляя функцию $\psi(x) = \varphi(x) + \omega(x)$ в (14), получим

$$\varphi(x) + \omega(x) = \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)(\varphi(x_{\bar\alpha},t_\alpha) + \omega(x_{\bar\alpha},t_\alpha))\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) + f(x) =$$

$$= \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)\varphi(x_{\bar\alpha},t_\alpha)\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha) + f(x) + \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)\omega(x_{\bar\alpha},t_\alpha)\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha).$$

Следовательно, $\omega(x)$ — решение однородного уравнения

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)\omega(x_{\bar\alpha},t_\alpha)\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha).$$

Так как $\omega(x) \in L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))$, то $\|\omega(x)\|_{L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} = F_\alpha < \infty$. Тогда

$$\|\omega(x)\|_{L_p^\gamma(D)} = \Bigg\|\lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)\omega(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)\Bigg\|_{L_p^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \|k_\alpha\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|\omega\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} =$$

$$= |\lambda| \|k_\alpha\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \Bigg\|\lambda \int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x; t_\alpha)\omega(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)\Bigg\|_{L_{p^2}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^2 \|k_\alpha\|_{L_{pq}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|k_\alpha\|_{L_{p^2q}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|\omega\|_{L_{p^3}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} \leqslant \ldots\ldots .$$

В силу неравенства (8) получим

$$\|\omega(x)\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant |\lambda|^r \prod_{i=1}^{r} \|k_\alpha\|_{L_{p^i q}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \|\omega\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))},$$

где

$$\|k_\alpha\|_{L_{p^i q}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} \leqslant G_\alpha \|k_\alpha\|_{L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_{(q,p)}^{(\gamma_\alpha,\gamma_\alpha)}(D_{t_\alpha,x_\alpha}))} = G_\alpha S_\alpha,$$

$$\|\omega\|_{L_{p^{r+1}}^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} \leqslant G_\alpha \|\omega\|_{L_\infty^{\gamma_{\bar\alpha}}(D_{x_{\bar\alpha}}; L_p^{\gamma_\alpha}(D_{t_\alpha}))} = G_\alpha F_\alpha.$$

Следовательно,

$$\|\omega(x)\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant (|\lambda| G_\alpha S_\alpha)^r\, G_\alpha F_\alpha.$$

Так как $|\lambda| G_\alpha S_\alpha < 1$, то при $r \to \infty$ имеем $(|\lambda| G_\alpha S_\alpha)^r \to 0$. Отсюда следует, что $\omega(x) \equiv 0$ почти всюду на D.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appell, J. M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин, А. С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.

3. Шварц, Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 412 с.

4. Ляхов, Л. Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциалные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610-1520.

5. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.

6. Ляхов, Л. Н. Об уравнениях Фредгольма для частного интеграла в $\mathbb{R}_2$ / Л. Н. Ляхов, А. И. Иноземцев, Н. И. Трусова // Проблемы математического анализа. — 2020. — Вып. 107. — С. 59–67.

7. Lyakhov, L. N. About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ / L. N. Lyakhov, A. I. Inozemcev, N. I. Trusova // Jornal Of Mathematical Sciences. — 2020. — V. 251, № 6. — P. 839–849.

8. Лионс, Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 587 с.

9. Математическая энциклопедия. Т. 1. — М. : Советская энциклопедия, 1977. — 1151 с.

10. Корпусов, М. О. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том II. Специальные пространства / М. О. Корпусов, А. А. Панин. — Липецк : ЛГПУ, 2016. — 259 с.

11. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1977. — 455 с.

12. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

13. Сабитов, К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения / К. Б. Сабитов. — М. : Высшая школа, 2005. — 671 с.

REFERENCES

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.

2. Kalitvin A.S., Frolova E.V. Linear partial integral equations. S-theory. [Kalitvin A.S., Frolova E.V. Lineyjnye uravneniya s chastnymi integralami. S-teoriya]. Lipetsk: LGPU, 2004, 195 p.

3. Schwartz L. Mathematical methods for physical sciences. [Shvarc L. Matematicheskie metody dlya fizicheskix nauk]. Moscow: Mir, 1965, 412 p.

4. Lyakhov L.N., Sanina E.L. The Kipriyanov-Beltrami operator with negative dimension of the Bessel operator and the singular Dirichlet problem for the B-harmonic equation. [Lyaxov L.N., Sanina E.L. Operator Kipriyanova—Bel'trami s otricatel'noyj razmernost'yu operatora Besselya i singulyarnaya zadacha Dirixle dlya V-garmonicheskogo uravneniya]. *Differencialnye uravneniya — Differential equations*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1610–1520.

5. Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolskii S.M. Integral representations of functions and embedding theorems. [Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skiyj S.M. Integral'nye predstavleniya funkciyj i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1975, 478 p.

6. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I., Trusova N.I. On the Fredholm equations for a particular integral in $\mathbb{R}_2$. [Lyaxov L.N., Inozemcev A.I., Trusova N.I. Ob uravneniyax Fredgol'ma dlya

chastnogo integrala v $\mathbb{R}_2$]. *Problemy matematicheskogo analiza — Problems of mathematical analysis*, 2020, iss. 107, pp. 59–67.

7. Lyakhov L.N., Inozemcev A.I., Trusova N.I. About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$. Jornal Of Mathematical Sciences, 2020, vol. 251, no. 6, pp. 839–849.

8. Lyons J.L. Some methods for solving nonlinear boundary value problems. [Lions ZH.L. Nekotorye metody resheniya nelineyjnyx kraevyx zadach]. Moscow: Mir, 1972, 587 p.

9. Encyclopedia of Mathematics. Vol. 1. [Matematicheskaya enciklopediya. T. 1]. Moscow: Soviet Encyclopedia, 1977, 1151 p.

10. Korpusov M.O., Panin A.A. Lectures on linear and nonlinear functional analysis. Volume II. Special spaces. [Korpusov M.O., Panin A.A. Lekcii po lineyjnomu i nelineyjnomu funkcional'nomu analizu. Tom II. Special'nye prostranstva]. Lipetsk: LGPU, 2016, 259 p.

11. Nikolsky S.M. Approximation of functions of several variables and embedding theorems. [Nikol'skiyj S.M. Priblizhenie funkciyj mnogix peremennyx i teoremy vlozheniya]. Moscow: Nauka, 1977, 455 p.

12. Yosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyyj analiz]. Moscow: Mir, 1967, 624 p.

13. Sabitov K.B. Functional, differential and integral equations. [Sabitov K.B. Funkcional'nye, differencial'nye i integral'nye uravneniya]. Moscow: Higher School, 2005, 671 p.

Ляхов Л. Н., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: levnlya@mail.ru

Lyakhov L. N., Voronezh State University, Voronezh, Russia; Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shanskiy University, Lipetsk, Russia; Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: levnlya@mail.ru

Трусова Н. И., Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия
E-mail: trusova.nat@gmail.com

Trusova N. I., Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shanskiy University, Lipetsk, Russia
E-mail: trusova.nat@gmail.com