УДК 517.957

О СПЕКТРАЛЬНОЙ АБСЦИССЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ НОРМЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ЛЯПУНОВА

И. Д. Коструб

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.10.2019 г.

Аннотация. В статье излагаются как известные, так и новые свойства спектральной абсциссы и логарифмической нормы. Доказываются различные оценки для указанных величин. В комплексной гильбертовой алгебре рассматривается алгебраическое уравнение Ляпунова при условии спектральной разделенности его коэффициентов. Доказывается, что для любой правой части из гильбертовой алгебры уравнение имеет единственное решение, и оно может быть представлено по приводимой явной формуле. Эта формула показывает, что решение эрмитово, если правая часть уравнения эрмитова, и решение неотрицательно (положительно), если правая часть уравнения неотрицательна (положительна).

Ключевые слова: банахова алгебра; спектр и резольвента; спектральная абсцисса; логарифмическая норма; свойства спектральной абсциссы и логарифмической нормы; гильбертова алгебра; алгебраическое уравнение Ляпунова.

ON THE SPECTRAL ABSCISSA OF THE LOGARITHMIC NORM AND THE ALGEBRAIC LYAPUNOV EQUATION

I. D. Kostrub

Abstract. The article presents both known and new properties of spectral abscissa and logarithmic norm. Various estimates for these quantities are proved. In complex Hilbert algebra, the Lyapunov algebraic equation is considered under the condition of spectral separation of its coefficients. It is proved that for any right-hand part of the Hilbert algebra, the equation has a unique solution, and it can be represented by an explicit formula. This formula shows that the solution is Hermitian if the right side of the Hermitian equation, and the solution is nonnegative (positive) if the right side of the equation is nonnegative (positive).

Keywords: Banach algebra; spectrum and resolvent; spectral abscissa; logarithmic norm; properties of spectral abscissa and logarithmic norm; Hilbert algebra; Lyapunov algebraic equation.

СПЕКТРАЛЬНАЯ АБСЦИССА И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА

Пусть $\mathbb{B}$ — комплексная банахова алгебра [1, гл. 10], [2, гл. IV], [3]. Мы записываем скалярные величины (комплексные числа) обычным шрифтом, а элементы банаховой алгебры — полужирным шрифтом. Если $\mathbf{a}$ — элемент из $\mathbb{B}$, то через $S(\mathbf{a})$ и $R(\mathbf{a})$ обозначаются спектр и резольвентное множество этого элемента соответственно. $S(\mathbf{a})$ есть непустое ограниченное замкнутое множество, а $R(\mathbf{a})$ есть непустое неограниченное открытое множество, причем $S(\mathbf{a}) \cup R(\mathbf{a}) = \mathbb{C}$ и $S(\mathbf{a}) \cap R(\mathbf{a}) = \varnothing$. *Спектральная абсцисса* элемента $\mathbf{a}$ из $\mathbb{B}$ определяется равенством

$$\operatorname{spa} \mathbf{a} = \max_{\lambda \in S(\mathbf{a})} \operatorname{Re} \lambda. \tag{1}$$

Термин спектральная абсцисса (по аналогии со спектральным радиусом) был предложен в статье [4, с. 23], а обозначение навеяно [5, с. 41]. *Логарифмическая норма* элемента $\mathbf{a}$ из $\mathbb{B}$ соответственно определяется так

$$||\mathbf{a}||_{\log} = \lim_{0<t\to 0} \frac{||\mathbf{1} + t\mathbf{a}|| - ||\mathbf{1}||}{t}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем выражения вида $\lambda\mathbf{1}$, где λ — комплексное число, а $\mathbf{1}$ — единица алгебры, следуя Т. Като [5, с. 274] записываем в виде λ. Термин логарифмическая норма для матриц впервые появился в статье [6], а обозначение заимствовано нами из книги [7]. Для линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве соответствующее определение дано в [8]. Существование и конечность предела в (2) непосредственно вытекает из выпуклости функции $||\mathbf{1} + t\mathbf{a}||$ $(t \in \mathbb{R})$.

Нас интересует поведение матричной экспоненты

$$e^{t\mathbf{a}} = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{a}^k}{k!}. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что

$$e^{-t||\mathbf{a}||} \leqslant ||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant e^{t||\mathbf{a}||} \ \text{ при } \ 0 \leqslant t < +\infty.$$

Выписанные константы $-||\mathbf{a}||$ и $||\mathbf{a}||$, вообще говоря, не являются точными. Пусть α и a — наилучшие константы в оценке

$$e^{t\alpha} \leqslant ||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant e^{ta} \ \text{ при } \ 0 \leqslant t < +\infty. \tag{4}$$

Существование таких констант не вызывает сомнений, причем $-||\mathbf{a}|| \leqslant \alpha \leqslant a \leqslant ||\mathbf{a}||$.

Теорема 1.[1] *Пусть α — наилучшая константа в оценке* (4) *снизу. Тогда*

$$\alpha = \inf_{0<t} \frac{\ln ||e^{ta}||}{t} = \lim_{0<t\to+\infty} \frac{\ln ||e^{ta}||}{t} = \max_{\lambda \in S(\mathbf{a})} \operatorname{Re} \lambda. \tag{5}$$

Последнее равенство в (5) в полном соответствии с (1) говорит о том, что α является спектральной абсциссой элемента $\mathbf{a}$: $\alpha = \operatorname{spa} \mathbf{a}$.

□ (Сравни с [8, гл. 1, теорема 4.1.]). Первое равенство в (5) является непосредственным следствием определения числа α. Докажем, что

$$\lim_{0<t\to+\infty} \frac{\ln ||e^{ta}||}{t} = \alpha. \tag{6}$$

По произвольному фиксированному $\varepsilon > 0$ найдем такое $t_\varepsilon > 0$, для которого $\ln ||e^{t_\varepsilon a}|| < (\alpha + \varepsilon) t_\varepsilon$. После этого произвольное неотрицательное t представляется в виде $t = kt_\varepsilon + \Delta$, где k — целое натуральное число и $0 \leqslant \Delta < t_\varepsilon$. Так как $ta = kt_\varepsilon a + \Delta a$, то

$$||e^{ta}|| \leqslant ||e^{kt_\varepsilon a}|| ||e^{\Delta a}||$$

$$||e^{kt_\varepsilon a}|| \leqslant ||e^{t_\varepsilon a}||^k \leqslant e^{kt_\varepsilon(\alpha+\varepsilon)}, \quad ||e^{\Delta a}|| \leqslant c \ \ (= \max_{0 \leqslant s \leqslant t_\varepsilon} ||e^{sa}||).$$

Поэтому

$$||e^{ta}|| \leqslant ce^{(t-\Delta)(\alpha+\varepsilon)}.$$

Мы можем написать

$$\alpha \leqslant \frac{\ln ||e^{ta}||}{t} \leqslant \frac{\ln c}{t} + \left(1 - \frac{\Delta}{t}\right)(\alpha + \varepsilon) =$$

[1] Начало и конец доказательства обозначаются □ и ■ соответственно.

$$= \frac{\ln c}{t} + (\alpha+\varepsilon) - \frac{\Delta(\alpha+\varepsilon)}{t} = \varepsilon + (\alpha+\varepsilon) + \varepsilon$$

при $t_{sa} < t < +\infty$, если t_{sa} достаточно велико. Итак, равенство (6) установлено.

Докажем, что

$$\lim_{0<t\to+\infty} \frac{\ln||e^{t\mathbf{a}}||}{t} = \max_{\lambda\in S(\mathbf{a})} \mathrm{Re}\,\lambda. \tag{7}$$

Стоящую справа величину обозначим через β. Так как для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $c(\varepsilon) > 0$, что справедлива оценка

$$||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant c(\varepsilon)e^{t(\beta+\varepsilon)} \ \text{ при } \ 0 \leqslant t < +\infty,$$

то $\alpha \leqslant \beta + \varepsilon$, что в силу произвольности ε влечет за собой неравенство $\alpha \leqslant \beta$. Так как

$$(\lambda - \mathbf{a})^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}}e^{-t\lambda}d\lambda \ \text{ при } \ a > \lambda > \alpha, \tag{8}$$

то спектр $S(\mathbf{a})$ лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \alpha$ и поэтому $\beta \leqslant \alpha$. ■

Теорема 2. *Пусть a — наилучшая константа в оценке* (4) *сверху. Тогда*

$$a = \sup_{0<t<+\infty} \frac{\ln||e^{t\mathbf{a}}||}{t} = \lim_{0<t\to0} \frac{\ln||e^{t\mathbf{a}}||}{t} = \lim_{0<t\to0} \frac{\ln||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||}{t} = \lim_{0<t\to0} \frac{||\mathbf{1}+t\mathbf{a}|| - ||\mathbf{1}||}{t}. \tag{9}$$

Последнее равенство в (9) в полном соответствии с (2) говорит о том, что a является логарифмической нормой элемента $\mathbf{a} : a = ||\mathbf{a}||_{\log}$. Все равенства цепочки (9) представляются новыми. Теоремы 1 и 2 в матричном варианте изложены в [9].

□ Рассмотрим логарифмическую функцию $\ln u$ на положительной полупрямой. В силу её непрерывной дифференцируемости $(\ln u)' = 1/u$ она локально удовлетворяет условию Липшица. Поэтому для любого положительного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|\ln u - \ln v| \leqslant (1+\varepsilon)|u - v|$ при $|u-1| < \delta$ и $|v-1| < \delta$. Поэтому при выполнении условия $|||\exp(t\mathbf{a})|| - 1| < \delta$ и $|||\mathbf{1}+t\mathbf{a}|| - 1| < \delta$ имеем

$$|\ln||e^{t\mathbf{a}}|| - \ln||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||| \leqslant (1+\varepsilon)|\,||e^{t\mathbf{a}}|| - ||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||\,| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)||e^{t\mathbf{a}} - (\mathbf{1}+t\mathbf{a})|| \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k||\mathbf{a}||^k}{k!}.$$

Поэтому

$$\lim_{0<t\to0} \frac{\ln||e^{t\mathbf{a}}||}{t} = \lim_{0<t\to0} \frac{\ln||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||}{t} \tag{10}$$

при условии, что хотя бы один из пределов существует.

Далее, полагая для краткости $\varepsilon(t) = ||\mathbf{1}+t\mathbf{a}|| - ||\mathbf{1}||$, мы можем написать

$$\frac{\ln||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||}{t} = \frac{||\mathbf{1}+t\mathbf{a}|| - ||\mathbf{1}||}{t}, \ \text{ при } \ \varepsilon(t) = 0;$$

$$\frac{\ln||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||}{t} = \frac{\ln(1+\varepsilon(t))}{\varepsilon(t)}\frac{||\mathbf{1}+t\mathbf{a}|| - ||\mathbf{1}||}{t}, \ \text{ при } \ \varepsilon(t) \neq 0,$$

откуда в силу известного соотношения $\ln(1+x)/x \to 1$ при $x \to 0$ получаем

$$\lim_{0<t\to0} \frac{\ln||\mathbf{1}+t\mathbf{a}||}{t} = \lim_{0<t\to0} \frac{||\mathbf{1}+t\mathbf{a}|| - ||\mathbf{1}||}{t} \tag{11}$$

при условии, что хотя бы один из написанных пределов существует. Однако, как мы об этом уже говорили выше, последний предел существует и служит для определения логарифмической нормы.

Осталось доказать, что

$$\sup_{0<t<+\infty} \frac{\ln ||e^{t\mathbf{a}}||}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||e^{t\mathbf{a}}||}{t}. \tag{12}$$

Стоящая слева в (12) величина существует и конечна, она равна a. Стоящий справа предел по доказанному существует и конечен; обозначим его через b. Из определения числа a вытекает, что $a \geqslant b$. Предположим на мгновение, что написанное неравенство строгое: $a > b$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ мы можем написать $a - \varepsilon \geqslant b + \varepsilon$. По найденному $\varepsilon > 0$ найдём такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы

$$||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant e^{t(b+\varepsilon)} \text{ при } 0 < t \leqslant \delta.$$

После этого рассмотрим произвольное фиксированное $t > 0$. Подберём натуральное k так, чтобы $(0 <)t/k \leqslant \delta$. После этого оценим

$$||e^{t\mathbf{a}}|| = \left|\left|e^{k\frac{t}{k}\mathbf{a}}\right|\right| \leqslant \left|\left|e^{\frac{t}{k}\mathbf{a}}\right|\right|^k \leqslant e^{\frac{t}{k}(b+\varepsilon)k} = e^{t(b+\varepsilon)} \leqslant e^{t(a-\varepsilon)}.$$

Итак,

$$||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant e^{t(a-\varepsilon)} \text{ при } 0 < t < +\infty,$$

и это явно противоречит определению числа a. ■

Из теорем 1 и 2 вытекает важное неравенство

$$\alpha = \operatorname{spa} \mathbf{a} \leqslant ||\mathbf{a}||_{\log} = a. \tag{13}$$

Свойства спектральной абсциссы. Согласно формуле (4) спектральная абсцисса $\operatorname{spa} \mathbf{a}$ элемента $\mathbf{a}$ из банаховой алгебры $\mathbb{B}$ является вещественным числом, могущим принимать любое значение. Она обладает следующими свойствами:

1. $\operatorname{spa} (\lambda + \mathbf{a}) = \operatorname{Re} \lambda + \operatorname{spa} \mathbf{a}$ при λ из $\mathbb{C}$ и $\mathbf{a}$ из $\mathbb{B}$;
2. $\operatorname{spa} (\lambda\mathbf{a}) = \lambda \operatorname{spa} \mathbf{a}$ при $\lambda \geqslant 0$ и $\operatorname{spa} (\lambda\mathbf{a}) = -\lambda \operatorname{spa} (-\mathbf{a})$ при $\lambda < 0$;
3. $\operatorname{spa} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leqslant \operatorname{spa} \mathbf{a} + \operatorname{spa} \mathbf{b}$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коммутируют;
4. $\operatorname{spa} \mathbf{a} + \operatorname{spa} (-\mathbf{a}) \geqslant 0$ $(= \operatorname{spa} \mathbf{a})$;
5. $|\operatorname{spa} \mathbf{a}| \leqslant ||\mathbf{a}||$.

Свойства логарифмической нормы. Согласно формуле (2) логарифмическая норма $||\mathbf{a}||_{\log}$ элемента $\mathbf{a}$ из $\mathbb{B}$ является вещественным числом, могущим принимать любые значения. Она обладает следующими свойствами:

1. $||\lambda + \mathbf{a}||_{\log} = \operatorname{Re} \lambda + ||\mathbf{a}||_{\log}$ при λ из $\mathbb{C}$ и $\mathbf{a}$ из $\mathbb{B}$;
2. $||\lambda\mathbf{a}||_{\log} = \lambda||\mathbf{a}||_{\log}$ при $\lambda \geqslant 0$ и $||\lambda\mathbf{a}||_{\log} = -\lambda|| - \mathbf{a}||_{\log}$ при $\lambda < 0$;
3. $||\mathbf{a} + \mathbf{b}||_{\log} \leqslant ||\mathbf{a}||_{\log} + ||\mathbf{b}||_{\log}$, предположение о коммутируемости $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ здесь излишне;
4. $||\mathbf{a}||_{\log} + || - \mathbf{a}||_{\log} \geqslant 0$ $(= ||\mathbf{0}||_{\log})$;
5. $|||\mathbf{a}||_{\log}| \leqslant ||\mathbf{a}||$.

Содержание этого раздела во многом перекликается со статьей [9].

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА

Гильбертова алгебра. Комплексная банахова алгебра $\mathbb{B}$, в которой определена операция сопряжения (инволюции) $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*$, обладающая свойствами

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*, \ (\lambda\mathbf{x})^* = \overline{\lambda}\mathbf{x}^*, \ (\mathbf{x}\mathbf{y})^* = \mathbf{y}^*\mathbf{x}^*, \ \mathbf{x}^{**} = \mathbf{x}, \tag{14}$$

называется *комплексной гильбертовой алгеброй* и обозначается $\mathbb{H}$.

Элемент $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$ называется: *самосопряженным* или *эрмитовым,* если $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$; *кососопряженным* или *косоэрмитовым,* если $\mathbf{x}^* = -\mathbf{x}$; *унитарным,* если $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \mathbf{1}$ и $\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \mathbf{1}$ и *нормальным,* если $\mathbf{x}\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*\mathbf{x}$ (так, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ коммутируют).

Так, например, эрмитовы $\mathbf{x}+\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^*\mathbf{x}$, $i(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$, а такие $i(\mathbf{x}+\mathbf{x}^*)$, $i\mathbf{x}\mathbf{x}^*$, $i\mathbf{x}^*\mathbf{x}$, $\mathbf{x}-\mathbf{x}^*$ — косоэрмитовы. В коммутативной комплексной гильбертовой алгебре все элементы являются нормальными.

Мы будем по мере надобности присоединять к выше названным свойствам еще, например, такое как

$$||\mathbf{x}\mathbf{x}^*|| = ||\mathbf{x}||^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}^*|| \ \ (\mathbf{x} \in \mathbb{H}).$$

Как это явствует из текста, мы отважились на нововведение — ввели новый термин — *гильбертова алгебра.* Так мы назвали то, что в [2] названо (*)-алгеброй. Какие же у нас доводы в пользу этого нововведения (за или pro?). Во-первых, соответствие $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*$ обладает всеми свойствами перехода к сопряженному оператору в гильбертовом пространстве (речь, естественно, идет об ограниченных операторах). Во-вторых, приведенная выше классификация элементов алгебры (эрмитов, унитарный или нормальный) характерна именно для операторов в гильбертовом пространстве. Довод против или contra. Гильбертова алгебра, вообще говоря, не является гильбертовым пространством, в то время как банахова алгебра всегда является банаховым пространством.

Уравнение Ляпунова. В комплексной гильбертовой алгебре $\mathbb{H}$ рассмотрим алгебраическое уравнение Ляпунова

$$\mathbf{u}\mathbf{a} + \mathbf{a}^*\mathbf{u} = -\mathbf{w}. \tag{15}$$

Здесь коэффициент $\mathbf{a}$ — заданный элемент из $\mathbb{H}$, который предполагается гурвицевым, а элементы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ являются эрмитовыми из $\mathbb{H}$ — искомым и заданным соответственно ($\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ и $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}$). Элемент называется *гурвицевым*, если его спектр лежит в открытой левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Это уравнение в матричном варианте возникает в теории обыкновенных дифференциальных уравнений при изучении устойчивости по Ляпунову линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [10] или [11]; отметим также [12] и [13]). Для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве операторное уравнение Ляпунова изучается в книге [8].

▫ **Существование и единственность.** Применим развитую в [14] теорию к уравнению (15). Условие спектральной разделенности коэффициентов уравнения принимает вид

$$S(\mathbf{a}^*) \cap S(-\mathbf{a}) = \varnothing. \tag{16}$$

Так как $S(\mathbf{a}^*) = S^*(\mathbf{a}) = \overline{S(\mathbf{a})}$ (черта комплексного сопряжения), то спектр $S(\mathbf{a}^*)$, как комплексно сопряженный ко спектру $S(\mathbf{a})$ гурвицева элемента $\mathbf{a}$, лежит в открытой левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Далее, так как $S(-\mathbf{a}) = -S(\mathbf{a})$, то спектр $S(-\mathbf{a})$ лежит в открытой правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Поэтому выполнено условие (16). Это означает, что уравнение (15) при любом $\mathbf{w}$ из $\mathbb{H}$ имеет единственное решение $\mathbf{u}$ из $\mathbb{H}$.

Явная формула. Единственное решение уравнения (15) представимо в интегральном виде

$$\mathbf{u} = \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt. \tag{17}$$

Проверим, прежде всего, что написанный несобственный интеграл абсолютно сходится. Пусть α есть спектральная абсцисса элемента $\mathbf{a}$ из $\mathbb{H}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую постоянную $c(\varepsilon) > 0$, для которой справедлива оценка

$$||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant c(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon)} \text{ при } 0 < t < +\infty. \tag{18}$$

Так как элемент $\mathbf{a}$ по предположению гурвицев, то $\alpha < 0$. Мы считаем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $\alpha + \varepsilon < 0$. Из (18) вытекает оценка

$$\left|\left|e^{t\mathbf{a}^*}\right|\right| = \left|\left|\left(e^{t\mathbf{a}}\right)^*\right|\right| = ||e^{t\mathbf{a}}|| \leqslant c(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon)} \text{ при } 0 < t < +\infty. \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает, что

$$\left|\left|e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\right|\right| \leqslant \left|\left|e^{t\mathbf{a}^*}\right|\right| ||\mathbf{w}|| \left|\left|e^{t\mathbf{a}}\right|\right| \leqslant ||\mathbf{w}||c^2(\varepsilon)e^{t2(\alpha+\varepsilon)}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\left|e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\right|\right| dt \leqslant ||\mathbf{w}|| \frac{c^2(\varepsilon)}{2(-(\alpha+\varepsilon))}.$$

Абсолютная сходимость несобственного интеграла в (17) установлена.

Пусть $\mathbf{u}$ есть единственное решение уравнения (15) при указанном $\mathbf{w}$. Помножим обе части уравнения (15) слева на $e^{t\mathbf{a}^*}$, справа на $e^{t\mathbf{a}}$ и проинтегрируем полученное выражение в пределах от 0 до $+\infty$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}(\mathbf{ua} + \mathbf{a}^*\mathbf{u})e^{t\mathbf{a}}dt = -\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt. \tag{20}$$

(Отметим, что справа с точностью до знака стоит выражение (17)).

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{a}^*\mathbf{u}e^{t\mathbf{a}}dt = \int\limits_0^{+\infty} d(e^{t\mathbf{a}^*})\mathbf{u}e^{t\mathbf{a}} =$$

(проинтегрируем по частям)

$$= e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{ua}e^{t\mathbf{a}}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}d(\mathbf{u}e^{t\mathbf{a}}) = -\mathbf{u} - \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{ua}e^{t\mathbf{a}}dt.$$

Сравнение с (20) показывает, что имеет место формула (17).

Наличие формулы (17) доказывает, что если уравнение (15) имеет решение, то это решение единственное.

Проверим, что формула (17) доставляет нам решение уравнения (15).

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt\,\mathbf{a} + \mathbf{a}^*\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\mathbf{a}dt + \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{a}^*\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}d(e^{t\mathbf{a}}) + \int\limits_0^{+\infty} d(e^{t\mathbf{a}^*})\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}.$$

Проинтегрируем первый интеграл по частям

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}d(e^{t\mathbf{a}}) = e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} d(e^{t\mathbf{a}^*})\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}} + \int\limits_0^{+\infty} d(e^{t\mathbf{a}^*})\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}} = -\mathbf{w}.$$

Эрмитовость. Проверим, что если $\mathbf{w}$ эрмитов ($\mathbf{w}^* = \mathbf{w}$), то и $\mathbf{u}$ эрмитов ($\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$). Имеем из формулы (17)

$$\mathbf{u}^* = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt\right)^* = \int\limits_0^{+\infty}\left(e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\right)^* dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(e^{t\mathbf{a}}\right)^*\mathbf{w}^*\left(e^{t\mathbf{a}^*}\right)^* dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt = \mathbf{u}. \ \blacksquare$$

Теорема 3. *В комплексной гильбертовой алгебре* $\mathbb{H}$ *рассмотрим алгебраическое уравнение Ляпунова* (15). *Пусть коэффициент* $\mathbf{a}$ *гурвицев. Тогда для любого* $\mathbf{w}$ *из* $\mathbb{H}$ *уравнение* (15) *имеет единственное решение* $\mathbf{u}$ *из* $\mathbb{H}$ *и это решение может быть найдено по формуле* (17). *Эта формула показывает, что решение* $\mathbf{u}$ *эрмитово, если* $\mathbf{w}$ *эрмитов, и решение* $\mathbf{u}$ *неотрицательно* (*положительно*), *если* $\mathbf{w}$ *неотрицательно* (*положительно*).

Неотрицательность и положительность. Спектр эрмитова элемента $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$ — вещественнен, т. е. лежит на вещественной прямой. Элемент $\mathbf{x}$ называют *неотрицательным* и пишут $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, если его спектр неотрицателен, т. е. лежит на неотрицательной полупрямой. Элемент $\mathbf{x}$ называют *положительным* и пишут $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, если его спектр положителен, т. е. лежит на положительной полупрямой.

Отметим некоторые свойства неотрицательных элементов [15]:

1. $\mathbf{x}\mathbf{x}^* \geqslant \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$;
2. если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbb{H}$, причем $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{1} + \mathbf{x}\mathbf{x}^* \geqslant \mathbf{0}$ обратим при любом $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$.

Отметим некоторые свойства положительных элементов. Так как неотрицательный элемент положителен тогда и только тогда, когда он отрицателен, то:

1. $\mathbf{x}\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$ для любого обратимого элемента $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$;
2. если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbb{H}$, причем $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} > \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{1} + \mathbf{x}\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{x}$ из $\mathbb{H}$.

▫ Осталось показать, что если $\mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}$, то и $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, а если $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, то и $\mathbf{u} > \mathbf{0}$.

Наиболее просто доказательство этого факта можно провести при дополнительном предположении о коммутативности гильбертовой алгебры $\mathbb{H}$ ([1], [2]). Как известно, в этом случае эрмитовость элемента $\mathbf{x}$ равносильна вещественности его преобразования Гельфанда $\mathbf{x}(\mathfrak{m})$, если $\mathfrak{m} \in \Delta$, неотрицательность элемента $\mathbf{x}$ равносильна неотрицательности его преобразования Гельфанда, а положительность элемента $\mathbf{x}$ равносильна положительности его преобразования Гельфанда. Здесь Δ — множество максимальных идеалов $\mathfrak{m}$.

Из формулы (17) вытекает, что

$$\mathbf{u}(\mathfrak{m}) = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}dt\right)(\mathfrak{m}) = \int\limits_0^{+\infty}\left(e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\right)(\mathfrak{m})dt. \qquad (21)$$

Так как

$$\left(e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\right)(\mathfrak{m}) = e^{t\mathbf{a}^*}(\mathfrak{m})\mathbf{w}(\mathfrak{m})e^{t\mathbf{a}}(\mathfrak{m}) \text{ и}$$

$$e^{t\mathbf{a}}(\mathfrak{m}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mathbf{a}^k}{k!}(\mathfrak{m})\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mathbf{a}^k(\mathfrak{m})}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(\mathbf{a}(\mathfrak{m}))^k}{k!} = e^{t\mathbf{a}(\mathfrak{m})},$$

то

$$\left(e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}}\right)(\mathfrak{m}) = e^{t\mathbf{a}^*(\mathfrak{m})}\mathbf{w}(\mathfrak{m})e^{t\mathbf{a}(\mathfrak{m})} = \mathbf{w}(\mathfrak{m})\left|e^{t\mathbf{a}(\mathfrak{m})}\right|^2. \qquad (22)$$

(Напомним, что $\mathbf{a}^*(\mathfrak{m}) = \overline{\mathbf{a}(\mathfrak{m})}$ черта комплексного сопряжения). Поэтому

$$\mathbf{u}(\mathfrak{m}) = \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{w}(\mathfrak{m}) \left| e^{t\mathbf{a}(\mathfrak{m})} \right|^2 dt = -\frac{\mathbf{w}(\mathfrak{m})}{2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{a}(\mathfrak{m})}. \tag{23}$$

Так как $\mathrm{Re}\,\mathbf{a}(\mathfrak{m}) < 0$ при $\mathfrak{m}$ из Δ, то из неотрицательности $\mathbf{w}(\mathfrak{m})$ вытекает неотрицательность $\mathbf{u}(\mathfrak{m})$, а из положительности $\mathbf{w}(\mathfrak{m})$ вытекает положительность $\mathbf{u}(\mathfrak{m})$.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что так как $\mathbf{w}$ является эрмитовым и неотрицательным (положительным), то извлекаемый квадратный корень $\sqrt{\mathbf{w}}$ является эрмитовым и неотрицательным (положительным). Положим $\mathbf{f}(t) = \sqrt{\mathbf{w}}e^{t\mathbf{a}}$. Тогда формула (17) принимает вид

$$\mathbf{u} = \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{f}^*(t)\mathbf{f}(t)dt. \tag{24}$$

Заметим, что $e^{t\mathbf{a}^*}\mathbf{w}e^{t\mathbf{a}} = e^{t\mathbf{a}^*}\sqrt{\mathbf{w}}\sqrt{\mathbf{w}}e^{t\mathbf{a}} = \mathbf{f}^*(t)\mathbf{f}(t)$. Если $\mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{f}^*(t)\mathbf{f}(t) \geqslant \mathbf{0}$ при $0 \leqslant t < +\infty$. Поэтому согласно (24) $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$. Если $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, то $\mathbf{f}(t)$ обратима при произвольном неотрицательном t и $\mathbf{f}^*(t)\mathbf{f}(t) > \mathbf{0}$ при $0 \leqslant t < +\infty$. Поэтому $\mathbf{u} > \mathbf{0}$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 449 с.

2. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : ИЛ, 1962. — 830 с.

3. Perov, A. I. About one square equation / A. I. Perov, I. D. Kostrub // Scientific Light. — — 2019. — V. 1, № 26. — P. 33–34.

4. Перов, А. И. Новые признаки устойчивости систем с постоянными коэффициентами / А. И. Перов // Автоматика и телемеханика. — 2002. — №4. — С. 22–33.

5. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 740 с.

6. Лозинский, С. М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / С. М. Лозинский // Известия вузов. Математика. — 1958. — № 5. — С. 52–90.

7. Былов, Б. Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман. — М. : Наука, 1966. — 576 с.

8. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.

9. Перов, А. И. О спектральной абсциссе и логарифмической норме / А. И. Перов, И. Д. Коструб // Математические заметки. — 2017. — Т. 101, № 4. — С. 562–575.

10. Боровских, А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. — Воронеж. : Изд-во ВГУ, 2013. — 550 с.

11. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

12. Икрамов, Х. Д. Численное решение матричных уравнений / Х. Д. Икрамов. — М. : Наука, 1984. — 192 с.

13. Курбатов, В. Г. Вычислительные методы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж. : Издательский дом ВГУ, 2019. — 323 с.

14. Далецкий, Ю. Л. Об одном линейном уравнении относительно элементов нормированного кольца / Ю. Л. Далецкий // Успехи математических наук. — 1959. — Т. 14, вып. 1 (85). — С. 165–168.

15. Антоневич, А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. — Минск. : «Вишейшая школа», 1978. — 208 с.

REFERENCES

1. Rudin W. Functional analysis. [Rudin W. Funkcional'nyyj analiz]. Moscow: Mir, 1975, 449 r.

2. Hille E., Phillips R. Functional analysis and semigroups. [Hille E., Fillips R. Funkcional'nyyj analiz i polugruppy]. Moscow, IL, 1962, 830 p.

3. Perov A.I., Kostrub I.D. About one square equation. Scientific Light, 2019, vol. 1, no. 26, pp. 33–34.

4. Perov A.I. New signs of stability of systems with constant coefficients. [Perov A.I. Novye priznaki ustoyjchivosti sistem s postoyannymi koefficientami]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and telemechanics*, 2002, no. 4, pp. 22–33.

5. Kato T. Perturbation theory of linear operators. [Kato T. Teoriya vozmushheniyj lineyjnyx operatorov]. Moscow: Mir, 1972, 740 r..

6. Lozinsky S.M. Estimation of error of numerical integration of ordinary differential equations. [Lozinskiyj S.M. Ocenka pogreshnosti chislennogo integrirovaniya obyknovennyx differencial'nyx uravneniyj]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1958, no. 5, pp. 52–90.

7. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M. Lyapunov exponent theory and its applications to stability issues. [Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M. Teoriya pokazateleyj Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoyjchivosti]. Moscow: Nauka, 1966, 576 p.

8. Daletsky Yu.L., Crane M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach space. [Daleckiyj Yu.L., Kreyjn M.G. Ustoyjchivost' resheniyj differencial'nyx uravneniyj v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1970, 536 p.

9. Perov A.I., Kostrub I.D. On the spectral abscissa and the logarithmic norm. [Perov A.I., Kostrub I.D. O spektral'noyj abscisse i logarifmicheskoyj norme]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2017, vol. 101, no. 4, pp. 562–575.

10. Borovskikh A.V., Perov A.I. Lectures on ordinary differential equations. [Borovskix A.V., Perov A.I. Lekcii po obyknovennym differencial'nym uravneniyam]. Voronezh: VSU publishing house, 2013, 550 p.

11. Demidovich B.P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability. [Demidovich B.P. Lekcii po matematicheskoyj teorii ustoyjchivosti]. Moscow, 1967, 472 p.

12. Ikramov H.D. Numerical solution of matrix equations. [Ikramov X.D. Chislennoe reshenie matrichnyx uravneniyj]. Moscow: Nauka, 1984, 192 p.

13. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Computational methods of spectral theory. [Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Vychislitel'nye metody spektral'noyj teorii]. Voronezh: VSU publishing house, 2019, 323 p.

14. Daletsky Yu.L. On a linear equation with respect to the elements of a normalized ring. [Daleckiyj Yu.L. Ob odnom lineyjnom uravnenii otnositel'no elementov normirovannogo kol'ca]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1959, vol. 14, vol. 1 (85), pp. 165–168.

15. Antonevich A.B., Knyazev P.N., Radyno Y.V. Problems and exercises in functional analysis. [Antonevich A.B., Knyazev P.N., Radyno Ya.V. Zadachi i uprazhneniya po funkcional'nomu analizu]. Minsk: Vichy school, 1978, 208 p.

Коструб Ирина Дмитриевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры системного анализа и управления факультета Прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
Тел.: ikostrub@yandex.ru

Kostrub Irina Dmitrievna, Cand. phis.-math. associate Professor, associate Professor of the Department of system analysis and management of the faculty of Applied mathematics, Informatics and mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
Tel.: ikostrub@yandex.ru