

КРАТНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

М. В. Кабанко

Курский государственный университет

Поступила в редакцию 05.06.2020 г.

Аннотация. Классическая задача интерполяции состоит в отыскании функции данного класса, принимающей в заданных точках, узлах интерполяции, заданные значения. При этом отдельным классом таких задач является задача свободной интерполяции, в которой на узлы интерполяции накладываются естественные условия по отношению к искомой функции. Одним из путей решений таких задач является построение канонического произведения множеств точек комплексной плоскости. В данной работе представлены геометрические подходы к задаче свободной интерполяции. В частности, рассматривается понятие слабо регулярных кратных множеств и их связь с задачами свободной интерполяции целыми функциями. На основе считающей меры множества построена считающая функция слабо регулярного дивизора. Для этой функции доказаны условия ограниченности, которые позволяют доказать, что такие слабо регулярные множества являются интерполяционными в пространствах целых функций конечного порядка в комплексной плоскости.

Ключевые слова: целая функция, дивизор, слабо регулярное множество, каноническая функция, мера Дирака, задача интерполяции.

MULTIPLE REGULAR SETS IN SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF FINITE ORDER

M. V. Kabanko

Abstract. The classical interpolation problem is to find a function of a given class, receiving at the given points, interpolation nodes, the given values. Wherein a separate class of such problems is the free interpolation problem, in which natural conditions are imposed on the interpolation nodes with respect to the desired function. One of the ways to solve such problems is to construct a canonical product sets of points of the complex plane. The paper presents geometric approaches to the problem of free interpolation. In particular, the concept of weakly regular multiple sets and their connection with problems of free interpolation by entire functions. A counting function of a weakly regular divisor is constructed on the basis of the counting measure of a set. For this function, boundedness conditions are proved, which make it possible to prove that such weakly regular sets are interpolation sets in spaces of entire functions finite order in the complex plane.

Keywords: entire function, divisor, weakly regular set, canonical function, Dirac measure, interpolation problem.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие *регулярного множества* в комплексной плоскости впервые было введено Б. Я. Левиным [1, с. 126]. При этом предполагалось, что множество не имеет кратных точек и является правильно распределенным при заданном уточненном порядке. Было доказано, что такие

множества являются интерполяционными в пространстве целых функций вполне регулярного роста с индикатором меньше заданного при данном уточненном порядке. Далее, это понятие обобщалось в нескольких направлениях. В частности, в работе [2] было введено понятие *слабо регулярного множества* в пространствах целых функций ненулевого конечного порядка и в пространствах целых функций типа не выше чем нормальный относительно ненулевого конечного порядка. В работе [3] понятие слабо регулярного множества было распространено на пространство целых функций типа не выше чем нормальный относительно нулевого конечного порядка. Во всех отмеченных работах предполагалось, что регулярные множества не имеют кратных точек. Однако, во многих задачах теории функций (например, при построении канонических произведений множеств, задачах интерполяции и др.) приходится рассматривать множества с кратными точками. Целью данной работы является обобщение понятий регулярных множеств в пространстве целых функций конечного порядка на случай с точками, имеющими кратности, вообще говоря, отличные от единицы и доказательство их интерполяционности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем необходимые определения и обозначения. Через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{C}$ будем обозначать, соответственно, множество натуральных чисел и множество комплексных чисел. Через $C(z, t)$ обозначим замкнутый круг с центром в точке z радиуса t : $C(z, t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq t\}$.

Пусть $f(z)$ — целая функция. Через $M(f, r)$ обозначим максимум модуля функции $f(z)$ на окружности $|z| = r$:

$$M(f, r) = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} |f(re^{i\varphi})|.$$

Число

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(f, r)}{\ln r}$$

называется *порядком функции* $f(z)$.

В дальнейшем, как обычно, через $[\rho, \infty]$ обозначается пространство целых функций, порядок которых не превышает ρ , $\rho \geq 0$, то есть таких, что $\rho_f \leq \rho$.

Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \in \mathbb{N}$, — дивизор в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. множество различных комплексных чисел $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ вместе с их кратностями $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$.

В дальнейшем будем предполагать, что $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, так как в рамках рассматриваемых вопросов это ограничение всегда легко снимается.

Если дивизор D удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0, \quad (1)$$

то функция

$$E(z) := E_D(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\sum_{j=1}^{[\rho]} \left(\frac{z}{a_n} \right)^j \right) \right)^{q_n}$$

принадлежит пространству $[\rho, \infty]$. Здесь, как обычно, через $[\rho]$ обозначается целая часть числа ρ . Функция $E_D(z)$ называется *канонической функцией дивизора* D .

По заданному дивизору D определим меру:

$$\mu_D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \delta(z - a_n),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта функция Дирака.

Определим семейство функций

$$\tilde{\Phi}_D(z, \alpha) = (\mu_D(C(z, \alpha|z|)) - q_n)^+, \quad 0 < \alpha < 1/2,$$

где q_n – кратность ближайшей к z точки дивизора D (если таких точек несколько, то берем точку с наибольшей кратностью; если и таких несколько – любую из них, например, точку с наибольшей мнимой частью), $a^+ = \max\{0; a\}$. Таким образом, функция $\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)$ является локальной мерой, определяемой дивизором D .

Для обоснованности введения следующего определения рассмотрим лемму, доказательство которой не представляет сложностей и приводится для полноты рассуждений. Обозначим

$$\ln^+ a = \begin{cases} \ln a, & a > 1, \\ 0, & a \leq 1. \end{cases}$$

Лемма 1. Если функция $f \in [\rho, \infty]$, то выполняется неравенство

$$\limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \ln^+ \frac{|f^{(k-1)}(z)|}{(k-1)!} \leq \rho, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть функция $f \in [\rho, \infty]$, т.е. $\rho_f \leq \rho$. Тогда $|M(f, r)| \leq \exp[r^{\rho+\varepsilon}]$, если $r > r_\varepsilon$. Из формулы Коши для производной, интегрируя по окружности $C = \partial C(z, 1)$ (∂G означает границу множества G), получаем неравенство:

$$\begin{aligned} |f^{(k-1)}(z)| &\leq \frac{(k-1)!}{2\pi} \int_C \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k} \right| d\zeta \leq \frac{(k-1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[(|z| + 1)^{\rho+\varepsilon}] dt = \\ &= (k-1)! \exp[(|z| + 1)^{\rho+\varepsilon}], \end{aligned}$$

для всех z , таких что $|z| > r_\varepsilon + 1$.

Из этого соотношения следует, очевидно, неравенство (2).

Следующее определение – это определение интерполяционности дивизора D из работы [4] (см. также обзорную статью [5]).

Определение 1. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ называется интерполяционным в пространстве $[\rho, \infty]$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1 \leq k \leq q_n} \frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} \leq \rho,$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]$ со свойством:

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1, 2, \dots, q_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Поскольку из леммы 1 следует, что неравенство (2) справедливо для любой функции $f \in [\rho, \infty]$, то в такой постановке задача интерполяции относится к задачам свободной интерполяции, когда на значения интерполирующей функции в узлах накладываются минимальные ограничения, связанные с необходимостью получения решения в заданном классе.

В работе К. Г. Малютина и О. А. Боженко [4] (см. также [5, Теорема 2.1]) были найдены необходимые и достаточные условия интерполяционности дивизора D в пространстве $[\rho, \infty]$ в случае нулевого порядка (т.е. когда $\rho = 0$) в терминах канонического произведения дивизора D и в терминах семейства функций $\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)$. Однако, рассуждения этой работы дословно распространяется на случай любого $\rho \geq 0$. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. (Малютин, Боженко) Следующие три утверждения эквивалентны.

- 1) Дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho, \infty]$.
- 2) Каноническая функция $E_D(z)$ дивизора D удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \frac{q_n!}{|E_D^{(q_n)}(a_n)|} \leq \rho.$$

- 3) Для любого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_n}{\ln |a_n|} \leq \rho,$$

и

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int_0^{1/2} \frac{\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)}{\alpha} d\alpha \leq \rho.$$

Заметим, что задача (3) рассматривалась Г. П. Лапиным [6]. При этом Г. П. Лапин рассматривал только случай $\rho > 0$ и получил критерии разрешимости задачи (3) в терминах канонических произведений. Кроме того, Задачу (3) Г. П. Лапин рассматривал при следующих ограничениях на значения в узлах интерполяции:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1 \leq k \leq q_n} |b_{n,k}| \leq \rho.$$

Таким образом, в такой постановке задача (3) не является задачей свободной интерполяции.

Отметим также, что случай простой свободной интерполяции (т. е. $q_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$) рассматривал А. Ф. Леонтьев [7], который нашел критерии ее разрешимости в терминах канонической функции узлов интерполяции.

Введем следующее определение.

Определение 2. Дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется слабо регулярным дивизором или, короче, $WR(\rho)$ -дивизором при порядке $\rho \geq 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение (1) и выполняется одно из следующих условий (C) или (C') :

(C) Точки a_n расположены внутри конечного числа попарно непересекающихся углов углов с общей вершиной в начале координат так, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любых двух точек последовательности $\{a_n\}$, расположенных внутри одного из углов, выполняется условие

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geq r_n = q_n |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)},$$

если $|a_n| > r(\varepsilon)$.

(C') Для любого $\varepsilon > 0$ кружки радиусов

$$r_n = \sqrt{q_n} |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)/2},$$

с центрами в точках a_n не пересекаются, если $|a_n| > r(\varepsilon)$.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ при выполнении условия (C') кружки $C(a_n, r_n)$ будем называть исключительными кружками $WR(\rho)$ -дивизора ($EW R(\rho, \varepsilon)$ -кружками).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. Слабо регулярный при порядке $\rho \geq 0$ дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ является интерполяционным в пространстве $[\rho, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Предварительно сформулируем три леммы.

Лемма 2. Пусть дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо регулярным при порядке $\rho \geq 0$, и выполняется условие (C). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ кружки $C(a_n, q_n |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)})$ не пересекаются для всех a_n таких, что $|a_n| > r_\varepsilon$.

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 3.9 из [2] и мы его опускаем.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ при выполнении условия (C) кружки из леммы 2 будем также называть *исключительными кружками* $WR(\rho)$ -дивизора ($EW R(\rho, \varepsilon)$ -кружками).

Лемма 3. Пусть дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо регулярным при порядке $\rho \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для всех z таких, что $|z| > r_\varepsilon$ при выполнении условия (C) будет верно неравенство

$$\tilde{\Phi}_D(z, \alpha) \leq \alpha |z|^{\rho+\varepsilon}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Предположим, что выполняется условие (C). Пусть r_ε из условия (C) и

$$q_n \leq |a_n|^{\rho+\varepsilon}, \quad |a_n| > r_\varepsilon. \quad (4)$$

Пусть точка $z = re^{i\theta}$, $r > 2r_\varepsilon$, не принадлежит ни одному из $EW R(\rho, \varepsilon)$ -кружков. Опишем из точки z круг $C(z, \alpha|z|)$, $0 < \alpha < 1/2$ радиусом $\alpha|z|$. Так как точка z не принадлежит ни одному из $EW R(\rho, \varepsilon)$ -кружков, то исключительные кружки, соответствующие точкам дивизора D попавшим в круг $C(z, \alpha|z|)$, принадлежат кругу $C(z, 2\alpha|z|)$. Спроектируем отрезки

$$[a_n; a_n + q_n |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)} e^{i \arg a_n}],$$

соответствующие точкам дивизора D попавшим в круг $C(z, \alpha|z|)$, на полуось $\{\zeta : \arg \zeta = \arg z\}$. Здесь под $\arg \zeta$ мы понимаем главное значение аргумента: $0 \leq \arg \zeta < 2\pi$. Поскольку выполняется условие (C), то проекции этих отрезков не пересекаются и их сумма меньше $2\alpha|z|$, т.е. получаем

$$\sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} q_n |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)} \leq 2\alpha|z|, \quad |a_n| > r(\varepsilon).$$

Поскольку $a_n \in C(z, \alpha|z|)$ и $0 < \alpha < 1/2$, то $|a_n| \geq |z|/2$, тогда

$$\sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} q_n \left(\frac{|z|}{2}\right)^{1-(\rho+\varepsilon)} \leq \sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} q_n |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)} \leq 2\alpha|z|, \quad |a_n| > r(\varepsilon).$$

Отсюда получаем неравенство

$$\tilde{\Phi}_D(z, \alpha) = \sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} q_n \leq 2^{1-\rho} \alpha |z|^{\rho+\varepsilon}, \quad |a_n| > r(\varepsilon),$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо регулярным при порядке $\rho \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для всех z таких, что $|z| > r_\varepsilon$ при выполнении условия (C') будет верно неравенство

$$\tilde{\Phi}_D(z, \alpha) \leq \alpha^2 |z|^{\rho+\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть теперь выполняются условия (2) и (C') точка z не принадлежит ни одному из $CWR(\rho, \varepsilon)$ -кружков. Как и при доказательстве леммы 3 опишем из точки z круг $C(z, \alpha|z|)$, $0 < \alpha < 1/2$ радиусом $\alpha|z|$. Так как центр этого круга не входит ни в один

исключительный кружок, то радиусы исключительных кружков с центрами внутри этого круга меньше величины $\alpha|z|$. Поскольку исключительные кружки не пересекаются, то сумма площадей исключительных кружков с центрами внутри круга $C(z, \alpha|z|)$ меньше площади круга $C(z, 2\alpha|z|)$, т.е.

$$\sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} \pi q_n |a_n|^{2-(\rho+\varepsilon)} \leq 4\pi(\alpha|z|)^2, \quad |a_n| > r(\varepsilon).$$

Аналогично, так как $a_n \in C(z, \alpha|z|)$ и $0 < \alpha < 1/2$, то $|a_n| \geq |z|/2$. Отсюда и из предыдущего неравенства получаем, что

$$\tilde{\Phi}_D(z, \alpha) = \sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} q_n \leq 2^{4-\rho} \alpha^2 |z|^{\rho+\varepsilon}, \quad |a_n| > r(\varepsilon).$$

Из последнего неравенства, очевидно, следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Требуемое утверждение легко получить, используя доказанные леммы 3 и 4.

Действительно, пусть выполняется условие (C). Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int_0^{1/2} \frac{\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)}{\alpha} d\alpha &\leq \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int_0^{1/2} \frac{2^{4-\rho} \alpha^2 |z|^{\rho+\varepsilon}}{\alpha} d\alpha = \\ &= \limsup_{z \rightarrow \infty} \left((\rho + \varepsilon) - \frac{\rho \ln 2}{\ln |z|} \right) = \rho + \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично, если выполняется условие (C'), то получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int_0^{1/2} \frac{\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)}{\alpha} d\alpha &\leq \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int_0^{1/2} \frac{2^{4-\rho} \alpha^2 |z|^{\rho+\varepsilon}}{\alpha} d\alpha = \\ &= \limsup_{z \rightarrow \infty} \left((\rho + \varepsilon) - \frac{\rho \ln 2}{2 \ln |z|} \right) = \rho + \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Регулярные множества с простой кратностью ($q_n = 1, n = 1, 2, \dots$) использовались многими авторами при построении канонических произведений и при решении задач интерполяции в различных классах аналитических функций конечного порядка. Укажем лишь несколько работ: Б. Я. Левин [1], А. Ф. Леонтьев [8], А. Ф. Гришин [9], К. Г. Малютин [10, 11] и мн. др.

Леммы 3 и 4 имеют и самостоятельное значение. Так, используя стандартные рассуждения из работы [1, с. 163–167], можно показать, что если дивизор D является слабо регулярным при порядке $\rho \geq 0$, то вне исключительных $EW R(\rho, \varepsilon)$ -кружков выполняется асимптотическая оценка

$$|E_D(z)| \geq \exp(-|z|^{\rho+\varepsilon}), \quad |z| > r_\varepsilon.$$

Это неравенство является обобщением известной теоремы А. Картана [12] об оценке снизу модуля многочлена на случай канонической функции слабо регулярного при порядке $\rho \geq 0$ дивизора D (см. также [1, глава 1, §7, Теорема 10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : ГИТТЛ, 1956. — 632 с.
2. Malyutin, K. G. Weakly regular sets / K. G. Malyutin, O. A. Bozhenko // Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy. — 2013. — V. 4. — P. 1–8.
3. Боженко, О. А. Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка / О. А. Боженко, А. Ф. Гришин, К. Г. Малютин // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79, вып. 2. — С. 21–44.
4. Малютин, К. Г. Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка / К. Г. Малютин, О. А. Боженко // Сборник трудов Ин-та математики НАН Украины. — 2013. — Т. 10, № 4–5. — С. 412–423.
5. Малютин, К. Г. Интерполяционные задачи типа А. Ф. Леонтьева / К. Г. Малютин // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2018. — Т. 153. — С. 108–127.
6. Лапин, Г. П. Интерполирование в классе целых функций конечного порядка / Г. П. Лапин // Известия вузов, матем. — 1959. — № 5. — С. 146–153.
7. Леонтьев, А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка / А. Ф. Леонтьев // Докл. АН СССР. — 1948. — № 5. — С. 785–787.
8. Леонтьев, А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. — М. : Наука, 1976. — 536 с.
9. Гришин, А. Ф. О множествах регулярного роста целых функций. III / А. Ф. Гришин // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1984. — Вып. 42. — С. 37–43.
10. Малютин, К. Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I / К. Г. Малютин // Известия АН. Сер. математика. — 1995. — Т. 59, вып. 4. — С. 125–154.
11. Малютин, К. Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II / К. Г. Малютин // Известия АН. Сер. математика. — 1995. — Т. 59, вып. 5. — С. 103–126.
12. Cartan, H. Sur les systèmes des fonctions holomorphes à variétés linéaires et leurs applications / H. Cartan // Ann. Ec. Norm. Sup. — 1928. — V. 3. — P. 255–346.

REFERENCES

1. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. [Levin B.Ya. Raspredeleniye korney tselykh funktsiy]. Moscow, 1956, 632 p.
2. Malyutin K.G. Weakly regular sets. Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy, 2013, vol. 4, pp. 1–8.
3. Bozhenko O.A., Grishin A.F., Malyutin K.G. The interpolation problem in the class of entire functions of zero order. [Bozhenko O.A., Grishin A.F., Malyutin K.G. Interpoliacionnay zadacha v klasse tselykh funktsiy nulevogo poryadka]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika — Izvestiya Akademii nauk USSR. Math series*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 21–44.
4. Malyutin K.G., Bozhenko O.A. Multiple interpolation problem in the class of zero-order entire functions. [Malyutin K.G., Bozhenko O.A. Zadacha kratnoy interpolatsii v klasse tselykh funktsiy nulevogo poryadka]. *Sbornik trudov In-ta matematiki NAN Ukrainy — Proceedings of the Institute of mathematics of the national Academy of Sciences of Ukraine*, 2013, vol. 10, no. 4–5, pp. 412–423.
5. Malyutin K.G. Interpolation problems of type A.F. Leontiev. [Malyutin K.G. Interpoliatsionnyye zadachi tipa A.F. Leont'yeva]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya «Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory — Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 153, pp. 108–127.
6. Lapin G.P. Interpolation in the class of entire functions of finite order. [Lapin G.P. Interpolirovaniye v klasse tselykh funktsiy konechnogo poryadka]. *Izvestiya vuzov, matem.* —

University News, Math., 1959, no. 5, pp. 146–153.

7. Leon'ev A.V. On the question of interpolation in the class of entire functions of finite order. [Leon'ev A.V. Ob interpolirovanii v klasse tselykh funktsiy konechnogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Doklady Mathematics of the USSR*, 1948, no. 5, pp. 785–787.

8. Leon'ev A.V. Rows of exponents. [Leon'ev A.V. Ryady eksponent]. Moscow, Science, 1976, 536 p.

9. Grishin A.F. On sets of regular growth of entire functions. III. [Grishin A.F. O mnozhestvakh regul'yarnogo rosta tselykh funktsiy. III]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya — Function theory, functional analysis and their applications*, 1984, no. 42, pp. 37–43.

10. Malyutin K.G. On sets of regular growth of functions in a half-plane. I. [Malyutin K.G. O mnozhestvakh regul'yarnogo rosta funktsiy v poluploskosti. I]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika — Izvestiya Akademii nauk USSR. Math series*, 1995, vol. 59, no. 4, pp. 125–154.

11. Malyutin K.G. On sets of regular growth of functions in a half-plane. II. [Malyutin K.G. O mnozhestvakh regul'yarnogo rosta funktsiy v poluploskosti. II]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika — Izvestiya Akademii nauk USSR. Math series*, 1995, vol. 59, no. 5, pp. 103–126.

12. Cartan, H. Sur les systèmes des fonctions holomorphes à variétés linéaires et leurs applications. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 1928, no. 3, pp. 255–346.

*Кабанко Михаил Владимирович, доцент,
факультет физики, математики, инфор-
матики, кафедра математического анали-
за и прикладной математики, Курский го-
сударственный университет, Курск, Рос-
сия*

E-mail: kabankom@gmail.com

*Kabanko Mikhail Vladimirovich, assistant
professor, Department of Physics,
Mathematics, Informatics, Chair of
Mathematical Analysis and Applied
Mathematics, Kursk State University, Kursk,
Russia*

E-mail: kabankom@gmail.com