УДК 517.954

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН НА ГРАФЕ С УСЛОВИЯМИ ТИПА ВОЗМУЩЕННЫХ SWEEPING ПРОЦЕССОВ*

**М. Б. Зверева**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 05.04.2021 г.

**Аннотация**. В настоящей работе исследуется начально-краевая задача с граничными условиями гистерезисного типа, описывающая колебательный процесс струнной системы на геометрическом графе-звезда с упругой опорой в узле. Предполагается, что на движение упруго закрепленных концов струн установлены ограничители, которые могут перемещаться в перпендикулярном к плоскости графа направлении. Соответствующие граничные условия имеют вид $-u_x^i(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$. Здесь функция $u^i(x,t)$ описывает форму струны на $i$-м ребре графа ($i = 1,2,...,n$); множество $N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$ обозначает внешний нормальный конус к ограниченному замкнутому выпуклому множеству $C_i(t)$ в точке $u^i(l,t) \in C_i(t)$; множество $C_i(t)$ определяет движение ограничителей. Получен аналог формулы Даламбера.

**Ключевые слова**: волновое уравнение, колебания струны, гистерезис, геометрический граф.

# MODELING OF OSCILLATIONS OF A STRING SYSTEM ON A GRAPH WITH CONDITIONS OF PERTURBED SWEEPING PROCESSES TYPE

**M. B. Zvereva**

**Abstract**. In this paper we study an initial-boundary value problem with boundary conditions of the hysteresis type, which describes the process of oscillations of a string system on a geometric graph-star with an elastic support at a node. It is assumed that the movement of the elastically fixed ends of the strings is equipped with limiters that can move in the perpendicular to the plane of the graph direction. The corresponding boundary conditions are $-u_x^i(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$. Here the function $u^i(x,t)$ describes the string form on the $i$-th edge of the graph ($i = 1,2,...,n$); the set $N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$ denotes the outward normal cone to the bounded closed convex set $C_i(t)$ at the point $u^i(l,t) \in C_i(t)$; the set $C_i(t)$ determines the movement of the limiters. An analogue of the d'Alembert formula is obtained.

**Keywords**: wave equation, string oscillations, hysteresis, geometric graph.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения на пространственных сетях (геометрических графах), привлекшие внимание математиков несколько десятилетий назад, актуальны в самых разных разделах техники и естествознания. Они возникают при описании явлений в непрерывных

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20-51-15003 НЦНИ-а.

© Зверева М. Б., 2021

системах сетеподобной структуры (электрических, гидравлических, акустических сетях, тепловодах, волноводах, нейронных и вычислительных системах, упругих решетчатых конструкциях, электронных системах и т. д.).

Значительные результаты для задач на графах с линейными краевыми условиями получены научной школой Ю. В. Покорного (см., например, [1]–[8]).

В данной работе получена формула представления решения начально-краевой задачи, описывающей колебательный процесс струнной системы, расположенной вдоль геометрического графа-звезда с упругой опорой в узле и с граничными условиями гистерезисного типа. Такие условия возникают за счет сосредоточенных в граничных точках ограничителей $[-h_i,h_i]$ на движение упруго закрепленных концов струн.

Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, t > 0 (i = 1,2,...,n) \\ u^i(x,0) = \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u^1(0,t) = u^2(0,t) = ...u^n(0,t), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(0,t) = \gamma u^1(0,t), \\ -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t)), \\ u^i(l,t) \in C_i(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функция $u^i(x,t)$ описывает форму $i$-й струны в момент времени $t$. Начальная форма задана функциями $\varphi^i(x)$. Начальная скорость предполагается равной нулю. В узле графа (точка $x = 0$) прикреплена пружина жесткости $\gamma$. В граничных вершинах каждого ребра установлены пружины жесткости $\gamma_i$. Отображение $C_i(t) = [-h_i,h_i] + \xi_i(t)$ задает движение ограничителей в перпендикулярном к плоскости графа направлении. В ходе колебательного процесса конец каждой струны $u^i(l,t)$ находится внутри ограничителя, т. е. выполнено условие

$$u^i(l,t) \in C_i(t). \tag{2}$$

Пока $u^i(l,t)$ является внутренней точкой $C_i(t)$, выполняется условие

$$u^{i\prime}_x(l,t) + \gamma_i u^i(l,t) = 0.$$

Если конец $i$-й струны касается граничных точек ограничителя, то некоторое время выполнены условия $u^i(l,t) = \xi_i(t) + h_i$ или $u^i(l,t) = \xi_i(t) - h_i$. Этот факт может быть описан с помощью включения

$$-\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t)), \quad i = 1,2,...,n \tag{3}$$

где множество $N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$ — внешний нормальный конус к $C_i(t)$ в точке $u^i(l,t)$.

Аналог данной задачи с граничными условиями вида

$$-\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$$

был рассмотрен в работе [9].

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе мы напоминаем некоторые понятия и определения из [10], [11], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $H$ — гильбертово пространство. Скалярное произведение в $H$ будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для замкнутого выпуклого множества $C \subset H$ и $x \in C$ множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x\rangle \leqslant 0 \quad \forall c \in C\}$$

обозначает внешний нормальный конус к $C$ в точке $x$.

Заметим, что всегда $0 \in N_C(x)$, $N_{\{x\}}(x) = H$, и $N_C(x) = \{0\}$ для $x \in intC$, где $intC$ — множество внутренних точек $C$ ( предполагается, что $intC \neq \varnothing$). Последнее соотношение показывает, что внешний нормальный конус нетривиален только при $x \in \partial C$, где $\partial C$ — граница множества C.

Хаусдорфово расстояние $d_H(C_1,C_2)$ между замкнутыми множествами $C_1$ и $C_2$ задается формулой

$$d_H(C_1,C_2) = \max\{\sup_{x\in C_2} \operatorname{dist}(x,C_1), \sup_{x\in C_1} \operatorname{dist}(x,C_2)\},$$

где $dist(x,C) = inf\{\|x - c\|, c \in C\}$. Рассмотрим так называемый возмущенный sweeping процесс.

$$-x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f(t,x(t)), \quad t \in [T_0,T] \tag{4}$$

$$x(T_0) = x_0, \tag{5}$$

где $C(\cdot)$ – многозначное отображение из $I = [T_0,T]$ в $H$, $N_{C(t)}(x(t))$ – внешний нормальный конус к $C(t)$ в точке $x(t)$.

Функция $x : I \to H$ называется решением задачи (4),(5) если

(a) $x(T_0) = x_0$;

(b) $x(t) \in C(t)$ для всех $t \in I$;

(c) $x$ дифференцируема для почти всех $t \in I$;

(d) $-x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f(t,x(t))$ для почти всех $t \in I$.

Далее мы будем использовать следующую теорему ( Теорема 1 из [11]).

**Теорема 1.** *Пусть для каждого $t \in I$ множество $C(t) \subset H$ является непустым, замкнутым и выпуклым. Множество $C(t)$ изменяется абсолютно непрерывно, т. е. существует абсолютно непрерывная на $I$ функция $v(t)$ такая, что хаусдорфово расстояние $d_H(C(t), C(s))$ удовлетворяет неравенству*

$$d_H(C(t), C(s)) \leqslant |v(t) - v(s)|$$

*для любых $s,t \in I$. Пусть $f : I \times H \to H$ –измеримое отображение на $I$ такое, что*
*(i) для любого $\eta > 0$ существует неотрицательная функция $k_\eta(\cdot) \in L^1(I,R)$ такая, что для всех $t \in I$ и для любых $(x,y) \in B[0,\eta] \times B[0,\eta]$ выполняется*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant k_\eta(t)\|x - y\|,$$

*где $B[0,\eta]$ обозначает замкнутый шар радиуса $\eta$ с центром в 0;*
*(ii) существует неотрицательная функция $\beta(\cdot) \in L^1(I,R)$ такая, что для всех $t \in I$ и для всех $x \in \bigcup\limits_{s\in I} C(s)$ верно $\|f(t,x)\| \leqslant \beta(t)(1 + \|x\|)$.*
*Тогда для любого $x_0 \in C(T_0)$ возмущенный sweeping процесс (4),(5) имеет одно и только одно абсолютно непрерывное решение $x(\cdot)$.*

В настоящей работе будем рассматривать случай, когда движение множества $C(t)$ задается точкой $v(t)$, т. е. $C(t) = [-h,h] + v(t)$, где $t \in I$. Заметим, что если $v(t)$ — абсолютно непрерывная на $I$ функция, то $d_H(C(t), C(s)) \leqslant |v(t) - v(s)|$. В самом деле, зафиксируем $x \in C(s)$. Тогда $y = (x - v(s)) + v(t) \in [-h,h] + v(t) = C(t)$. Значит, $dist(x,C(t)) \leqslant |v(t) - v(s)|$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in C(s)} dist(x,C(t)) \leqslant |v(t) - v(s)|$. Аналогично, $\sup\limits_{y\in C(t)} dist(y,C(s)) \leqslant |v(t) - v(s)|$, и мы получаем требуемое.

## 3. ЗАДАЧА НА ГРАФЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ТИПА

Пусть точки $O$, $A_1$, $A_2$,...,$A_n$ принадлежат горизонтальной плоскости $\pi$. Рассмотрим механическую систему, состоящую из $n$ струн, которые в положении равновесия совпадают с отрезками $OA_1$, $OA_2$,...,$OA_n$. Пусть концы струн связаны в точке $O$. Предположим, что в точке $O$ дополнительно прикреплена пружина жесткости $\gamma$. Граф $\Gamma$ состоит из ребер (интервалов) $OA_1$, $OA_2$,...,$OA_n$ и вершин $O$, $A_1$, $A_2$,...,$A_n$ . Мы будем использовать понятия и терминологию из [3]. Под воздействием внешней силы, направленной перпендикулярно плоскости $\pi$, струны отклоняются от положения равновесия. Мы предполагаем, что отклонение всех точек параллельно прямой, перпендикулярной плоскости $\pi$ и рассматриваем случай малых отклонений от положения равновесия. Введем систему координат OXY, чтобы описать деформации струн. Ось $Ox_i$ для $i$-й струны ($i = 1,2,...,n$) содержит отрезок $OA_i$ и направлена от $O$ к $A_i$. Ось $OY$ направлена перпендикулярно к плоскости $\pi$. Пусть $u^i(x,t)$ описывает отклонение $i$-й струны от положения равновесия в момент времени $t$. Будем предполагать, что длины всех струн равны $l$, т.е. $0 \leqslant x \leqslant l$. Таким образом, колебания каждой струны системы могут быть описаны волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}.$$

Соединение струн в узле означает, что

$$u^1(0,t) = u^i(0,t)(i = 1,2,...,n). \tag{6}$$

Условие упругой опоры в узле имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x}(0,t) = \gamma u^1(0,t). \tag{7}$$

Мы предполагаем, что концы струн $u^i(l,t)$ упруго закреплены, и на их движение установлены ограничители $[-h_i, h_i]$, которые, в свою очередь, могут перемещаться в перпендикулярном к плоскости $\pi$ направлении так, что их движение задано $C_i(t) = [-h_i,h_i] + \xi_i(t)$, где функции $\xi_i(t)$ являются абсолютно непрерывными для всех $t \geqslant 0$ ($i = 1,2,...,n$). Таким образом, для всех $t$ выполнено условие (2). При этом граничные условия могут быть записаны в виде (3), т. е.

$$-\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t)), \quad i = 1,2,...,n.$$

Для каждого фиксированного $t$ множество $N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$ определено как

$$N_{C_i(t)}(u^i(l,t)) = \{\xi \in R^1 : \xi \cdot (c - u^i(l,t)) \leqslant 0 \quad \forall c \in C_i(t)\}.$$

Заметим, что если $u^i(l,t)$ —внутренняя точка $C_i(t)$, то $N_{C_i(t)}(u^i(l,t)) = \{0\}$, и получаем условие $u^i_x(l,t) + \gamma_i u^i(l,t) = 0$. Когда конец струны соприкасается с граничными точками ограничителя, то возникает сила реакции опоры $f_i(t)$, блокирующая этот конец так, что $-u^i_x(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) = -f_i(t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t))$. Причем, $N_{C_i(t)}(u^i(l,t)) = (-\infty, 0]$, если $u^i(l,t) = -h_i + \xi_i(t)$, и $N_{C_i(t)}(u^i(l,t)) = [0, +\infty)$, если $u^i(l,t) = h_i + \xi_i(t)$.

В начальный момент времени начальная форма и начальная скорость струн заданы как

$$u^i(x,0) = \varphi^i(x), \tag{8}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{9}$$

где $\varphi^1(0) = \varphi^2(0) = ...\varphi^n(0)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x}(0) = \gamma\varphi^1(0)$, $\varphi^i(l) \in C_i(0)$, $-\varphi^{i'}(l) - \gamma_i\varphi^i(l) \in N_{C_i(0)}(\varphi^i(l))$. Таким образом, математическая модель задачи имеет вид (1).

Обозначим через $Q_T$ прямоугольник $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$. Воспользуемся классом функций, введенным В.А. Ильиным [12]. Полагаем, что функция $v$ принадлежит классу $\widehat{W}_1^1(Q_T)$, если функция $v(x,t)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $Q_T$ и имеет в нем обобщенные частные производные $v'_x(x,t)$ и $v'_t(x,t)$, каждая из которых не только принадлежит классу $L_1(Q_T)$, но и принадлежит классу $L_1[0 \leqslant x \leqslant l]$ для любого фиксированного $t$ из отрезка $[0,T]$ и принадлежит классу $L_1[0 \leqslant t \leqslant T]$ для любого фиксированного $x$ из отрезка $[0,l]$.

Решением задачи (1) будем называть функцию $u(x,t)$ такую, что:
1) сужения $u(x,t)$ на ребра совпадают с $u^i(x,t)$ $(i = 1,2,...,n)$.
2) Для всех $t \geqslant 0$ выполнены условия (2), (6).
3) Для почти всех $t \geqslant 0$ выполнены условия (3), (7).
4) Условия (8), (9) выполнены для всех $x \in [0,l]$ и для почти всех $x \in [0,l]$ соответственно.
5) Для всех $T > 0$ функции $u^i \in \widehat{W}_1^1(Q_T)$, и интегральное равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T u^i(x,t)[\frac{\partial^2\Psi^i}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2\Psi^i}{\partial x^2}(x,t)]dxdt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \frac{\partial\Psi^i}{\partial t}(x,0)\varphi^i(x)dx+ \tag{10}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T (u^i(l,t)\frac{\partial\Psi^i}{\partial x}(l,t) - \Psi^i(l,t)\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t))dt = 0$$

выполняется для любых $\Psi^i \in C^2(Q_T)$ $(i = 1,2,...,n)$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\Psi^i}{\partial x}(0,t) = \gamma\Psi^1(0,t)$, $\Psi^i(x,T) = 0$, $\dfrac{\partial\Psi^i}{\partial t}(x,T) = 0$, $\Psi^1(0,t) = \Psi^2(0,t) = ...\Psi^n(0,t)$.

Рассмотрим функции $\Phi_i$ следующего вида:
Если $x \in [0,l]$ то $\Phi^i(x) = \Phi^i_0(x) = \varphi^i(x)$;
Для всех $i = 1,2,...,n$ и $j \in N$, если $x \in [jl,(j+1)l]$ то

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_j(x) = 2g^i_{j-1}(x-l) - \Phi^i_{1-j}(2l-x),$$

где $g^i_{j-1}$ — решение задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g^i_{j-1}(t) \in N_{C_i(t)}(g^i_{j-1}(t)) + \gamma_i g^i_{j-1}(t) + \Phi^{i'}_{1-j}(l-t), \\ g^i_{j-1}((j-1)l) = g^i_{j-2}((j-1)l), t \in [(j-1)l, jl]. \end{cases}$$

Если $x \in [-jl,(-j+1)l]$ то

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{-j}(x) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{j-1}(-x) - \Phi^i_{j-1}(-x) + \frac{2\gamma}{n^2}e^{\frac{\gamma x}{n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{(-j+1)l}^{x}\Phi^k_{j-1}(-\tau)e^{\frac{-\gamma\tau}{n}}d\tau+$$

$$+\frac{e^{\frac{\gamma(x+(j-1)l)}{n}}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{-j+1}(l-jl) - \sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{j-1}(jl-l)\right).$$

**Теорема 2.** *Пусть функции $\xi_i(t)$ являются абсолютно непрерывными для всех $t \geqslant 0$; функции $\varphi^i(x)$ являются абсолютно непрерывными на $[0,l]$. Тогда решение задачи (1) может быть представлено в виде*

$$u^i(x,t) = \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2}, \tag{11}$$

*где* $i = 1,2,...,n$.

*Доказательство.* Предположим формально, что решение задачи (1) имеет вид (11). Тогда $u^i(x,0) = \Phi^i(x) = \Phi_0^i(x) = \varphi_i(x)$, где $x \in [0,l]$. Из (6), (7) имеем равенство

$$n\sum_{i=1}^{n} u_x^i(0,t) = \gamma \sum_{i=1}^{n} u^i(0,t).$$

Тогда

$$n\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(-t) + n\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(t) = \gamma\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(-t) + \gamma\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(t). \tag{12}$$

Обозначим $v(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Phi^i(t)$. Тогда $v(-t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Phi^i(-t)$, и равенство (12) может быть представлено в виде

$$nv'(t) + nv'(-t) = \gamma v(-t) + \gamma v(t).$$

Если функция $v(t)$ известна для $t \geqslant 0$, то из последнего равенства можем определить $v(-t)$. Обозначим $s = -t$. Тогда

$$nv'(s) - \gamma v(s) = \gamma v(-s) - nv'(-s).$$

Таким образом, имеем

$$v(s) = v(-s) + \frac{2\gamma}{n} e^{\frac{\gamma s}{n}} \int\limits_a^s e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} v(-\tau)d\tau + e^{\frac{\gamma(s-a)}{n}}(v(a) - v(-a)),$$

где $a$ — произвольное число. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(s) = \sum_{i=1}^{n} \Phi^i(-s) + \frac{2\gamma}{n} e^{\frac{\gamma s}{n}} \int\limits_a^s e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} \sum_{i=1}^{n} \Phi^i(-\tau)d\tau + e^{\frac{\gamma(s-a)}{n}}(\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(a) - \sum_{i=1}^{n} \Phi^i(-a)). \tag{13}$$

Из (6) следует равенство

$$\Phi^1(s) + \Phi^1(-s) = \Phi^2(s) + \Phi^2(-s) = ... = \Phi^n(s) + \Phi^n(-s). \tag{14}$$

Тогда (13) может быть переписано как

$$n\Phi^1(s) + n\Phi^1(-s) = \frac{2\gamma}{n} e^{\frac{\gamma s}{n}} \int\limits_a^s e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-\tau)d\tau + e^{\frac{\gamma(s-a)}{n}}(\sum_{k=1}^{n} \Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-a)) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-s).$$

Следовательно,

$$\Phi^1(s) = -\Phi^1(-s) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-s) + \frac{2\gamma}{n^2} e^{\frac{\gamma s}{n}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^s \Phi^k(-\tau) e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} d\tau +$$

$$+\frac{e^{\frac{\gamma(s-a)}{n}}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-a)\right).$$

Аналогично, для всех $i = 1,2,...,n$ имеем

$$\Phi^i(s) = -\Phi^i(-s) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k(-s) + \frac{2\gamma}{n^2}e^{\frac{\gamma s}{n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_a^s \Phi^k(-\tau)e^{\frac{-\gamma\tau}{n}}d\tau+ \tag{15}$$

$$+\frac{e^{\frac{\gamma(s-a)}{n}}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n}\Phi^k(-a)\right).$$

Последнее равенство позволяет нам определить значение функции $\Phi^i(x)$ для $x \leqslant 0$, если нам известно $\Phi^i(x)$ для $x \geqslant 0$. В частности, если $x \in [-l,0]$, то полагая $a = 0$, получим

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{-1}(x) = -\varphi^i(-x) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi^k(-x) + \frac{2\gamma}{n^2}e^{\frac{\gamma x}{n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^x \varphi^k(-\tau)e^{\frac{-\gamma\tau}{n}}d\tau.$$

Так как функции $\varphi^k(x)$ $(k = 1,2,...,n)$ являются абсолютно непрерывными на $[0,l]$, то функция $\Phi^i_{-1}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-l,0]$. Заметим также, что $\Phi^i_{-1}(0) = \Phi^i_0(0) = \varphi^i(0)$.

Воспользуемся сейчас условием (3). Если решение задачи имеет вид (11), то

$$-u^i_t(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t)) + \gamma_i u^i(l,t) + \Phi^{i'}(l-t). \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда $t \in [0,l]$. Обозначим $g^i_0(t) = u^i(l,t)$. Тогда $g^i_0(t)$ —решение задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g^i_0(t) \in N_{C_i(t)}(g^i_0(t)) + \gamma_i g^i_0(t) + \varphi^{i'}(l-t), \\ g^i_0(0) = \varphi^i(l), t \in [0,l]. \end{cases} \tag{17}$$

Покажем, что последняя задача имеет единственное решение. Рассмотрим функцию $w^i(t) = g^i_0(t) + \int\limits_0^t \varphi^{i'}(l-s)ds$ и множество $D_i(t) = [-h_i,h_i] + \xi_i(t) + \int\limits_0^t \varphi^{i'}(l-s)ds$. Функция $v_i(t) = \xi_i(t) + \int_0^t \varphi'(l-s)ds$ абсолютно непрерывна $[0,l]$. Следовательно,

$$d_H(D_i(t), D_i(s)) \leqslant |v_i(t) - v_i(s)|.$$

Заметим, что $N_{C_i(t)}(g^i_0(t)) = N_{D_i(t)}(w^i(t))$. Таким образом, получаем задачу:

$$-\frac{d}{dt}w^i(t) \in N_{D_i(t)}(w^i(t)) + \gamma_i w^i(t) - \gamma_i\int\limits_0^t \varphi^{i'}(l-s)ds,$$

$$w^i(0) = \varphi^i(l) \in D_i(0), t \in [0,l].$$

Воспользуемся теоремой 1. Здесь

$$f_i(t,w^i(t)) = \gamma_i w^i(t) - \gamma_i\int_0^t \varphi^{i'}(l-s)ds.$$

Тогда

$$|f_i(t,x) - f_i(t,y)| = \gamma_i|x-y|;$$

$$|f_i(t,x)| \leqslant \beta_i(1+|x|),$$

где $\beta_i = \max\{\gamma_i, \gamma_i\int\limits_0^l |\varphi^{i'}(l-s)|ds\}$. Согласно теореме 1, последняя задача имеет единственное абсолютно непрерывное на $[0,l]$ решение $w^i(t)$. Таким образом, для всех $i = 1,2,...,n$ задача

(17) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $g_0^i(t)$, причем $g_0^i(t) \in C_i(t)$. С другой стороны,

$$\Phi^i(l-t) + \Phi^i(l+t) = 2g_0^i(t).$$

Значит,

$$\Phi^i(x) = \Phi_1^i(x) = 2g_0^i(x-l) - \varphi^i(2l-x),$$

где $x \in [l{,}2l]$. Заметим, что функция $\Phi^i(x)$ абсолютно непрерывна на $[l{,}2l]$, и $\Phi_1^i(l) = \varphi^i(l)$.

Определим $\Phi^i(x)$ для $x \in [-2l, -l]$, воспользовавшись равенством (15). Возьмем $a = -l$. Имеем

$$\Phi^i(x) = \Phi_{-2}^i(x) = -\Phi_1^i(-x) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n \Phi_1^k(-x) + \frac{2\gamma}{n^2}e^{\frac{\gamma x}{n}}\sum_{k=1}^n \int_{-l}^x \Phi_1^k(-\tau)e^{\frac{-\gamma\tau}{n}}d\tau +$$

$$+\frac{e^{\frac{\gamma(x+l)}{n}}}{n}\left(\sum_{k=1}^n \Phi_{-1}^k(-l) - \sum_{k=1}^n \Phi_1^k(l)\right).$$

Заметим, что $\Phi_{-2}^i(x)$ является абсолютно непрерывной на $[-2l, -l]$. Покажем, что $\Phi_{-2}^i(-l) = \Phi_{-1}^i(-l)$. Имеем

$$\Phi_{-2}^i(-l) = -\Phi_1^i(l) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n \Phi_1^k(l) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \Phi_{-1}^k(-l) - \sum_{k=1}^n \Phi_1^k(l)\right) =$$

$$= -\Phi_1^i(l) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \Phi_{-1}^k(-l) + \sum_{k=1}^n \Phi_1^k(l)\right).$$

Поскольку для всех $k$ верно $\Phi_{-1}^k(-l) + \Phi_1^k(l) = \Phi_{-1}^i(-l) + \Phi_1^i(l)$ получаем, что $\Phi_{-2}^i(-l) = \Phi_{-1}^i(-l)$.

Рассмотрим случай, когда $t \in [l{,}2l]$. Определим $g_1^i(t) = u^i(l{,}t)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g_1^i(t) \in N_{C_i(t)}(g_1^i(t)) + \gamma_i g_1^i(t) + \Phi_{-1}^{i\prime}(l-t), \\ g_1^i(l) = g_0^i(l), t \in [l{,}2l]. \end{cases}$$

Аналогично задаче (17) последняя задача имеет единственное абсолютно непрерывное решение $g_1^i(t)$, причем $g_1^i(t) \in C^i(t)$. Определим $\Phi^i(x)$ на промежуток $[2l{,}3l]$ как

$$\Phi^i(x) = \Phi_2^i(x) = 2g_1^i(x-l) - \Phi_{-1}^i(2l-x).$$

Заметим, что функции $\Phi_2^i(x)$ являются абсолютно непрерывными на $[2l, 3l]$. Покажем, что $\Phi_2^i(2l) = \Phi_1^i(2l)$. Имеем

$$\Phi_2^i(2l) = 2g_1^i(l) - \Phi_{-1}^i(0) = 2g_0^i(l) - \varphi^i(0) = \Phi_1^i(2l).$$

Покажем, что для всех $j \in N$, если $x \in [jl{,}(j+1)l]$ то

$$\Phi^i(x) = \Phi_j^i(x) = 2g_{j-1}^i(x-l) - \Phi_{1-j}^i(2l-x),$$

где $g_{j-1}^i$ —решение задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g_{j-1}^i(t) \in N_{C_i(t)}(g_{j-1}^i(t)) + \gamma_i g_{j-1}^i(t) + \Phi_{1-j}^{i\prime}(l-t), \\ g_{j-1}^i((j-1)l) = g_{j-2}^i((j-1)l), t \in [(j-1)l{,}jl]. \end{cases}$$

Причем, функции $\Phi^i_j$ абсолютно непрерывны на $[jl,(j+1)l]$, и верно равенство $\Phi^i_j(jl) = \Phi^i_{j-1}(jl)$, где $i = 1,2,...,n$. Если $x \in [-jl,(-j+1)l]$ то

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{-j}(x) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{j-1}(-x) - \Phi^i_{j-1}(-x) + \frac{2\gamma}{n^2}e^{\frac{\gamma x}{n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{(-j+1)l}^{x}\Phi^k_{j-1}(-\tau)e^{\frac{-\gamma\tau}{n}}d\tau +$$

$$+\frac{e^{\frac{\gamma(x+(j-1)l)}{n}}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{-j+1}(l-jl) - \sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{j-1}(jl-l)\right),$$

где функции $\Phi^i_{-j}$ абсолютно непрерывны на $[-jl,(-j+1)l]$, и верно равенство $\Phi^i_{-j}(-(j+1)l) = \Phi^i_{-j+1}((-j+1)l)$, где $i = 1,2,...,n$.

Для $j = 1,2$ предположение доказано. Пусть оно верно для $j \leqslant m$. Покажем справедливость для $j = m+1$.

Рассмотрим случай, когда $t \in [ml,(m+1)l]$. Определим $g^i_m(t) = u^i(l,t)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}g^i_m(t) \in N_{C_i(t)}(g^i_m(t)) + \gamma_i g^i_m(t) + \Phi^{i'}_{-m}(l-t), \\ g^i_m(ml) = g^i_{m-1}(ml), t \in [ml,(m+1)l]. \end{cases}$$

Последняя задача имеет единственное решение $g^i_m(t)$, где функция $g^i_m(t)$ абсолютно непрерывна на $[ml,(m+1)l]$, и $g^i_m(t) \in C_i(t)$. Тогда

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{m+1}(x) = 2g^i_m(x-l) - \Phi^i_{-m}(2l-x).$$

Заметим, что $\Phi^i_{m+1}(x)$ абсолютно непрерывна на $[(m+1)l,(m+2)l]$. Покажем, что $\Phi^i_{m+1}((m+1)l) = \Phi^i_m((m+1)l)$. Имеем

$$\Phi^i_{m+1}((m+1)l) = 2g^i_m(ml) - \Phi^i_{-m}(l-ml) = 2g^i_{m-1}(l) - \Phi^i_{1-m}(l-ml) = \Phi^i_m((m+1)l).$$

Полагая $a = -ml$ в равенстве (15), получим

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{-(m+1)}(x) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_m(-x) - \Phi^i_m(-x) + \frac{2\gamma}{n^2}e^{\frac{\gamma x}{n}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-ml}^{x}\Phi^k_m(-\tau)e^{\frac{-\gamma\tau}{n}}d\tau +$$

$$+\frac{e^{\frac{\gamma(x+ml)}{n}}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{-m}(-ml) - \sum_{k=1}^{n}\Phi^k_m(ml)\right).$$

Таким образом, функции $\Phi^i_{-(m+1)}(x)$ абсолютно непрерывны на $[-(m+1)l,-ml]$. Покажем, что равенство $\Phi^i_{-(m+1)}(-ml) = \Phi^i_{-m}(-ml)$ верно для всех $i = 1,2,...,n$. Имеем

$$\Phi^i_{-(m+1)}(-ml) = -\Phi^i_m(ml) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_m(ml) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_{-m}(-ml) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^k_m(ml) =$$

$$= -\Phi^i_m(ml) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\Phi^k_m(ml) + \Phi^k_{-m}(-ml)\right).$$

Поскольку $\Phi^k_m(ml) = \Phi^k_{m-1}(ml)$, то $\Phi^k_m(ml) + \Phi^k_{-m}(-ml) = \Phi^i_m(ml) + \Phi^i_{-m}(-ml)$. Получили $\Phi^i_{-(m+1)}(-ml) = \Phi^i_{-m}(-ml)$, и предположение доказано.

Таким образом, определим $\Phi^i(x)$ для всех $x \in R$. Покажем, что функции $u^i(x,t)$, определенные равенством (11), являются решением задачи (1).

Заметим, что функции $u^i(x,t) \in \widehat{W}_1^1(Q_T)$ для всех $T > 0$, поскольку функции $\Phi^i(x)$ абсолютно непрерывны на всей оси.

Из равенства (15) получаем, что

$$\Phi^1(-t) + \Phi^1(t) = \Phi^2(-t) + \Phi^2(t) = ... = \Phi^n(-t) + \Phi^n(t), \tag{18}$$

то равенство (6) верно для всех $t \geqslant 0$.

Так как $u^i(l,t) = g^i(t)$ и $g^i(t) \in C_i(t)$, то равенство (2) верно для всех $t \geqslant 0$.

Из равенства (15) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(x) = -\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(-x) + 2\sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-x) + \frac{2\gamma}{n} e^{\frac{\gamma x}{n}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^x \Phi^k(-\tau) e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} d\tau +$$

$$+ e^{\frac{\gamma(x-a)}{n}} \left( \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-a) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi^i(-x) + \frac{2\gamma}{n} e^{\frac{\gamma x}{n}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^x \Phi^k(-\tau) e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} d\tau + e^{\frac{\gamma(x-a)}{n}} \left( \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-a) \right).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(x) = -\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(-x) + \frac{2\gamma^2}{n^2} e^{\frac{\gamma x}{n}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^x \Phi^k(-\tau) e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} d\tau +$$

$$+ \frac{2\gamma}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-x) + \gamma \frac{e^{\frac{\gamma(x-a)}{n}}}{n} \left( \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-a) \right),$$

и

$$n \sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(x) + n \sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(-x) = \frac{2\gamma^2}{n} e^{\frac{\gamma x}{n}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^x \Phi^k(-\tau) e^{\frac{-\gamma\tau}{n}} d\tau +$$

$$+ 2\gamma \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-x) + \gamma e^{\frac{\gamma(x-a)}{n}} \left( \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(a) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^k(-a) \right) = \gamma n (\Phi^1(x) + \Phi^1(-x)).$$

Получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(x) + \sum_{i=1}^{n} \Phi^{i'}(-x) = \gamma(\Phi^1(x) + \Phi^1(-x)). \tag{19}$$

Таким образом, равенство (7) верно для почти всех $t \geqslant 0$.

Поскольку для всех $t \geqslant 0$ имеем

$$\Phi^i(l-t) + \Phi^i(l+t) = 2g^i(t),$$

то для почти всех $t$

$$-\Phi^{i'}(l-t) + \Phi^{i'}(l+t) = 2g^{i'}(t).$$

Так как $-g^{i'}(t) \in N_{C_i(t)}(g^i(t)) + \gamma_i(g^i(t)) + \Phi^{i'}(l-t)$, имеем

$$-u_x^{i'}(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t)),$$

и равенство (3) верно для почти всех $t \geqslant 0$. Из (11) легко видеть, что $u^i(x,0) = \varphi^i(x)$, и $u_t^i(x,0) = 0$.

Покажем, что интегральное тождество (10) верно для всех $\Psi^i \in C^2(Q_T)$ $(i = 1,2,...,n)$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \Psi^i}{\partial x}(0,t) = \gamma \Psi^1(0,t)$, $\Psi^i(x,T) = 0$, $\dfrac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,T) = 0$, $\Psi^1(0,t) = \Psi^2(0,t) = ...\Psi^n(0,t)$.

Интегральное равенство (10) может быть представлено как

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \left(\int_0^T u^i(x,t)\Psi^i_{tt}(x,t)dt\right)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \left(\int_0^l u^i(x,t)\Psi^i_{xx}(x,t)dx\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \left(u^i(x,T)\Psi^i_t(x,T) - u^i(x,0)\Psi^i_t(x,0)\right)dx - \sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)dtdx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \left(\Psi^i_x(l,t)u^i(l,t) - \Psi^i_x(0,t)u^i(0,t)\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)dxdt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)dxdt - \sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)dxdt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i_x(0,t)u^i(0,t)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l u^i_x(x,t)\Psi^i_x(x,t)dxdt - \sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T u^i_t(x,t)\Psi^i_t(x,t)dxdt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)dt + \gamma\int_0^T u^1(0,t)\Psi^1(0,t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l \left(\Phi^{i'}(x-t) + \Phi^{i'}(x+t)\right)\Psi^i_x(x,t)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T \left(\Phi^{i'}(x+t) - \Phi^{i'}(x-t)\right)\Psi^i_t(x,t)dtdx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)dt + \gamma\int_0^T u^1(0,t)\Psi^1(0,t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \Psi^i_x(x,T)(-\Phi^i(x-T) + \Phi^i(x+T))dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l \Psi^i_x(x,0)(-\Phi^i(x) + \Phi^i(x))dx-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_0^l \Psi^i_{xt}(x,t)(\Phi^i(x+t) - \Phi^i(x-t))dxdt - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i_t(l,t)(\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t))dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i_t(0,t)(\Phi^i(t) - \Phi^i(-t))dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^l\int_0^T \Psi^i_{tx}(x,t)(\Phi^i(x+t) - \Phi^i(x-t))dxdt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi^i(l,t)u_x^i(l,t)dt+\gamma\int_0^T u^1(0,t)\Psi^1(0,t)dt=$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi_t^i(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))dt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi_t^i(0,t)(\Phi^i(t)-\Phi^i(-t))dt+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma\int_0^T(\Phi^1(-t)+\Phi^1(t))\Psi^1(0,t)dt-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T(\Phi^{i'}(l-t)+\Phi^{i'}(l+t))\Psi^i(l,t)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi_t^i(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))dt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi_t^i(0,t)(\Phi^i(t)-\Phi^i(-t))dt+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma\int_0^T(\Phi^1(-t)+\Phi^1(t))\Psi^1(0,t)dt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T \Psi_t^i(l,t)(\Phi^i(l+t)-\Phi^i(l-t))dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T(\Phi^i(t)-\Phi^i(-t))d\Psi^i(0,t)+\frac{1}{2}\gamma\int_0^T(\Phi^1(-t)+\Phi^1(t))\Psi^1(0,t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Phi^i(T)-\Phi^i(-T))\Psi^i(0,T)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Phi^i(0)-\Phi^i(0))\Psi^i(0,0)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T(\Phi^{i'}(t)+\Phi^{i'}(-t))\Psi^i(0,t)dt+\frac{1}{2}\gamma\int_0^T(\Phi^1(-t)+\Phi^1(t))\Psi^1(0,t)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^T\Psi^1(0,t)\left(\sum_{i=1}^{n}(\Phi^{i'}(t)+\Phi^{i'}(-t))-\gamma(\Phi^1(t)+\Phi^1(-t))\right)dt=0,$$

согласно равенству (19) и $\Psi^1(0,t)=\Psi^2(0,t)=...\Psi^n(0,t)$. Теорема доказана.

Рассмотрим важный частный случай исследуемой задачи. Пусть вдоль отрезка $[-l,l]$ натянута струна. Функция $u(x,t)$ описывает отклонение струны от положения равновесия в момент времени $t$. Предположим, что в точке $x=0$ прикреплена пружина жесткости $\gamma$, т.е. выполнено равенство

$$u_x'(+0,t)-u_x'(-0,t)=\gamma u(0,t).$$

Концы струны в точках $x=\pm l$ упруго закреплены пружинами жесткости $\gamma_i$ $(i=1{,}2)$. При этом на их движение установлены ограничители $[-h_i,h_i]$, где $h_i>0$, которые могут, в свою очередь, двигаться в перпендикулярном к оси $Ox$ направлении, так что их движение задано

$$C_i(t)=[-h_i,h_i]+\xi_i(t), i=1{,}2.$$

Пусть начальная скорость струны равна нулю; начальная форма определена абсолютно непрерывной на $[0,l]$ функцией $\varphi(x)$. Мы предполагаем, что $\varphi'(+0)-\varphi'(-0)=\gamma\varphi(0)$, $\varphi(l)\in C_2(0)$, $\varphi(-l)\in C_1(0)$.

Математическая модель такой задачи имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x\neq 0, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ u(-0,t)=u(+0,t),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\\ u_x'(+0,t)-u_x'(-0,t)=\gamma u(0,t),\\ u(-l,t)\in C_1(t),\\ u(l,t)\in C_2(t),\\ -u_x'(l,t)-\gamma_2 u(l,t)\in N_{C_2(t)}(u(l,t)),\\ u_x'(-l,t)-\gamma_1 u(-l,t)\in N_{C_1(t)}(u(-l,t)).\end{cases} \tag{20}$$

Покажем, что решение задачи (20) может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x-t) + \Phi(x+t)}{2}.$$

В самом деле, данную задачу можем свести к задаче на графе-звезда из двух ребер с узлом в точке $x = 0$. Будем считать, что граф ориентирован от узла. Определим $u^1(x,t) = u(-x,t)$ и $u^2(x,t) = u(x,t)$, где $x > 0$. Таким образом, получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, t > 0 (i = 1,2) \\ u^i(x,0) = \varphi^i(x), \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u^1(0,t) = u^2(0,t) \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{\partial u^i}{\partial x}(0,t) = \gamma u^1(0,t) \\ -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(l,t) - \gamma_i u^i(l,t) \in N_{C_i(t)}(u^i(l,t)) \\ u^i(l,t) \in C_i(t), \end{cases}$$

где $\varphi^1(x) = \varphi(-x)$, $\varphi^2(x) = \varphi(x)$, $x \in [0,l]$. Согласно теореме 2, решение последней задачи имеет вид

$$u^i(x,t) = \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2},$$

где $i = 1,2$. Функции $\Phi_i$ имеют следующее представление:
Если $x \in [0,l]$ то $\Phi^i(x) = \Phi^i_0(x) = \varphi^i(x)$;
Для всех $i = 1,2$ и $j \in N$, если $x \in [jl,(j+1)l]$ имеем

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_j(x) = 2g^i_{j-1}(x-l) - \Phi^i_{1-j}(2l-x),$$

где $g^i_{j-1}$ –решение задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt} g^i_{j-1}(t) \in N_{C_i(t)}(g^i_{j-1}(t)) + \gamma_i g^i_{j-1}(t) + \Phi^{i\prime}_{1-j}(l-t), \\ g^i_{j-1}((j-1)l) = g^i_{j-2}((j-1)l), t \in [(j-1)l, jl] \end{cases}$$

Если $x \in [-jl,(-j+1)l]$ то

$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{-j}(x) = \sum_{k=1}^{2} \Phi^k_{j-1}(-x) - \Phi^i_{j-1}(-x) + \frac{\gamma}{2} e^{\frac{\gamma x}{2}} \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{(-j+1)l}^{x} \Phi^k_{j-1}(-\tau) e^{\frac{-\gamma\tau}{2}} d\tau +$$

$$+ \frac{e^{\frac{\gamma(x+(j-1)l)}{2}}}{2} \left( \sum_{k=1}^{2} \Phi^k_{-j+1}(l-jl) - \sum_{k=1}^{2} \Phi^k_{j-1}(jl-l) \right).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Волновое уравнение на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 1. — С. 16–18.

2. Покорный, Ю. В. Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев // УМН. — 2004. — Т. 59, № 3 (357). — С. 115–150.

3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

4. Покорный, Ю. В. Метод дифференциала Стилтьеса в моделировании нерегулярной системы на геометрическом графе / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, Ж. И. Бахтина // Диф. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1117–1125.

5. Голованева, Ф. В. Аналог формулы интегрирования по частям на геометрическом графе / Ф. В. Голованева, Е. В. Лылов, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 82–86.

6. Завгородний, М. Г. Разрешимость и функция Грина вырожденной краевой задачи на графе / М. Г. Завгородний // Диф. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 8. — С. 1072–1078.

7. Провоторов, В. В. Solvability of Hyperbolic Systems with Distributed Parameters on the Graph in the Weak Formulation / В. В. Провоторов, С. М. Сергеев, А. А. Парт // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2019. — Т. 15, № 1. — С. 107–117.

8. Найдюк, Ф. О. Исследование волнового уравнения с сингулярностью на несимметричном графе / Ф. О. Найдюк // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2021. — № 1. — С. 110–116.

9. On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions / M. Kamenskii, Y.-Ch. Liou, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2020. — V. 69, № 2. — P. 283–304.

10. Kunze, M. An introduction to Moreau's sweeping process / M. Kunze, M. Monteiro Marques // LNP. — 2000. — V. 551. — P. 1–60.

11. Edmond, J. F. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process / J. F. Edmond, L. Thibault // Math. Program. Ser. B. — 2005. — V. 104, № 2–3. — P. 347–373.

12. Избранные труды В. А. Ильина: В 2-х томах: Том 2. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 692 с.

## REFERENCES

1. Pokorny Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V. The wave equation on a spatial network. [Pokornyyj Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskix A.V. Volnovoe uravnenie na prostranstvennoj seti]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2003, vol. 388, no. 1, pp. 16–18.

2. Pokornyi Yu. V., Pryadiev V. L. Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network. [Pokornyyj Yu.V., Pryadiev V.L. Nekotorye voprosy kachestvennoj teorii Shturma–Liuvillya na prostranstvennoj seti]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Math. Surveys*, 2004, vol. 59, no. 3, pp. 515–552.

3. Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

4. Pokornyi Yu. V., Zvereva M.B., Bahtina Zh. I. Stieltjes differential method in modeling of irregular system on a geometric graph. [Pokornyyj Yu.V., Zvereva M.B., Baxtina Zh.I. Metod differenciala Stilt'esa v modelirovanii neregulyarnoj sistemy na geometricheskom grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1117–1125.

5. Golovaneva F.V., Lilov E.V., Shabrov S.A. The analogue of the formula of integration by parts on geometric graph. [Golovaneva F.V., Lylov E.V., Shabrov S.A. Analog formuly integrirovaniya po chastyam na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 82–86.

6. Zavgorodniy M.G. Solvability and Green's function of a degenerate boundary value problem on a graph. [Zavgorodnij M.G. Razreshimost' i funkciya Grina vyrozhdennoj kraevoj zadachi na

grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1072–1078.

7. Provotorov V.V., Sergeev S.M., Part A.A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation. [Provotorov V.V., Sergeev S.M., Part A.A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, no. 1, pp. 107–117.

8. Naydyuk F.O. Investigation of the wave equation with singularity on a non-symmetric graph. [Najdyuk F.O. Issledovanie volnovogo uravneniya s singulyarnost'yu na nesimmetrichnom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2021, no. 1, pp. 110–116.

9. Kamenskii M., Liou Y.-Ch., Wen Ch.-F., Zvereva M. On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions. Optimization, 2020 vol. 69, no. 2, pp. 283–304.

10. Kunze M., Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. LNP, 2000, vol. 551, pp. 1–60.

11. Edmond J.F., Thibault L. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. Math. Program. Ser. B., 2005, vol. 104, no. 2–3, pp. 347–373.

12. Selected works of V. A. Il'in: 2 volumes: V. 2. [Izbrannye trudy V.A. Il'ina: V 2-x tomax: Tom 2]. Moscow: MAKS Press, 2008, 692 p.

*Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
*E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru*
*Тел.: +7(473)220–86–90*

*Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia*
*E-mail: zvereva_m@math.vsu.ru*
*Tel.: +7(473)220–86–90*