УДК 517.958

О ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И УНИВЕРСАЛЬНОСТИ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.09.2019 г.

Аннотация. В статье рассматриваются проблемы единственности решений для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и их связь с условиями регулярности решений на бесконечности. Доказывается, что всё пространство дифференциальных операторов может быть разложено на так называемые классы эквивалентности, в каждом из которых всякое фиксированное условие регулярности решения на бесконечности обеспечивает единственность (либо — неединственность) решения для всех элементов этого класса одновременно. Кроме того, производится сравнение различных типов условий регулярности решений в плане приложений к задаче разрешимости неоднородных уравнений.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, постоянные коэффициенты, условие регулярности решения, классы эквивалентности, теорема единственности.

ON UNIQUENESS THEOREMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE UNIVERSALITY OF REGULARITY CONDITIONS FOR SOLUTIONS AT INFINITY

Yu. V. Zasorin

Abstract. The article deals with the problems of the uniqueness of solutions for partial differential equations with constant coefficients and their relationship with the conditions of the regularity of solutions at infinity. It is proved that the entire space of differential operators can be decomposed into so-called equivalence classes. In each of these classes, every fixed condition for the regularity of a solution at infinity ensures the uniqueness (or non-uniqueness) of the solution for all elements of this class at the same time. In addition, various types of conditions for the regularity of solutions are compared in terms of applications to the solvability problems of inhomogeneous equations.

Keywords: partial differential equation, constant coefficients, conditions of the regularity of solutions, equivalence classes, uniqueness theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема единственности решения практически всегда является существенной частью какой-либо внешней задачи для уравнения в частных производных с оператором $P(D)$ с постоянными коэффициентами ($D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_k = \partial/\partial x_k$, $k \in \overline{1;n}$). При этом сама исходная задача зачастую сводится к уравнению во всем R^n:

$$P(D)u(x) = f(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

для которого также возникает проблема единственности решения. Как правило, последняя проблема решается наложением дополнительного условия (или — условий) на решение $u(x)$ уравнения (1). Это условие может носить нелокальный либо локальный характер. В первом случае, как правило, предполагается, что функция (распределение) $u(x)$ должно являться элементом какого-либо функционального класса (например, $L_p(R^n)$). В частности, справедливо следующее утверждение (см. [1]):

Предложение 1. *Если функция* $u(x) \in L_p(R^n)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$, *удовлетворяет однородному уравнению:*

$$P(D)u(x) = 0, \quad x \in R^n , \tag{2}$$

то $u(x) = 0$ *в* R^n.

Однако, в предположении $u(x) \in L_p(R^n)$, для исходного (неоднородного) уравнения (1) возникают проблемы *разрешимости*: например, в случае $n = 3$, взяв в качестве $P(D)$ оператор Лапласа, соответствующее уравнение Пуассона (1) становится неразрешимым даже при весьма ограничительных предположениях для правой части $f(x)$. Причем важнейшее частное решение уравнения Пуассона — *фундаментальное решение* — не является элементом никакого класса $L_p(R^n)$ ни при каких $p \geqslant 1$ и ни при каких $n \geqslant 2$. Кроме того, пространства $L_p(R^n)$ мало приспособлены для использования их в качестве классов разрешимости уравнения (1); в этом качестве предпочтительнее использовать шварцевское пространство распределений умеренного роста $S'(R^n)$. Поэтому в рамках данной работы в дальнейшем уравнения (1) и (2) мы будем рассматривать только в классе $S'(R^n)$.

Более приемлемым представляется использование *локальных* ограничений, называемых также *условиями регулярности решения на бесконечности*. Л. Хёрмандером (см. [2]) доказано следующее утверждение:

Предложение 2. *Если решение* $u(x)$ *уравнения (2) удовлетворяет условию:*

$$u(x) = o(|x|^{(1-n)/2}), \quad x \to \infty , \tag{3}$$

то $u(x) = 0$ *в* R^n.

Условие (3), обладая универсальностью, имеет, впрочем, те же недостатки, что и нелокальные условия. Возвращаясь к примеру с оператором Лапласа в случае $n = 3$, мы немедленно замечаем, что, во-первых, фундаментальное решение оператора Лапласа $E(x) = (-4\pi|x|)^{-1}$ не удовлетворяет ему; во-вторых, уравнение Пуассона становится неразрешимым для большинства функций (распределений) $f(x)$, имеющих корректную свёртку $(E * f)(x)$. И в то же время замена условия (3) на

$$u(x) = o(1), \quad x \to \infty , \tag{4}$$

полностью устраняет эти недостатки, обеспечивая при этом единственность решения уравнения Пуассона.

Таким образом, выбор подходящего условия регулярности на бесконечности является достаточно сложной задачей, поскольку такое условие должно удровлетворять, как минимум, 3-м требованиям:

1) обеспечивать единственность решения уравнения (1);

2) обеспечивать разрешимость уравнения (1) при не слишком жёстких ограничениях на $f(x)$;

3) должно найтись хотя бы одно фундаментальное решение $E(x)$ оператора $P(D)$, удовлетворяющее этому условию.

Автор настоящей работы не готов ни в коей мере дать некое универсальное условие регулярности решения на бесконечности, удовлетворяющее всем трём перечисленным выше требованиям для каждого конкретного оператора $P(D)$. Тем не менее, можно несколько облегчить задачу поиска подходящего условия регулярности решения на бесконечности разбиением всей совокупность операторов $P(D)$ с постоянными коэффициентами на *классы эквивалентности* $\mathcal{P}$, внутри которых их символы $P(i\xi)$ имеют совпадающие друг с другом *множества вещественных нулей* $\mathcal{N}_P = \{P(i\xi) = 0\}$. При этом доказывается, что:

— если для какого-либо представителя $P(D) \in \mathcal{P}$ какое-либо условие регулярности решения на бесконечности обеспечивает единственность решения уравнения (2), то это же самое условие обеспечивает единственность решения аналогичных уравнений и для всех прочих представителей этого класса,

— и наоборот, если для какого-либо представителя $P(D) \in \mathcal{P}$ какое-либо условие регулярности решения на бесконечности не обеспечивает единственность решения уравнения (2), то это же самое условие не обеспечивает единственности решения аналогичных уравнений и для всех прочих представителей этого класса.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как обычно, через $S(R^n)$ будем обозначать пространство пробных быстро убывающих на бесконечности функций $\varphi(x)$, а через $S'(R^n)$ — двойственное к нему пространство распределений умеренного роста $T(x)$ с внешней линейной формой

$$\langle T(x);\varphi(x)\rangle = \int\limits_{R^n} T(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Через $\widehat{f}(\xi)$ будем обозначать прямое преобразование Фурье функции (или распределения) $f(x)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \langle f(x);\exp(-ix\cdot\xi)\rangle\,.$$

Пусть, далее, $\mathcal{N} \subset R^n$ — кусочно-гладкое многообразие (или — объединение конечного числа кусочно-гладких многообразий). Через $S'(\mathcal{N})$ будем обозначать подпространство распределений $T(x) \in S'(R^n)$, таких, что $\operatorname{supp}(\widehat{T}) \subset \mathcal{N}$. Пусть теперь $\mathbb{P}(R^n)$ — пространство всех линейных джифференциальных операторов $P(D)$ с постоянными (комплексными, вообще говоря) коэффициентами:

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m(P)} a_\alpha D^\alpha\,,$$

где $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — целочисленный мультиндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot D_n^{\alpha_n}$.

Фиксируя произвольный отличный от нуля оператор $P(D) \in \mathbb{P}(R^n)$ и его символ $P(i\xi)$, положим

$$\mathcal{N}_P = \{\xi \in R^n \mid P(i\xi) = 0\}$$

— множество вещественных нулей символа $P(i\xi)$. Далее, через $V(P)$ обозначим множество всех решений $u(x) \in S'(R^n)$ уравнения (2).

Справедливо следующее утверждение (см. [3]):

Предложение 3. *Если $u(x) \in S'(R^n)$ является решением уравнения (2), то:*

1) $u(x) \in S'(\mathcal{N}_P)$ (т. е., $\operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \mathcal{N}_P$), если $\mathcal{N}_P \neq \varnothing$;

2) $u(x) = 0$ в R^n, если $\mathcal{N}_P = \varnothing$.

В дальнейшем, (если не оговорено противное), будем считать что $\mathcal{N}_P \neq \varnothing$.

Замечание 1. Ясно, что $V(P)$ является собственным подпространством $S'(\mathcal{N}_P)$, (т. е., $V(P) \subset S'(\mathcal{N}_P)$, причем $V(P) \neq S'(\mathcal{N}_P)$). ▫

Далее, пусть $Q(D) \in \mathbb{P}$ — ненулевой оператор, причем $Q(D) \neq P(D)$. Определим множество $\mathcal{N}_Q \subset R^n$ аналогично множеству $\mathcal{N}_P$.

Определение 1. Будем говорить, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ *эквивалентны* и обозначать этот факт следующим образом: $P(D) \sim Q(D)$ (или — $Q(D) \sim P(D)$), если $\mathcal{N}_P \subset \mathcal{N}_Q$. При этом, если $\mathcal{N}_P = \varnothing$, будем писать: $P(D) \sim 0$.

Если же $\mathcal{N}_Q \subset \mathcal{N}_P$, то будем говорить, что оператор $Q(D)$ *подчинён* оператору $P(D)$ и писать: $Q(D) \preceq P(D)$ (или — $Q(D) \succeq P(D)$). При этом, если $Q(D) \preceq P(D)$, но $P(D) \not\sim Q(D)$ (т. е., множество $\mathcal{N}_Q$ является собственным подмножеством $\mathcal{N}_P$), будем использовать обозначение: $Q(D) \prec P(D)$ (или — $P(D) \succ Q(D)$) и говорить, что оператор $Q(D)$ *строго подчинён* оператору $P(D)$. ▫

Замечание 2. Очевидно, что отношение " $\sim$ " удовлетворяет аксиомам эквивалентности:
1°. $P(D) \sim P(D)$;
2°. $P(D) \sim Q(D) \Rightarrow Q(D) \sim P(D)$;
3°. $P_1(D) \sim P_2(D) \sim P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \sim P_3(D)$;
а отношение " $\preceq$ " — аксиомам отношения нестрогого порядка:
4°. $P(D) \preceq P(D)$;
5°. $Q(D) \preceq P(D) \Rightarrow P(D) \succeq Q(D)$;
6°. $P_1(D) \preceq P_2(D) \preceq P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \preceq P_3(D)$.
Наконец, отношение " $\prec$ " удовлетворяет аксиомам отношения строгого порядка:
7°. $P(D) \not\prec P(D)$;
8°. $Q(D) \prec P(D) \Rightarrow P(D) \succ Q(D)$;
9°. $P_1(D) \prec P_2(D) \prec P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \prec P_3(D)$.
Далее, отношения " $\preceq$ " и " $\prec$ " связаны между собой свойствами:
10°. $P_1(D) \preceq P_2(D) \prec P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \prec P_3(D)$;
11°. $P_1(D) \prec P_2(D) \preceq P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \prec P_3(D)$.
Кроме того, отношения " $\sim$ " и " $\prec$ " связаны между собой свойствами:
12°. $P_1(D) \sim P_2(D) \prec P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \prec P_3(D)$;
13°. $P_1(D) \prec P_2(D) \sim P_3(D) \Rightarrow P_1(D) \prec P_3(D)$.
Аналогичными свойствами связаны между собой и отношения " $\sim$ " и " $\preceq$ ". ▫

Рассмотрим теперь в классе $S'(R^n)$ однородное уравнение:

$$Q(D)v(x) = 0, \quad x \in R^n. \tag{5}$$

Определим классы $S'(\mathcal{N}_Q)$ и $V(Q)$ аналогично классам $S'(\mathcal{N}_P)$ и $V(P)$.

Замечание 3. Отметим, что если $Q(D) \prec P(D)$, то $S'(\mathcal{N}_Q) \subset S'(\mathcal{N}_P)$, но при этом необязательно $V(Q) \subset V(P)$, а если $Q(D) \sim P(D)$, то $S'(\mathcal{N}_Q) = S'(\mathcal{N}_P)$, но при этом необязательно $V(Q) = V(P)$ или $V(O) \subset V(P)$ или $V(Q) \supset V(P)$. ▫

Обозначим через $S'(R^n, \Psi)$ подпространство всех распределений $T(x) \in S'(R^n)$, удовлетворяющих ограничению:

$$\Psi(x,D)T(x) = o(1), \quad x \to \infty, \tag{6}$$

где $\Psi(x,D)$ — некоторый линейный дифференциальный (или — псевдодифференциальный) оператор. Положим далее: $S'(\mathcal{N}, \Psi) = S'(R^n, \Psi) \cap S'(\mathcal{N})$.

Замечание 4. Формула (6) может представлять собой как простое асимптотическое равенство, так и систему асимптотических равенств. При этом правая часть (6) может представлять собой как равномерное стремление к нулю, так и стремление к нулю по каждому направлению $\{t\theta\}$, ($t \to +\infty$, θ — точки единичной сферы $\omega_1 = \{x \in R^n : |x| = 1\}$), или же (в случае $T(x) \in S'(\mathcal{N}, \Psi)$) как стремление к нулю лишь по *некоторым* фиксированным направлениям $\{t\theta\}$, нормальным к $\mathcal{N}$.

Кроме того, равенство (6) следует понимать *в смысле теории распределений*:

$$\Psi(x,D)(T * \varphi) = o(1), \quad x \to \infty, \quad \forall\, \varphi(x) \in S(R^n), \tag{6'}$$

где символ " $*$ " означает свёртку распределения $T(x)$ и пробной функции $\varphi(x)$:

$$(T * \varphi)(x) = \langle T(y)\,; \varphi(x-y)\rangle.$$

При этом интерпретация ($6'$) ограничения (6) имеет два существенных преимущества: 1) если соотношение (6) выполняется в классическом смысле, то оно выполняется и в смысле (6); 2) если распределение $T(x)$ удовлетворяет соотношению ($6'$), то ему же удовлетворяют и все обобщённые производные $D^\alpha T(x)$. ▫

По аналогии с классом $S'(\mathcal{N},\Psi)$, ($\mathcal{N} \neq \varnothing$), определим классы $V(P,\Psi)$ и $V(Q,\Psi)$, ($P(D), Q(D) \not\sim 0$), как множества всех решений $u(x)$ и $v(x)$ однородных уравнений (2) и (6) соответственно, удовлетворяющих ограничениям:

$$\Psi(x,D)u(x) = o(1)\,, \quad x \to \infty\,, \tag{7}$$

$$\Psi(x,D)v(x) = o(1)\,, \quad x \to \infty\,, \tag{8}$$

понимаемых так же, как и ограничение (6), в слабом смысле (см. формулу ($6'$)):

$$V(P,\Psi) = V(P) \cap S'(R^n,\Psi)\,, \quad V(P,\Psi) = V(P) \cap S'(R^n,\Psi)\,.$$

В дальнейшем ограничения (7) и (8) будем называть *условиями регулярности на бесконечности* решений задач (2) или (5) соответственно.

Замечание 5. Легко видеть, что (см. Определение 1 и Замечания 1 и 3), что

$$V(P,\Psi) \subset S'(\mathcal{N}_P,\Psi)\,, \quad V(P,\Psi) \subset S'(\mathcal{N}_P,\Psi)\,. \quad ▫$$

Пусть $P(D) \sim Q(D) \not\sim 0$. (Для удобства обозначим: $\mathcal{N}_P = \mathcal{N}_Q = \mathcal{N}$.) Предположим теперь, что оператор $\Psi(x,D)$ подобран таким образом, что задача (2), (7) имеет единственное (тривиальное) решение: $u(x) = 0$. Рассмотрим произвольное распределение $w(x) \in S'(\mathcal{N},\Psi)$. Поскольку $\operatorname{supp}(\widehat{w}) \subset \mathcal{N} = \mathcal{N}_P$ и имеет конечный порядок сингулярности (см., напр., ????), то найдётся такое натуральное число N, что

$$(P(i\xi))^N \widehat{w}(\xi) = 0\,, \quad \xi \in R^n,$$

или, что то же самое,

$$(P(D))^N w(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,.$$

Перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$P(D)w_1(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,, \tag{9}$$

где $w_1(x) = (P(D))^{N-1} w(x)$. При этом $\widehat{w}_1(\xi) = (P(i\xi)^{N-1} \widehat{w}(\xi)$, а значит, $\operatorname{supp}(\widehat{w}_1) \subset \operatorname{supp}(\widehat{w}) \subset \mathcal{N}$. Кроме того (см. Замечание 4):

$$\Psi(x,D)w_1(x) = o(1)\,, \quad x \to \infty\,. \tag{10}$$

Но в силу нашего предположения задача (9), (10) имеет единственное решение: $w_1(x) = 0$.

Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что и $w_2(x) = (P(D))^{N-2} w(x) = 0$. Продолжая наши рассуждения, получаем, что $w(x) = 0$ в R^n, т. е., подпространство $S'(\mathcal{N},\Psi)$ — тривиально. Но поскольку $V(Q,\Psi) \subset S'(\mathcal{N},\Psi)$, то и задача (5), (8) имеет только тривиальное решение: $v(x) = 0$ в R^n.

Пусть теперь $Q(D) \prec P(D)$, ($Q(D) \not\sim 0$). Так как $\mathcal{N}_Q \subset \mathcal{N}_P$, то $V(Q,\Psi) \subset S'(\mathcal{N}_Q,\Psi) \subset S'(\mathcal{N}_P,\Psi)$; следовательно, и в этом случае задача (5), (8) имеет только тривиальное решение: $v(x) = 0$ в R^n.

Таким образом, мы доказали следующие утверждения:

Лемма 1. *Пусть $P(D) \sim Q(D) \not\sim 0$. Тогда, если задача (2), (7) имеет в $S'(R^n)$ только тривиальное решение, то и задача (5), (8) имеет в $S'(R^n)$ только тривиальное решение.*

Следствие 1. *Пусть $P(D) \sim Q(D) \nsim 0$. Тогда, если решение $u(x) \in S'(R^n)$ задачи (2), (7) — единственно, то и решение $v(x) \in S'(R^n)$ задача (5), (8) — единственно. И наоборот, если решение $u(x) \in S'(R^n)$ задачи (2), (7) — неединственно, то и решение $v(x) \in S'(R^n)$ задачи (5), (8) — неединственно.*

Доказательство: Первая часть нашего утверждения следует из Леммы 1. Докажем вторую часть. Предположим противное: решение $v(x)$ задача (5), (8) — единственно. Но тогда в силу Следствия 1, единственно и решение $u(x)$ задачи (2), (7), что противоречит условию доказываемого нами утверждения.

Следствие доказано.

Лемма 2. *Пусть $Q(D) \prec P(D)$, ($Q(D) \nsim 0$). Тогда, если задача (2), (7) имеет в $S'(R^n)$ только тривиальное решение, то и задача (5), (8) имеет в $S'(R^n)$ только тривиальное решение.*

Следствие 2. *Пусть $Q(D) \prec P(D)$, ($Q(D) \nsim 0$). Тогда, если решение $u(x) \in S'(R^n)$ задачи (2), (8) — единственно, то и решение $v(x) \in S'(R^n)$ задачи (5), (8) — единственно. И наоборот, если решение $v(x) \in S'(R^n)$ задачи (5), (9) — не единственно, то и решение $u(x) \in S'(R^n)$ задачи (2), (8) — не единственно.*

Доказательство — аналогично доказательству Следствия 1.

Замечание 6. Отметим, что Следствие 2 "не работает" в обратную сторону: если $Q(D) \prec P(D)$, ($Q(D) \nsim 0$), то из неединственности решения $u(x)$ задача (2), (7) *не следует* неединственность решения $v(x)$ задачи (5), (8), а из единственности решения $v(x)$ задачи (5), (8) *не следует* единственность решения $u(x)$ задачи (2), (7). ▫

2. КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Вернемся к пространству $\mathbb{P}(R^n)$ всевозможных линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Произведём его разбиение на классы эквивалентности следующим образом. Выделим сначала одноэлементный класс $\mathcal{O}$, состоящий из нулевого оператора
$\Theta(D) \equiv 0$. Далее, в класс $\mathcal{P}(\varnothing)$ включим все операторы $P_0(D) \sim 0$. Все остальные операторы $P(D)$ распределим по классам $\mathcal{P}(\mathcal{N})$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}) = \{P(D) \in \mathbb{P}(R^n) \,|\, \mathcal{N}_P = \mathcal{N}\}$$

Отметим, что внутри каждого класса $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ (и — $\mathcal{P}(\varnothing)$) все элементы эквивалентны между собой в смысле Определения 1, причем выполняются свойства $1^\circ - 3^\circ$ операции " $\sim$ " (см. Замечание 2), а поэтому эти классы могут быть названы *классами эквивалентности* операторов $P(D)$. При этом между самими классами $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ может быть установлено частичное *отношение строгого порядка*:

Определение 2. Будем говорить, что класс $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$ *строго подчинён* классу $\mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$ и обозначать этот факт следующим образом: $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1) \prec \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$ (или: $\mathcal{P}(\mathcal{N}_2) \succ \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$), если для каких-либо представителей $P_1(D)$
$\in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$, $P_2(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$, выполнено отношение: $P_1(D) \prec P_2(D)$.

Кроме того, будем считать, что $\mathcal{P}(\varnothing) \prec \mathcal{P}(\mathcal{N})$ при всех $\mathcal{N} \neq \varnothing$. ▫

Замечание 7. Отметим, что если $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1) \prec \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$, то отношение $P_1(D) \prec P_2(D)$ выполнено *для всех* представителей $P_1(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_1)$, $P_2(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$ в силу свойств $12^\circ, 13^\circ$ (см. Замечание 2).

Далее, отношение $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1) \prec \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$ само удовлетворяет аксиомам строгого порядка, аналогичным аксиомам $7^\circ - 9^\circ$ из Замечания 2.

Кроме того, можно определить и отношение нестрогого порядка
$\mathcal{P}(\mathcal{N}_1) \preceq \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$, понимая его в том смысле, что либо $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1) \prec \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$, ($\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$). либо

$\mathcal{P}(\mathcal{N}_1) = \mathcal{P}(\mathcal{N}_2)$, $(\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2)$, удовлетворяющее аксиомам и свойствам, аналогичным $4^\circ - 6^\circ$, $10^\circ, 11^\circ$. $\square$

Теперь, объединяя Следствия 1 и 2, мы немедленно устанавливаем справедливость следующих утверждений:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{N}_P), \mathcal{P}(\mathcal{N}_Q) \in \mathbb{P}(R^n)$, причём $\mathcal{P}(\varnothing) \not\sim \mathcal{P}(\mathcal{N}_Q)$ $\leq \mathcal{P}(\mathcal{N}_P) \not\sim \mathcal{O}$, и пусть $\Psi(x,D)$ — некоторый фиксированный линейный дифференциальный (или псевдодифференциальный) оператор. Тогда:*

1) Если для некоторого представителя $P(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ уравнение (2) имеет в классе $S'(R^n,\Psi)$ единственное (тривиальное) решение, то уравнения (5) для всех представителей $Q(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ также имеют в классе $S'(R^n,\Psi)$ единственное (тривиальное) решение.

2) Если для некоторого представителя $Q(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ уравнение (5) имеет в классе $S'(R^n,\Psi)$ неединственное решение, то уравнения (2) для всех представителей $P(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ также имеют в классе $S'(R^n,\Psi)$ неединственное решение.

Пусть теперь $\mathcal{N}_P \not\subset \mathcal{N}_Q$, $\mathcal{N}_Q \not\subset \mathcal{N}_P$. Положим $\mathcal{N}_L = \mathcal{N}_P \cup \mathcal{N}_Q$. Отметим, что соответствующий класс $\mathcal{P}(\mathcal{N}_L)$ непуст, поскольку содержит, по крайней мере, оператор $L(D) = P(D)Q(D)$, $(P(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_P),\ Q(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_Q))$. Зафиксируем два линейных дифференциальных (или — псевдо-дифференциальных) оператора $\Psi_P(x,D)$ и $\Psi_Q(x,D)$ и рассмотрим в классе $S'(R^n)$ три задачи:

$$\begin{cases} P(D)u(x) = 0\,, & x \in R^n\,, \\ \Psi_P(x,D)u(x) = o(1)\,, & x \to \infty\,, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} Q(D)v(x) = 0\,, & x \in R^n\,, \\ \Psi_Q(x,D)v(x) = o(1)\,, & x \to \infty\,, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} P(D)w(x) = 0\,, & x \in R^n\,, \\ \Psi_P(x,D)w(x) = o(1)\,, & x \to \infty\,, \\ \Psi_Q(x,D)w(x) = o(1)\,, & x \to \infty\,, \end{cases} \tag{13}$$

где $P(D), Q(D), L(D)$ — произвольные операторы из $\mathcal{P}(\mathcal{N}_P)$, $\mathcal{P}(\mathcal{N}_Q)$ и $\mathcal{P}(\mathcal{N}_L)$ соответственно. Предположим, что задачи (11) и (12) имеют только тривиальное решение. Покажем, что и задача (13) имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим произвольное распределение $w(x) \in S'(\mathcal{N}_L)$. Поскольку $\mathrm{supp}\,(\widehat{w}(\xi) \subset \mathcal{N}_L$, найдутся такие натуральные числа N и M, что

$$(P(i\xi))^N (Q(i\xi))^M \widehat{w}(\xi) = 0\,, \quad \xi \in R^n\,, \tag{14}$$

причем

$$\mathrm{supp}\,((P(i\xi))^N \widehat{w}(\xi)) \subset \mathcal{N}_Q\,, \quad \mathrm{supp}\,((Q(i\xi))^M \widehat{w}(\xi)) \subset \mathcal{N}_P\,. \tag{15}$$

Равенство (14) и соотношение (15) эквивалентны уравнению

$$(P(D))^N (Q(D))^M w(\xi) = 0\,, \quad x \in R^n \tag{16}$$

с ограничениями $(P(D))^N w(\xi) \in S'(\mathcal{N}_Q,\Psi_P,\Psi_Q)$ и $(Q(D))^M w(\xi) \in$ $S'(\mathcal{N}_P,\Psi_P,\Psi_Q)$. Полагая $w'(x) = (Q(D))^M w(x)$ и подставляя в уравнение (16), получаем в классе $S'(\mathcal{N}_P,\Psi_P,\Psi_Q)$ уравнение:

$$(P(D))^N w'(x) = 0\,, \quad x \in R^n\,. \tag{17}$$

С учётом того, что $w'(x) \in S'(\mathcal{N}_P,\Psi_P,\Psi_Q) \subset S'(\mathcal{N}_P,\Psi_P)$ и предположения об однозначной разрешимости задачи (11), так же, как и при доказательстве Леммы 1, получаем, что $w'(x) = 0$ в R^n, т. е.,

$$(Q(D))^M w(x) = 0\,, \quad x \in R^n \tag{18}$$

в классе $S'(R^n,\Psi_P,\Psi_Q)$.

Из Предложения 3 следует, что $\operatorname{supp}(\widehat{w}(\xi)) \subset \mathcal{N}_Q$, т. е., $w(x) \in S'(\mathcal{N}_Q,\Psi_P,\Psi_Q)$. Так же, как и в случае уравнения (17), устанавливаем, что и уравнение (18) имеет только тривиальное решение: $w(x) = 0$ в R^n. Таким образом, мы установили, что подпространство $S'(\mathcal{N}_L,\Psi_P,\Psi_Q)$ являемся тривиальным, а поскольку $V(L,\Psi_P,\Psi_Q) \subset S'(\mathcal{N}_L,\Psi_P,\Psi_Q)$, то и задача (13) имеет только тривиальное решение. Что и требовалось доказать.

Таким образом, мы установили справедливость следующего утверждения:

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{N}_P,\mathcal{N}_Q \neq \varnothing$, причём $\mathcal{N}_P \not\subset \mathcal{N}_Q$, $\mathcal{N}_Q \not\subset \mathcal{N}_P$, и пусть $\mathcal{N}_L = \mathcal{N}_P \cup \mathcal{N}_Q$. Тогда, если для каких-либо представителей $P(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_P)$, $Q(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_Q)$ задачи (11), (12) имеют в классе $S'(R^n)$ единственные (тривиальные) решения, то и задача (13) имеет в классе $S'(R^n)$ единственное (тривиальное) решение.*

Этот результат легко обобщается на случай объединения любого конечного числа множеств $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$:

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{N}_1), \ldots, \mathcal{P}(\mathcal{N}_m)$ — классы эквивалентности операторов $P(D)$, такие, что:*

$$\mathcal{N}_k \not\subset \bigcup_{j\neq k} \mathcal{N}_j, \quad \forall\, k \in \overline{1;m},$$

и пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_m$. Пусть, далее, $\Psi_1(x,D), \ldots, \Psi_m(x,D)$ — некоторые линейные дифференциальные (или — псевдодифференциальные) операторы. Тогда, если в каждом классе $\mathcal{P}(\mathcal{N}_k)$, $(k \in \overline{1;m})$, найдётся хотя бы по одному представителю $P_k(D)$, такому, что задачи

$$\left\{\begin{array}{l} P_k(D)u_k(x) = 0, \quad x \in R^n, \\ \Psi_k(x,D)u_k(x) = o(1), \quad x \to \infty, \end{array}\right. \Bigg| \; k \in \overline{1;m}$$

имеют в классе $S'(R^n)$ единственное (тривиальное) решение, то для любого представителя $L(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ задача

$$\left\{\begin{array}{l} L(D)v(x) = 0, \quad x \in R^n, \\ \Psi_k(x,D)v(x) = o(1), \quad x \to \infty, \quad k \in \overline{1;m} \end{array}\right.$$

также имеет в классе $S'(R^n)$ только единственное (тривиальное) решение.

3. О НЕКОТОРЫХ УТОЧНЕНИЯХ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Вернемся к Предложению 2, которое само является следствием более точного утверждения, также доказанного Л. Хёрмандером в работе [2]. Прежде чем привести формулировку последнего, приведём некоторые пояснения. Пусть $\mathcal{N} \subset R^n$ — некоторое гладкое многообразие; $\operatorname{codim}(\mathcal{N}) = k$, $k \in \overline{1;n}$, (в случае $k = n$ многообразие $\mathcal{N}$ представляет собой одноточечное множество $\{\xi_0\}$ или объединение конечного числа точек $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$). Пусть, далее, $\mathcal{K} \subset R^n$ — открытый конус с вершиной в точке $x = 0$. Через $\mathcal{N}_R$, $(R > 0)$ будем обозначать часть конуса $\mathcal{K}$, содержащуюся в сферическом слое $\{R < |x| < 2R\}$.

Определение 3. Конус $\mathcal{K}$ называется *нормальным к многообразию* $\mathcal{N}$, если для каждой точки $\xi \in \mathcal{N}$ найдётся хотя бы одна нормаль $\theta = \theta(\xi) \in \omega_1$ к $\mathcal{N}$, *содержащаяся* в $\mathcal{K}$: $\theta(\xi) \in \mathcal{K}$. □

Справедливо утверждение (см. [2]):

Предложение 4. *Пусть $P(D) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$, где $\mathcal{N}$ — гладкое многообразие,* ($\operatorname{codim}(\mathcal{N}) = k$, $k \in \overline{1;n}$) *и пусть $\mathcal{K}$ — конус, нормальный к многообразию $\mathcal{N}$. Пусть, далее, $u(x) \in S'(R^n) \cap$*

$L_2^{loc}(R^n)$ *— решение однородного уравнения (2). Тогда, если*

$$\liminf_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathcal{K}_R} R^{-k}|u(x)|^2\,dx = 0\,, \tag{19}$$

то $u(x) = 0$ *в* R^n.

Замечание 8. Отметим, что в случаях $k = 1$ или $k = n$ (т. е., $\mathcal{N}$ — $(n-1)$-мерная поверхность или одноточечное множество), из равенства (19) следует, что $u(x)$ удовлетворяет "в среднем" в конусе $\mathcal{K}$ оценкам (3) или (4) соответственно; причём эти оценки, вообще говоря, неулучшаемы. В то же время применительно к *неоднородному* уравнению (1) равенство (19) зачастую и бесполезно. Проиллюстрируем это на следующих примерах.

В случае $k = 1$ положим $P(D) = \Delta + k_0^2$, где Δ — оператор Лапласа, $k_0 > 0$. Все нетривиальные решения $u(x)$ однородного уравнения (2) удовлетворяют асимптотической оценке:

$$u(x) = O(|x|^{(1-n)/2})\,, \quad x\to\infty\,,$$

или же ещё менее жёстким ограничениям (вплоть до полиномиальной ограниченности на бесконечности), а поэтому оценку (19) нельзя улучшить. Но всё вышесказанное справедливо и для всего класса и фундаментальных решений $E(x)$ уравнения Гельмгольца. (Поэтому в рассматриваемом случае для неоднородного уравнения (1) используются не условие единственности решения (3) или равенство (19), а условие типа Зоммерфельда.)

Далее, в случае $k = n$ (т. е., $\mathcal{N} = \{\xi_0\}$ — одноточечное множество) всякое нетривиальное решение $u(x)$ однородного уравнения (2) представляет собой квазиполином вида:

$$u(x) = \exp(i\xi_0\cdot x)\,p(x)\,,$$

где $p(x)$ — некоторый полином переменных $x \in R^n$. Поэтому условие единственности решения (4) или (19), с одной стороны, неулучшаемы, с другой стороны, легко могут быть заменены другими более мягкими и удобными условиями.

То же самое справедливо и для случая $\mathcal{N} = \{\xi_1\,, \ldots\,, \xi_m\}$ (т. е., $\mathcal{N}$ представляет собой объединение конечного числа точек), поскольку и в этом случае всякое нетривиальное решение $u(x)$ однородного уравнения (2) также является квазиполиномом:

$$u(x) = \exp(i\xi_1\cdot x)\,p_1(x) + \ldots + \exp(i\xi_m\cdot x)\,p_m(x)\,,$$

где $p_k(x)$ — некоторые полиномы переменных $x \in R^n$. □

Тем не менее, если множество $\mathcal{N}$ представляет собой плоскость (любой размерности от $\dim(\mathcal{N}) = 0$ до $\dim(\mathcal{N}) = n-1$) равенство (19) может быть уточнено. Справедливо следующее утверждение, в тех или иных формах доказанное Ю.В. Засориным в работах [4], [5]:

Предложение 5. *Пусть множество* $\mathcal{N}_P$ *оператора* $P(D) \not\sim 0$ *представляет собой плоскость в* R^n, *и пусть* $\theta \in \omega_1$ *— какая-либо фиксированная нормаль к* $\mathcal{N}_P$. *Пусть, далее,* $u(x) \in S'(R^n)$ *— решение однородного уравнения (2). Тогда выражение:*

$$q(t) = \langle u(x);\varphi(x-t\theta)\rangle\,, \quad \varphi(x) \in S(R^n)\,,$$

есть квазиполином следующего вида:

$$q(t) = \exp(i\lambda t)\,p(t)\,, \quad t\to+\infty\,,$$

где $\lambda \in R$, *а* $p(t)$ *— некоторый полином, (зависящий, вообще говоря, от выбора пробной функции* $\varphi(x)$*).*

Отсюда немедленно получаем, что:

Следствие 3. *Если в условиях Предложения 5 справедливо равенство:*

$$q(t) = o(1)\,, \quad t \to +\infty\,, \quad \forall\, \varphi(x) \in S(R^n)\,,$$

то $u(x) = 0$ *в* R^n .

Объединяя Следствие 3 с Теоремой 2, мы устанавливаем справедливость следующего утверждения:

Теорема 3. *Пусть множество* $\mathcal{N}_P$ *оператора* $P(D) \not\sim 0$ *содержится в объединении конечного числа плоскостей* $\mathcal{N}_1\,, \ldots\,, \mathcal{N}_m \subset R^n$, *и пусть* $\theta_k \in \omega_k$ *— какая-либо фиксированная нормаль к плоскости* $\mathcal{N}_k$, $(k \in \overline{1;m})$. *Тогда любое решение* $u(x) \in S'(R^n)$ *однородного уравнения (2), удовлетворяющее системе условий:*

$$q_k(t) \equiv \langle u(x); \varphi(x - t\theta_k)\rangle = o(1)\,,\ t \to +\infty\,, \forall\, \varphi(x) \in S(R^m)\,, (k \in \overline{1;m})$$

может быть только тривиальным: $u(x) = 0$ *в* R^n .

Замечание 9. Обозначим через $Z'(R^n)$ пространство так называемых *аналитических функционалов* (см., напр., [3]), двойственное к пространству $Z(R^n) \subset S(R^n)$, состоящему из функций $\psi(z)$, голоморфных в $\mathbb{C}^n$ и представляющих собой Фурье-образы функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$. В ряде задач (см., напр., [6], [7]) уравнение (1) не может быть рассмотрено в классе $S'(R^n)$, а поэтому его приходится рассматривать в более широком классе (например, в упомянутом выше классе $Z'(R^n)$). Естественно, что и в этом случае возникают проблемы единственности решения. При этом все результаты, доказанные в данной работе, могут быть распространены и на класс $Z'(R^n)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёрмандер, Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. — М. : Изд-во. иностр. лит., 1959. — 190 с.

2. Hörmander, L. Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constsnt coefficients / L. Hörmander // Israel J. Math. — 1973. — V. 16. — P. 103–116.

3. Хёрмандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер — М. : Мир, 1965. — 379 с.

4. Засорин, Ю. В. О поведении на бесконечности решений некоторых классов дифференциальных некоторых классов дифференциальных уравнений и теоремы единственности / Ю. В. Засорин // Корректные краевые задачи для уравнений математической физики: Сб. научных тр. — 1984. — С. 74–80.

5. Засорин, Ю. В. О корректной разрешимости задач Коши, связанных с одним многопараметрическим классом трёхмерных нестационарных уравнений высоких порядков: групповые свойства и фокусировка решений / Ю. В. Засорин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 82–106.

6. Засорин, Ю. В. Метод перенормировки потенциала для одной модели типа Хартри–Фока–Слейтера / Ю. В. Засорин // Теор. и мат. физика. — 2002. — Т. 130, № 3. — С. 375–382.

7. Засорин, Ю. В. Метод мультипольного псевдопотенциала для некоторых задач квантовой теории рассеяния / Ю. В. Засорин // Теор. и мат. физика. — 2003. — Т. 135, № 3. — С. 504–514.

REFERENCES

1. Hermander L. On the theory of general partial differential operators. [Hyormander L. K teorii obshchix differencial'nyx operatorov v chastnyx proizvodnyx]. Moscow, 1959, 130 p.

2. Hermander L. Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constsnt coefficients. Israel Journal of Mathematics, 1973, vol. 16, pp. 103–116.

3. Hermander L. Linear partial differential operators. [Hyormander L. Linejnye differencial'nye operatory s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Mir, 1965, 379 p.

4. Zasorin Yu.V. About the behavior at infinity of solutions of some classes of differential equations and uniqueness theorems. [Zasorin Yu.V. O povedenii na beskonechnosti reshenij nekotoryx klassov differencial'nyx uravnenij i teoremy edinstvennosty]. *Korrektnye kraevye zadachi: Sbornik nauchnyx trudov. Institut Matematiki Sibirskogo otdelenija Akademii Nauk SSSR — Correct boundary value problems. Collection of scientific papers. Insitute of Mathematics of Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences*, 1984, pp. 74–80.

5. Zasorin Yu.V. About of correctly solvability initial value problems, related with multi-variable class hight order's non-stationary three-dimensional equations; group properties and focusing of solutions. [Zasorin Yu.V. O korrektnoj razreshimosti zadach Koshi, svjazannyx s odnim mnogoparametricheskim klassom tryoxmernyx nestacionarnyx uravnenij vysokix porjadkov: gruppovye svojstva i fokusirovka reshenij]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 2, pp. 82–106.

6. Zasorin Yu.V. Potential Renormalization Method for a Model of the Hartree–Fock–Slater Type. [Zasorin Yu.V. Metod perenormirovki potenciala dlya odnoj modeli tipa Xartri-Foka-Sleytera]. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 130, no. 3, pp. 442–450.

7. Zasorin Yu.V. The multipole pseudopotential method for some problems in quantum scattering theory. [Zasorin Yu.V. Metod multipol'nogo psevdopotenciala dlya nekotoryx zadach kvantovoy teorii rasseyaniya]. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 2003, vol. 135, no. 3, pp. 504–514.

Засорин Юрий Валентинович, доцент, к.ф.-м.н., Воронежский госуниверситет, факультет прикладной математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: york-york-york-1960@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–83–48

Zasorin Yuriy Valentinovich, Assistant Professor, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: york-york-york-1960@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–83–48