УДК 517.952

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КЛЕРО В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Л. А. Жидова

Томский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 18.02.2020 г.

Аннотация. Для обыкновенного дифференциального уравнения Клеро нахождение общего решения не представляет особого труда и подробно описано в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме общего решения, представляющего собой семейство линейных функций, для обыкновенного дифференциального уравнения Клеро могут существовать особые решения, для нахождения которых не существует общих методов. В особенности это касается уравнений Клеро в частных производных. О чем свидетельствует весьма скудный перечень в доступной научной литературе типов уравнений Клеро, для которых особые решения могут быть явно построены. Представленная статья посвящена поиску и исследованию особых решений уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В работе рассмотрена ситуация, когда можно установить связь между особыми решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения Клеро, особые решения.

ON SINGULAR SOLUTIONS OF CLAIRAUT EQUATIONS IN THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL AND PARTIAL DERIVATIVE EQUATIONS

L. A. Zhidova

Abstract. For ordinary differential Clairaut equation there is no problem to find the general solution which is described in details in the theory of ordinary differential equations. Besides the general solution being the family of linear functions, for ordinary differential Clairaut equation there may exist singular solutions to find them there are no general methods. This is especially true for the Clairaut partial differential equations. It is why that a poor list of Clairaut-type equations exists for which singular solutions can be constructed. The present paper is devoted to search and study of singular solutions to the Clairaut equation in the theory of ordinary and partial differential equations. In the paper situation is considered when one can find a connection between singular solutions to the Clairaut equation in the theory of ordinary differential and partial derivative equations.

Keywords: ordinary differential equations, partial derivative equations, Clairaut equations, singular solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая статья посвящена изучению дифференциальных уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных и поиску их особых решений. Что касается описания общего решения уравнения Клеро, то здесь нет никаких принципиальных проблем – оно всегда описывается в терминах семейства линейных функций. Однако большой интерес представляют, так называемые, особые (сингулярные) решения, для нахождения которых не существует общих методов, и поиск таких решений всегда представляет собой некую изобретательность, поэтому привлекает внимание многих исследователей. Поиск особых решений для различного вида функций остается актуальной задачей, поскольку имеет большое практическое значение, в частности, в квантовой теории калибровочных полей. Нами приведены основные понятия и решение уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Кроме того в настоящей статье высказано предположение о наличии связи между сингулярными решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частых производных и представлено подтверждение этого предположения, а именно в классе специальных зависимостей правых частей уравнения Клеро в теории уравнений в частных производных существует связь с особыми решениями уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕРО

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений уравнение Клеро

$$y - y'x = \psi\left(y'\right) \tag{1}$$

принадлежит к классу уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Здесь $y = y\left(x\right)$ — неизвестная функция вещественной переменной x, $\psi\left(z\right)$ — представляет заданную функцию вещественной переменной z. Хорошо известно, что общее решение уравнения (1) представляет собой семейство линейных функций

$$y = Cx + \psi\left(C\right), \tag{2}$$

где C — произвольная вещественная константа.

Однако особый интерес в теории уравнений Клеро представляют особые (сингулярные) решения. Они возникают в тех случаях, когда

$$x + \psi'\left(z\right) = 0 \tag{3}$$

имеет вещественное решение, выражающее переменную z как функцию переменной x.

Тогда

$$y = xz\left(x\right) + \psi\left(z\left(x\right)\right) \tag{4}$$

представляет собой особое или сингулярное решение уравнения Клеро (1). Для их нахождения не существует общих методов, и поиск таких решений связан с известной изобретательностью и находчивостью. В особенности это касается уравнений Клеро в частных производных. Этим, в частности, объясняется весьма скудный перечень в доступной научной литературе типов уравнений Клеро, для которых особые решения могут быть явно построены [1, 4].

В свою очередь, интерес к изучению особых решений уравнения Клеро связан с недавно обнаруженным фактом [5, 6] в квантовой теории калибровочных полей с составными операторами, выражающимся в том, что однопетлевое эффективное действие может быть выражено в терминах особых решений уравнения Клеро.

2. УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕРО В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В теории дифференциальных уравнений в частных производных рассматриваются уравнения вида

$$y - y_i' \, x^i = \psi \left(y_1', y_2', ..., y_n' \right) \tag{5}$$

где неизвестная функция y является функцией переменных $x^1, x^2, ..., x^n$, а $\psi (z_1, z_2, ..., z_n)$ представляет собой заданную функцию переменных $z_1, z_2, ..., z_n$, а по повторяющимся индексам в левой части (5) подразумевается суммирование. Уравнения вида (5) известны в теории уравнений в частных производных также как уравнения типа Клеро [1].

Как и в случае уравнения Клеро (1), общее решение уравнения (5) описывается семейством линейных функций

$$y = C_i \, x^i + \psi (C_1, C_2, ..., C_n) \,, \tag{6}$$

где C_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ — произвольные вещественные постоянные. Если система следующих уравнений

$$x^i + \frac{\partial \psi (z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{7}$$

имеет вещественные решения, выражающие величины z_i как функции переменных $x^1, x^2, ..., x^n$, то уравнение (5) имеет особое (сингулярное) решение

$$y = x^i \, z_i (x) + \psi (z_1 (x) \,, z_2 (x) \,, ..., z_n (x)) \,, \tag{8}$$

где мы для краткости записи обозначили $z_i (x) = z_i \left(x^1, x^2, ..., x^n \right)$, $i = 1, 2, ..., n$.

В [7, 8] нами были изучены способы нахождения особых решений уравнений Клеро в теории уравнений в частных производных в классе специальных видов различных функций $\psi (z_1, z_2, ..., z_n)$.

В связи с сингулярными решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных возникает естественный вопрос: А существует ли какая-либо связь между этими классами особых решений?

3. УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КЛЕРО В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В настоящей статье представлены результаты исследования по установлению связи между сингулярными (особыми) решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частых производных.

Обратим внимание на систему n уравнений (7), предположив существование особых решений

$$x_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

$$z_i (x) = z_i \left(x^1, x^2, ..., x^n \right) ,$$

$$y = \sum_i x^i z_i \left(x^1, x^2, ..., x^n \right) + \psi \left(z_1 \left(x^1, x^2, ..., x^n \right) , z_2 \left(x^1, x^2, ..., x^n \right) , ..., z_n \left(x^1, x^2, ..., x^n \right) \right) .$$

Рассмотрим ситуацию, когда правая часть уравнения Клеро в теории дифференциальных уравнений в частных производных имеет специальный вид

$$\psi (z_1, z_2, ..., z_n) = g_1 (z_1) + g_2 (z_2) + ... + g_n (z_n) \,. \tag{9}$$

Откуда $\frac{\partial \psi}{\partial z_i} = \frac{\partial g_i(z_i)}{\partial z_i} = \frac{dg_i(z_i)}{dz_i}$.

Таким образом имеем $x_i + \frac{dg_i(z_i)}{dz_i} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Тогда система уравнений распадается на систему несвязных уравнений, которые уже рассматривались при интегрировании уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_i\left(x\right) = z_i\left(x^i\right),$$
$$y = \sum_i x^i z_i\left(x^i\right) + \psi\left(z_1\left(x^1\right), z_2\left(x^2\right), ..., z_n\left(x^n\right)\right). \tag{10}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, впервые в известной нам литературе в классе специальных зависимостей правых частей уравнения Клеро в теории уравнений в частных производных, найдена связь между особыми решениями в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и особыми решениями в теории уравнений Клеро в частных производных. Число таких решений определяется числом известных особых решений уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их всевозможными комбинациями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. — М. : Наука, 1966. — 260 с.

2. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М. : Мир, 1964. — 830 с.

3. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматлит, 1965. — 512 с.

4. Зайцев, В. Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — М. : Физматлит, 2003. — 416 с.

5. Lavrov, P. M. Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach / P. M. Lavrov, B. S. Merzlikin // Physical Review D. — 2015. — V. 92. — P. 085038.

6. Lavrov, P. M. Legendre transformations and Clairaut-type equations / P. M. Lavrov, B. S. Merzlikin // Physics Letters B. — 2016. — V. 756. — P. 188–193.

7. Жидова, Л. А. Дифференциальное уравнение типа Клеро в частных производных со степенной функцией / Л. А. Жидова, Л. Л. Рыскина // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2019. — № 1. — С. 41–48.

8. Жидова, Л. А. Решение дифференциальных уравнений Клеро в частных производных с логарифмической функцией / Л. А. Жидова, Л. Л. Рыскина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2019. — № 2.

REFERENCES

1. Kamke E. Handbook of First Order Partial Differential Equations. [Kamke E. Spravochnik po differencial’nym uravneniyam v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. Moscow, 1966, 260 p.

2. Courant R. Partial Differential Equations. [Kurant R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi]. Moscow Mir, 1964, 830 p.

3. Stepanov V.V. Course of differential equations. [Stepanov V.V. Kurs differencial’nyx uravneniyj]. Moscow, 1965, 512 p.

4. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Handbook of first-order partial differential equations. [Zayjcev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po differencial’nym uravneniyam v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. Moscow, 2003, 416 p.

5. Lavrov P.M., Merzlikin B.S. Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach. Physical Review D, 2015, vol. 92, pp. 085038.

6. Lavrov P.M., Merzlikin B.S. Legendre transformations and Clairaut-type equations. Physics Letters B, 2016, vol. 756, pp. 188–193.

7. Zhidova L.A., Ryskina L.L. Differential equation of Claireau type in partial derivatives with a power function. [ZHidova L.A., Ryskina L.L. Differencial'noe uravnenie tipa Klero v chastnyx proizvodnyx so stepennoyj funkcieyj]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika — Bulletin of the Buryat State university. Mathematics, computer science*, 2019, no. 1, pp. 41–48.

8. Zhidova L.A., Ryskina L.L. Solution of Clairaud partial differential equations with a logarithmic function. [ZHidova L.A., Ryskina L.L. Reshenie differencial'nyx uravneniyj Klero v chastnyx proizvodnyx s logarifmicheskoyj funkcieyj]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedeniyj. Povolzhskiyj region. Fiziko-matematicheskie nauki — Proceedings of higher educational institutions. Volga region. Physics and mathematics*, 2019, no. 2.

Жидова Любовь Александровна, кандидат педагогических наук, доцент, Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия
E-mail: gidovala@yandex.ru

Zhidova Lyubov Aleksandrovna, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russia
E-mail: gidovala@yandex.ru