УДК 531.36; 534.1

ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАЯТНИКОВ, КОЛЕБЛЮЩИХСЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ)

Поступила в редакцию 29.07.2019 г.

Аннотация. Решена задача о взаимодействии двух металлических маятников, колеблющихся в параллельных плоскостях, расстояние между точками подвеса которых фиксировано и равно b. Доказана принципиальная возможность их синхронизации благодаря учету двух физических факторов: 1. Эффекту электромагнитного взаимодействия между ними и 2. Учету ЭМ излучения каждого маятника, приводящего к нелинейному затуханию. Проанализирована система полученных строгим математическим путем нелинейных динамических уравнений движения, и приведено их численное решение.

Ключевые слова: электромагнитное взаимодействие, электромагнитное излучение, плоско–параллельное движение, динамические уравнения.

THE DYNAMICS OF INTERACTIONS PENDULUMS OSCILLATING IN PARALLEL PLANES

S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova

Abstract. The problem of interaction of two metal pendulums oscillating in parallel planes, the distance b between the suspension points of which is fixed and equally, has been solved. The principle possibility of their synchronization is provided by taking into account two physical factors: 1. Effect of electromagnetic interaction between them and 2. Accounting for EM radiation of each pendulum, leading to non-linear attenuation. The system of nonlinear dynamic motion equations obtained by a strict mathematical path is analyzed, and their numerical solution is given.

Keywords: electromagnetic interaction, electromagnetic radiation, flat – parallel motion, dynamic equations.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача, о которой пойдет речь в настоящей работе, является логическим продолжением двух предыдущих авторских работ [1], [2], в которых строго аналитически было приведено описание физики синхронного поведения маятников, и получены основные динамические уравнения движения, позволяющие на формальном математическом языке интерпретировать полную картину синхронизации в том случае, если их движение происходит в одной плоскости.

Для того, чтобы описать динамику маятников случае, когда их колебания происходят в параллельных плоскостях, мы будем опираться на схему вычислений, намеченную нами ранее (см. [1], [2]), и использовать основную идею этих работ.

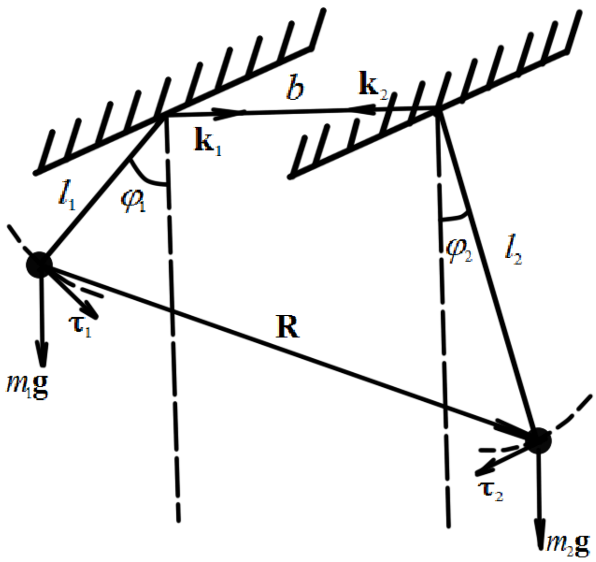

Рис. 1. *Схематическая геометрия задачи.*

В общем случае, если длины подвесов разные и равны l_1 и l_2, то в соответствии с геометрией, показанной на рис. 1, имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1 + \mathbf{b}.$$

Возводя это уравнение в квадрат, и пользуясь ортогональностью векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{l}_1$,$\mathbf{l}_2$, находим отсюда, что расстояние между центрами маятников будет

$$R = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + b^2 - 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{1}$$

Если маятники тождественны, то есть $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$, из соотношения (1) тривиально записывается условие синхронизации колебаний в виде равенства $R = b$. Это автоматически приводит к простому уравнению

$$l - l\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \tag{2}$$

Откуда немедленно следует, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{3}$$

и

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2. \tag{4}$$

Условия (3) и (4) для случая эквивалентных маятников представляют собой идеальные условия синхронизации в случае, если разность их фаз $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ равна нулю. Если она не равна нулю, то условие (3) следует представить как

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \delta.$$

Однако, если длины подвесов разные, то есть $l_1 \neq l_2$, условие синхронизации можно записать только в виде равенства угловых частот в соответствии с (4), поскольку в этом случае $\varphi_1 \neq \varphi_2$. При этом становится совершенно понятно, что согласно условию (4) имеем

$$\varphi_1 = \omega_0 t + \alpha_1, \quad \varphi_2 = \omega_0 t + \alpha_2, \tag{5}$$

где $\alpha_{1,2}$ — постоянные фазы.

Сказанное означает, что в условиях рассматриваемой задачи расстояние R становится фиксированным и согласно (1)

$$R = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + b^2 - 2l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = const. \tag{6}$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для получения уравнений движения и их последующего анализа нам следует предварительно ввести энергию взаимодействия между маятниками. Также как и в работе [1] динамику движения удобно описывать на языке обобщенных координат, роль которых играют угловые переменные φ_1 и φ_2.

Согласно рис. 1 полную энергию системы в случае двух разных маятников можно представить следующим образом

$$E = T + U = U_0 + \frac{m_1 l_{1c}^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 l_{2c}^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} - g\left(m_1 l_{1c}\cos\varphi_1 + m_2 l_{2c}\cos\varphi_2\right) + \frac{U_{12}(R) + U_{21}(R)}{2} = const, \tag{7}$$

где $U_0 = (m_1 + m_2)\, gH$, $l_{1,2c}$ — расстояние от точки подвеса маятников до их центра масс, а H — одинаковая высота подвеса маятников над Землей.

В отличие от зависимости (1) расстояние между центрами маятников удобно ввести в векторном виде, который позволяет автоматически учитывать криволинейность их траектории движения. Действительно, поскольку в начальный момент времени $t = 0$ расстояние было R_0, то в любой последующий момент времени его можно представить как

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \int\limits_0^t \left(\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t)\right) dt, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости обоих шаров.

Будем полагать, что потенциальная энергия взаимодействия маятников имеет природу чисто электромагнитного происхождения, которое является следствием движения металлических маятников, наподобие гиромагнитного эффекта, как это было строго обосновано в работе [1].

Поэтому потенциальную энергию мы представим в виде

$$U = U_{EM}\left(\left|\mathbf{R}_0 - \int\limits_0^t \left(\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t)\right) dt\right|\right). \tag{9}$$

В соответствии с результатами работы [1] выражение (9) можно легко найти благодаря основным принципам классической электродинамики (см., к примеру, [3–4]).

В результате будем иметь для энергии ЭМ взаимодействия

$$U_{EM} = \frac{1}{c^2} \int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2}{\widetilde{R}} dV_1 dV_2, \tag{10}$$

где вектор $\widetilde{\mathbf{R}}$ определен как

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tag{11}$$

а радиус–вектора $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ представляют собой текущие направления в каждом из шаров, отсчитываемых из их центров, по которым ведется интегрирование в (10), V_1 и V_2 объемы этих шаров, c — скорость света, $\mathbf{j}_{1,2}$ — плотности токов в каждом из шаров, возникающие в результате не инерционности их движения. Поскольку плотность тока в движущемся шаре есть $\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v}$, где ρ_e — плотность электронов в шаре, а его скорость при колебательном движении определяется как $\mathbf{v} = l_c \dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}$, где l_c — расстояние от точки подвеса до центра масс системы шар + стержень, то для плотности тока получаем

$$\mathbf{j}_1 = \rho_e \mathbf{v}_1 = \rho_e \left[\boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_1)\right] = \rho_e \dot{\varphi}_1 \left[\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_1)\right] = \rho_e \dot{\varphi}_1 \left(l_{1c} \boldsymbol{\tau}_1 + r_1 \boldsymbol{\nu}_1\right), \tag{12}$$

аналогично

$$\mathbf{j}_2 = \rho_e \dot{\varphi}_2 \left(l_{2c} \boldsymbol{\tau}_2 + r_2 \boldsymbol{\nu}_2\right), \tag{13}$$

где $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ соответственно единичные вектора, направленные по угловым скоростям $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ вдоль оси z, направление которой совпадает с направлением вектора $\mathbf{b}$ (см. рис. 1). Единичные вектора $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ направлены по касательной к окружности движения, единичные вектора $\boldsymbol{\nu}_1$ и $\boldsymbol{\nu}_2$ можно считать виртуальными, поскольку $\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$, а $\boldsymbol{\nu}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}$. В результате их подстановки в формулу (13), а затем в (10) получаем

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2}{c^2} \int\limits_{V_1} \int\limits_{V_2} \tfrac{(l_{1c}\boldsymbol{\tau}_1 + r_1 \boldsymbol{\nu}_1)(l_{2c}\boldsymbol{\tau}_2 + r_2 \boldsymbol{\nu}_2) dV_1 dV_2}{\widetilde{R}} = \\ &= \tfrac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2}{c^2} \Bigg[l_{1c} l_{2c} \left(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2\right) \int\limits_{V_1} \int\limits_{V_2} \tfrac{dV_1 dV_2}{\widetilde{R}} + l_{1c} \int\limits_{V_1} \int\limits_{V_2} \tfrac{r_2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_2) dV_1 dV_2}{\widetilde{R}} + \\ &+ l_{2c} \int\limits_{V_1} \int\limits_{V_2} \tfrac{r_1 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_1) dV_1 dV_2}{\widetilde{R}} + \int\limits_{V_1} \int\limits_{V_2} \tfrac{r_1 r_2 (\boldsymbol{\nu}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_2) dV_1 dV_2}{\widetilde{R}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{14}$$

Скалярное произведение единичных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, как видно из рис. 1 есть $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = \cos\left(\pi - \varphi_1 + \varphi_2\right) = -\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$, а для всех остальных скалярных произведений, фигурирующих в (14), результат интегрирования по угловым переменным дает нуль. В итоге выражение (14) сильно упрощается и мы получаем

$$U_{EM} = -l_{1c} l_{2c} \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2\right) \rho_e^2}{c^2} \int\limits_V \int\limits_V \frac{dV_1 dV_2}{\widetilde{R}}, \tag{15}$$

где объемы шаров мы считаем одинаковыми.

Поскольку

$$\widetilde{R} = \sqrt{R^2 + 2Rr_1 \cos\theta_1 - 2Rr_2 \cos\theta_2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\left(\varphi - \varphi'\right)\right)}, \tag{16}$$

а в сферических координатах

$$dV_1 = r_1^2 \sin\theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi, \quad dV_2 = r_2^2 \sin\theta_2 dr_2 d\theta_2 d\varphi'. \tag{17}$$

Напомним, что единичные вектора $\mathbf{k}_{1,2}$ направлены по вектору $\mathbf{b}$, и могут иметь случайный характер.

В соответствии с размерностью взаимодействия (15), его можно переписать в виде

$$U_{EM} = -\frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2\right) \rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c} \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{c^2 b} \xi, \tag{18}$$

где ξ — численный безразмерный коэффициент порядка единицы, не слишком важный для нас.

Скалярное произведение единичных орт $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ есть $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \cos\psi$, и знак этого произведения в определенные моменты времени может меняться, однако, принципиального и глубокого смысла он не несет. В этом плане мы можем просто считать, что $\cos\psi = \pm 1$.

В силу того, что линейные скорости можно записать в виде $\mathbf{v}_1 = \dot{\varphi}_1 l_{1c}\boldsymbol{\tau}_1$, а $\mathbf{v}_2 = \dot{\varphi}_2 l_{2c}\boldsymbol{\tau}_2$, где $\boldsymbol{\tau}_{1,2}$ — единичные вектора касательной к траектории движения, то их можно представить в виде разложения по неподвижному двухмерному базису $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$, показанному на рис. 1, то есть

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{i}\cos\varphi_1 + \mathbf{j}\sin\varphi_1, \\ \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{i}\cos\varphi_2 + \mathbf{j}\sin\varphi_2. \end{cases}$$

В результате имеем

$$\int\limits_0^t (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)dt = \int\limits_0^t (l_{1c}\dot{\varphi}_1 (\mathbf{i}\cos\varphi_1 + \mathbf{j}\sin\varphi_1) + l_{2c}\dot{\varphi}_2 (\mathbf{i}\cos\varphi_2 + \mathbf{j}\sin\varphi_2))dt =$$
$$= l_{1c}\int\limits_{\varphi_{01}}^{\varphi_1} d\varphi_1 (\mathbf{i}\cos\varphi_1 + \mathbf{j}\sin\varphi_1) + l_{2c}\int\limits_{\varphi_{02}}^{\varphi_2} d\varphi_2 (\mathbf{i}\cos\varphi_2 + \mathbf{j}\sin\varphi_2) =$$
$$= [\mathbf{i}(l_{1c}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_{01}) + l_{2c}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_{02})) -$$
$$-\mathbf{j}(l_{1c}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_{01}) + l_{2c}(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_{02}))]. \quad (19)$$

Поэтому

$$\begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{i}(R_{0x} + l_{1c}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_{01}) + l_{2c}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_{02})) + \\ +\mathbf{j}(R_{0y} - l_{1c}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_{01}) + l_{2c}(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_{02})). \end{array}, \quad (20)$$

где было использовано разложение по базису $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}R_{0x} + \mathbf{j}R_{0y}$.

С учетом (20) общее выражение для потенциальной энергии в рассматриваемой двухмерной задаче следует записать как

$$U_{EM} = U_{EM}(|\mathbf{i}(R_{0x} + l_{1c}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_{01}) + l_{2c}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_{02})) +$$
$$+\mathbf{j}(R_{0y} - l_{1c}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_{01}) + l_{2c}(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_{02}))|) \quad (21)$$

где энергия U_{EM} определяется формулой (18).

3. МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ МАЯТНИКОВ

Как было показано в [1], мощность ЭМ излучения маятников, приводящая в конечном итоге к их синхронизации, может быть легко найдена, если воспользоваться общими свойствами потенциалов Лиенара – Вихерта. Согласно, например, [4–5], любой движущийся заряд создает на некотором расстоянии r от себя скалярный потенциал ψ и векторный $\mathbf{A}$, которые можно описать следующими симметричными формулами

$$\begin{array}{l} \psi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}} + \frac{1}{R + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}}\right) = \frac{e}{R\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right]}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{e\mathbf{v}}{2c}\left(\frac{1}{R - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}} + \frac{1}{R + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}}\right) = \frac{e\mathbf{v}}{Rc\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right]}. \end{array} \quad (22)$$

где единичный вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, а расстояние $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, где $\mathbf{r}_0(t)$ — траектория движения заряда.

Эти формулы легко обобщить на наш конкретный случай. То есть вместо (22) имеем

$$\begin{array}{l} \psi(\mathbf{r},t) = \frac{enV}{R\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right]} \approx \frac{enV}{R}\left[1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right], \\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{enV\mathbf{v}}{Rc\left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right]} \approx \frac{enV\mathbf{v}}{Rc}\left[1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2\right], \end{array} \quad (23)$$

где n — концентрация зарядов, а V — объем шарового маятника (см. выше).

Поскольку распределения ЭМ полей вне маятников можно вычислить с помощью известных определений (см. [4]), а именно

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\psi, \\ &\mathbf{B} = rot\mathbf{A}, \end{aligned} \tag{24}$$

то подставляя сюда (23), получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = -\tfrac{enV}{c^2}\left(\tfrac{\dot{\mathbf{v}}}{R} + \tfrac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R})}{R^3}\right) + \tfrac{enV\mathbf{R}}{R^3} + \tfrac{enV\mathbf{R}}{R^3}\left(\tfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2 + \tfrac{2enV\mathbf{v}}{R^3}\left(\tfrac{\mathbf{vR}}{c}\right)^2 = \\ &= \tfrac{enV\mathbf{R}}{R^3} - \tfrac{enV}{c^2}\tfrac{\dot{\mathbf{v}}}{R} + \tfrac{enV\mathbf{R}}{R^3}\left(\tfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^2 + \tfrac{enV\mathbf{v}}{R^3}\left(\tfrac{\mathbf{vR}}{c}\right)^2, \\ &\mathbf{B} = \tfrac{enV}{cR^3}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{R}\right], \end{aligned} \tag{25}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, а $\mathbf{r}_0(t)$ — траектория движения. Откуда следует, что $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}}_0 = -\mathbf{v}$.

Оставляя в (25) одно слагаемое, непосредственно связанное с излучением, имеем для него

$$\mathbf{E}^{\text{изл.}} = -\frac{enV}{c^2}\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}. \tag{26}$$

В соответствии с рис. 1 скорость движения маятника определяется как $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, а потому ускорение есть $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{l}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к траектории движения, то есть к окружностям радиусов $l_{1,2c}$. Следовательно, исходя из определения интенсивности излучения I согласно [3] и формуле (26), имеем

$$I = \frac{c\mathbf{E}^2_{\text{изл}}}{8\pi} = \frac{c}{8\pi}\left(\frac{enV}{c^2}\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}\right)^2 = \frac{(enV)^2}{8\pi c^3}\frac{1}{R^2}\left(\dot{v}^2 + \frac{v^4}{l^2}\right). \tag{27}$$

Поскольку $v = l\dot{\varphi}$, то

$$I = \frac{(enV)^2}{8\pi c^3}\frac{l^2}{R^2}\left(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4\right). \tag{28}$$

Мощность излучения можно определить как $W = \int IR^2 dO = 4\pi IR^2$. Согласно (28) находим для нее

$$W = \frac{(enVl)^2}{2c^3}\left(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4\right). \tag{29}$$

4. ВЫВОД СИСТЕМЫ ОБЩИХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Чтобы получить интересующие нас уравнения, воспользуемся подходом, предложенным в работе [6]. С этой целью запишем уравнение баланса мощностей

$$\sum \dot{E} + \sum \dot{Q} + \sum W = 0, \tag{30}$$

где $\dot{Q}$ — диссипативная функция. Если пренебречь диссипативными свойствами среды, то в идеальном случае (например, в вакууме) имеем

$$\sum \dot{E} + \sum W = 0. \tag{31}$$

С учетом (18) полная энергия системы может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &E = U_0 + \tfrac{m_1 l_{1c}^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \tfrac{m_2 l_{2c}^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} - g\left(m_1 l_{1c}\cos\varphi_1 + m_2 l_{2c}\cos\varphi_2\right) - \\ &- \tfrac{\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)\rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c}\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{c^2 b}\xi. \end{aligned} \tag{32}$$

Дифференцируя (32) по времени и вынося за скобки независимые переменные $\dot\varphi_1$ и $\dot\varphi_2$, имеем

$$\begin{aligned}&\dot E = m_1 l_{1c}^2\dot\varphi_1\ddot\varphi_1 + m_2 l_{2c}^2\dot\varphi_2\ddot\varphi_2 + g\left(\dot\varphi_1 m_1 l_{1c}\sin\varphi_1 + \dot\varphi_2 m_2 l_{2c}\sin\varphi_2\right) -\\ &-\tfrac{\xi\cos\psi\rho_e^2V^2l_{1c}l_{2c}}{c^2b}\left[\ddot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\dot\varphi_1\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\dot\varphi_1\dot\varphi_2(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] =\\ &=\dot\varphi_1\Big[m_1l_{1c}^2\ddot\varphi_1+m_1gl_{1c}\sin\varphi_1-\tfrac{\xi\cos\psi\rho_e^2V^2l_{1c}l_{2c}}{c^2b}\left(\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\dot\varphi_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)\Big]+\\ &+\dot\varphi_2\Big[m_2l_{2c}^2\ddot\varphi_2+m_2gl_{2c}\sin\varphi_2-\tfrac{\xi\cos\psi\rho_e^2V^2l_{1c}l_{2c}}{c^2b}\left(\ddot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\dot\varphi_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)\Big].\end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя теперь (33) в общее уравнение (31) с учетом излучения (29), и пользуясь независимостью переменных $\dot\varphi_1$ и $\dot\varphi_2$, приходим к искомой системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\ddot\varphi_1+\omega_{10}^2\sin\varphi_1-\omega_{10}^2\lambda_1\left(\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\dot\varphi_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)+\omega_{10}^2\kappa_1\dot\varphi_1^3=0,\\ \ddot\varphi_2+\omega_{20}^2\sin\varphi_2-\omega_{20}^2\lambda_2\left(\ddot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\dot\varphi_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)+\omega_{20}^2\kappa_2\dot\varphi_2^3=0,\end{cases} \tag{34}$$

в которые введены сокращенные обозначения $\omega_{01,2}=\sqrt{\frac{g}{l_{1,2c}}}$, и безразмерные параметры

$$\lambda_1=\frac{\xi\cos\psi\rho_e^2V^2l_{2c}}{m_1\omega_{10}^2c^2bl_{1c}},\quad \lambda_2=\frac{\xi\cos\psi\rho_e^2V^2l_{1c}}{m_2\omega_{20}^2c^2bl_{2c}},\quad \kappa_1=\frac{(enV)^2}{2m_1\omega_{10}^2c^3},\quad \kappa_2=\frac{(enV)^2}{2m_2\omega_{20}^2c^3}. \tag{35}$$

Заметим, что при получении уравнений (34) было использовано условие $|\ddot\varphi_{1,2}| \ll |\dot\varphi_{1,2}^2|$ (см. выражение (29)), которое подтверждается графическим сравнением соответствующих слагаемых в соответствии с рис. 2, полученное после численного интегрирования системы уравнений (34). То есть согласно (29) мощность излучения можно представить в приближенном виде, как $W\approx\frac{(enVl)^2}{2c^3}\dot\varphi^4$.

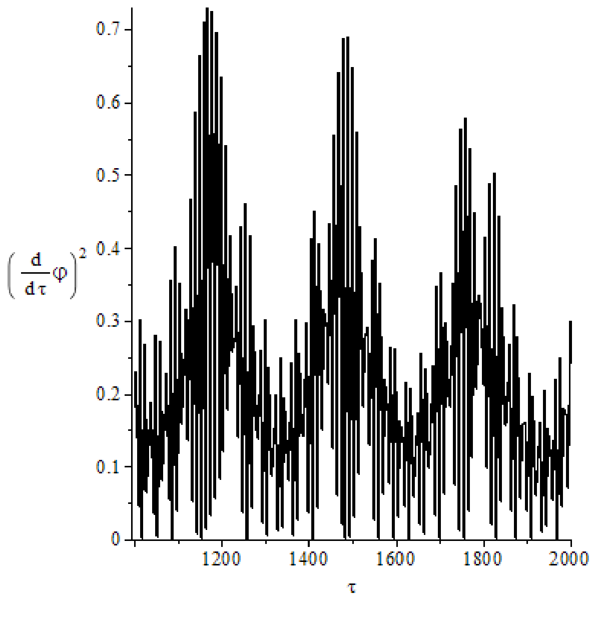

Рис. 2. *Сравнение зависимостей $\dot\varphi_{1,2}^2(\tau)$ и $\ddot\varphi_{1,2}(\tau)$. Зависимость $\ddot\varphi_{1,2}$ практически сливается с горизонтальной осью τ, а $\dot\varphi_{1,2}^2(\tau)$ показана на рисунке, т. е. предположение $|\ddot\varphi_{1,2}| \ll |\dot\varphi_{1,2}^2|$ оправдано.*

Если ввести безразмерное время $\tau=\omega_0 t$, и совершить формальную замену $\varphi_1\to-\varphi_1, \varphi_2\to-\varphi_2$, то система (34) преобразуется к виду, удобному для численного интегрирования

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin\varphi_1 - \lambda_1 \left(\varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) + \kappa_1 \varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin\varphi_2 - \lambda_2 \left(\varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) + \kappa_2 \varphi_2'^3 = 0, \end{cases} \tag{36}$$

где штрихи означают дифференцирование по τ.

Как видно из уравнений (36), единственная стационарная точка определяется простым уравнением $\sin\varphi_{st1,2} = 0$, из которого и следует решение $\varphi_{st1,2} = 0$.

Это решение будет являться асимптотически устойчивым несмотря на осциллирующий характер движения маятников. Он представляет собой центральную точку в координатах $\varphi_1 - \varphi_2$, относительно которой и происходят хаотические и локализованные вблизи нее колебания, в которую оба маятника синхронно "скатываются". В этом мы убедимся чуть ниже с помощью метода численного решения системы уравнений (36).

Для их решения следует задать начальные условия, которые выберем в виде

$$\varphi_1(0) = -\varphi_{01}, \varphi_2(0) = \varphi_{02}, \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0. \tag{37}$$

Подчеркнем еще раз, что в излагаемом решении мы не принимаем во внимание какие–либо диссипативные процессы типа сухого трения или вязкостного, как это делается, скажем, для часовых механизмов и чему посвящено подавляющее большинство работ по теории синхронизации (см., например, монографии [7–8]), поскольку наша главная цель показать принципиальную возможность появления эффекта синхронизации до момента остановки маятников.

Как уже говорилось, строгое доказательство возможности синхронизации основано на учете двух чисто физических факторов: 1. Энергии электромагнитного взаимодействия, существующего между металлическими шарами и 2. Их ЭМ излучение, порождаемое неинерционным движением шаров по криволинейной траектории.

Численное решение системы уравнений (36) для конкретных граничных условий при условии, что маятники разные ($\kappa_1 \neq \kappa_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{6}, \varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}, \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0, \tag{38}$$

можно проиллюстрировать с помощью рис. 3, на котором изображены зависимости $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ и $\varphi_2' = \varphi_2'(\varphi_1')$. Заметим, что в работах [1–2] зависимости $\varphi_2' = \varphi_2'(\varphi_1')$ построены не были. Этот маленький пробел мы устраняем в настоящей статье.

Как показывает численное решение системы уравнений (36) в условиях, когда маятники полностью эквивалентны (коэффициенты $\kappa_{1,2}$ и $\lambda_{1,2}$ в уравнениях (36) следует просто заменить на одинаковые значения κ и λ), эффект синхронизации также имеет место (см. рис. 4).

С точки же зрения численного анализа чрезвычайно важным, ввиду своей наглядности, является графическая иллюстрация решений системы (36), что позволяет показать на рисунках весь процесс синхронизации, и численно оценить время синхронизации $t_{\text{синхр}}$ для разных значений параметров λ и κ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При учете электромагнитного взаимодействия и излучения, идущего от колеблющихся в разных параллельных плоскостях маятников, наступает эффект синхронизации колебаний, приводящий к выполнению условия $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$.

Численно показано, что синхронизация наступает через вполне конкретное время $t_{\text{синхр}}$, значения которого зависят от конкретных физических и геометрических параметров задачи.

Приведено численное решение уравнений (36), и построены соответствующие зависимости.

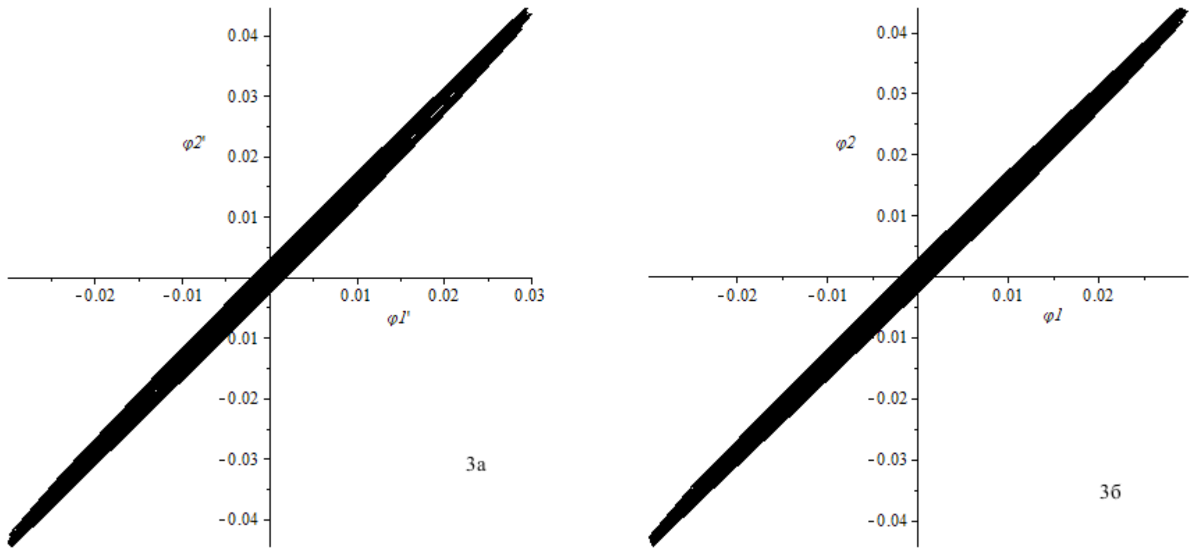

Рис. 3. *На рисунке показаны зависимости* $\varphi_2'(\varphi_1')$ *(3а) и* $\varphi_2(\varphi_1)$*(3б) на временном интервале* $\tau \in [739900{,}740000]$. *Значения параметров* $\lambda_1 = 10^{-2}$,$\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-2}$,$\kappa_1 = 10^{-3}$,$\kappa_2 = 2 \cdot 10^{-3}$.

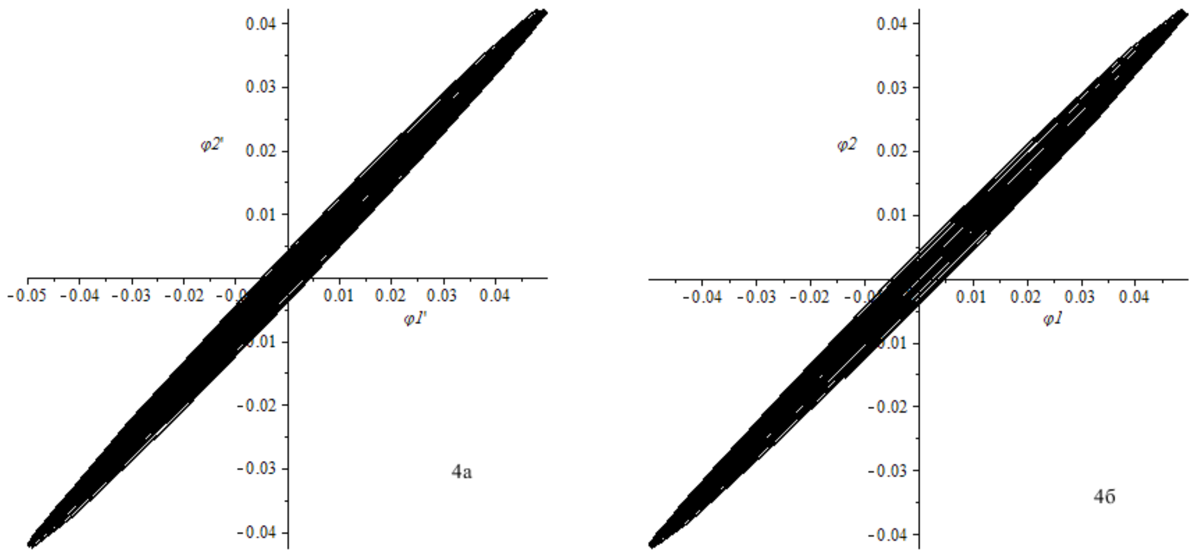

Рис. 4. *На рисунке показаны зависимости* $\varphi_2'(\varphi_1')$ *(4а) и* $\varphi_2(\varphi_1)$ *(4б) на временном интервале* $\tau \in [739900{,}740000]$ *для тождественных маятников, т. е. значения параметров* $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-2}$ *и* $\kappa_1 = \kappa_2 = 10^{-3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гладков, С. О. Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Инженерная физика. — 2019. — № 1. — С. 49–62.

2. Гладков, С. О. Теория детерминированного хаоса в системе N взаимодействующих компланарных маятников / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Инженерная физика. — 2019. — № 3. — С. 9–21.

3. Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 2002. — 620 с.

4. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 2001. — 520 с.

5. Гладков, С. О. К теории распределения ЭМ полей для потенциалов Лиенара–Вихерта / С. О. Гладков // Инженерная физика. — 2018. — № 8. — С. 3–10.

6. Гладков, С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра / С. О. Гладков // ЖТФ. — 2018. — Т. 59, № 3. — С. 377–341.

7. Блехман, И. И. Синхронизация в природе и технике / И. И. Блехман. — М. : Наука, 1981. — 320 с.

8. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Физматлит, 1959. — 916 с.

REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Chaotic dynamics of interacting pendulums (decision of synchronization problem). [Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Xaoticheskaya dinamika vzaimodeyjstvuyushhix mayatnikov (reshenie problemy sinxronizacii)]. *Inzhenernaya fizika — Engineering Physics*, 2019, № 1, pp. 49–62.

2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. The theory deterministic chaos in the system N interacting complanar pendulum. [Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Teoriya determinirovannogo xaosa v sisteme N vzaimodeyjstvuyushhix komplanarnyx mayatnikov]. *Inzhenernaya fizika — Engineering Physics*, 2019, № 3, pp. 9–21.

3. Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodynamics of continuous media. [Landau L.D., Lifshic E.M. Elektrodinamika sploshnyx sred]. Moscow: Publishing House «Sciences», 2002, 620 p.

4. Landau L.D., Lifshitz E.M. Field theory. [Landau L.D., Lifshic E.M. Teoriya polya]. Moscow: Publishing House «Sciences», 2001, 520 p.

5. Gladkov S.O. On the theory of the distribution of EM fields for Lienard–Wihert potentials. [Gladkov S.O. K teorii raspredeleniya EM poleyj dlya potencialov Lienara–Vixerta]. *Inzhenernaya fizika — Engineering Physics*, 2018, № 8, pp. 3–10.

6. Gladkov S.O. On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external cylinder. [Gladkov S.O. K voprosu o vychislenii vremeni ostanovki vrashhayushhegosya v vyazkom kontinuume cilindricheskogo tela i vremeni uvlecheniya soosnogo s nim vneshnego cilindra]. *ZHurnal texnicheskoyj fiziki — Technical physics*, 2018, vol. 63, no. 3, pp. 325–330.

7. Blekhman I.I. Synchronization in nature and technology. [Blexman I.I. Sinxronizaciya v prirode i texnike]. Moscow: Publishing House «Sciences», 1981, 320 p.

8. Andronov A.A., Vitt A.A., Haykin S.E. Oscillation theory. [Andronov A.A., Vitt A.A., Xayjkin S.E. Teoriya kolebaniyj]. Moscow: Publishing House «Fizmatlit», 1959, 916 p.

Гладков Сергей Октябринович, д.ф.-м.н., профессор Московского авиационного института (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Россия
E-mail: Sglad51@mail.ru

Gladkov Sergey Oktyabrinovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
E-mail: Sglad51@mail.ru

Богданова Софья Борисовна, к.ф.-м.н., доцент Московского авиационного института (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Россия
E-mail: sonjaf@list.ru

Bogdanova Sofya Borisovna, Ph.D., Associate Professor of the Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
E-mail: sonjaf@list.ru