

# ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

Е. Н. Перевозников

*Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского*

Поступила в редакцию 12.07.2019 г.

**Аннотация.** На примере модели Лоренца рассматриваются спектральные методы анализа устойчивости систем с хаотическим поведением. Показана недостаточность традиционного подхода исследования динамики возмущений основанного на анализе корней классического спектрального уравнения. Предлагается для исследования нелинейных систем также использовать метод построения спектральных уравнений с различными собственными значениями, позволяющей учесть хаотичность и множественность состояний.

**Ключевые слова:** нелинейные системы, неустойчивости и хаос, спектральные методы анализа.

Spectral methods of stability analysis of systems with chaotic behavior are considered on the example of Lorentz model. The insufficiency of the traditional approach to the study of perturbation dynamics based on the analysis of the roots of the classical spectral equation is shown. A method of constructing spectral equations with different eigenvalues is proposed for the study of nonlinear systems, which allows to take into account the chaotic nature and multiplicity of States nonlinear systems, instability and chaos, spectral methods of analysis FEATURES OF SPECTRAL ANALYSIS OF SYSTEMS WITH CHAOTIC DYNAMICS E. N. Perevoznikov

## FEATURES OF SPECTRAL ANALYSIS OF SYSTEMS WITH CHAOTIC DYNAMICS

E. N. Perevoznikov

**Abstract.** Spectral methods of stability analysis of systems with chaotic behavior are considered on the example of Lorentz model. The insufficiency of the traditional approach to the study of perturbation dynamics based on the analysis of the roots of the classical spectral equation is shown. A method of constructing spectral equations with different eigenvalues is proposed for the study of nonlinear systems, which allows to take into account the chaotic nature and multiplicity of States.

**Keywords:** nonlinear systems, instability and chaos, spectral methods of analysis.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Значительное количество публикаций посвященных нелинейным динамическим системам со сложной хаотической динамикой и различным переходным процессам в них говорит о неослабевающем интересе к этим системам и методам описания их [1–8].

К проблемам описания нелинейных систем со сложной динамикой приводят задачи различных сфер математики, механики, физики, теории управления и других наук. Например: возникновение хаоса в детерминированной задаче трех тел; неустойчивость фазовых траекторий и как следствие возникновение сложных квазипериодических колебаний Ферми-Улама в задачах статистической физики; проблема перехода к турбулентности в гидродинамике;

возникновение хаотических колебаний в нелинейных задачах радиотехники и электроники и др.

У истоков описания сложной динамики стояли такие классики, как Пуанкаре, Ферми, Ляпунов, Колмогоров, Андронов. Много сделано в изучении и понимании процессов сложной динамики и возникновения хаоса в работах Синая, Шильникова, Гапонова-Грехова, Ланде, Лоренца, Кузнецова, Рабиновича, Анищенко и др. [1–8].

Одним из основных методов анализа сложной динамики и условий возникновения хаоса является расчет показателей Ляпунова [7, 8]. Определение Ляпуновских показателей является непростой задачей в основном реализуемой численными методами. В настоящей работе рассматриваются оценочные спектральные методы — классический и предлагаемая его модификация — метод различных собственных значений (РСЗ). Возможности методов сравниваются на классической модели с хаотической динамикой — модели Лоренца.

## 2. КЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть уравнения (1), описывающие исследуемую на устойчивость систему, представляют собой совокупность нелинейных автономных уравнений

$$d_t a_\alpha \equiv \frac{da_\alpha}{dt} = F_\alpha(\{a_\alpha\}). \quad (1)$$

Динамика возмущений системы (1) в этом случае описывается уравнениями

$$d_t \delta a_\alpha = \sum_{\beta} \frac{\delta F_\alpha}{\delta a_\beta} \cdot \delta a_\beta \equiv e_{\alpha\beta} \delta a_\beta, \quad \alpha, \beta = 1 \dots n, \quad (2)$$

где  $e_{\alpha\beta}(\{a_\alpha(t)\})$  — элементы эволюционной матрицы  $E\{e_{\alpha\beta}\}$ , зависящие от динамических переменных  $\{a_\alpha\}$  и времени  $t$ .

Если все временные производные в (1) отрицательны, то возмущения затухают и система устойчива по Ляпунову. Если существует хотя бы одна положительная производная, то фазовые траектории разбегаются, система неустойчива. Соотношение знаков временных производных позволяет также определить возможность хаотического поведения и образования в фазовом пространстве сложных локализованных конструкций — аттракторов [1, 8] (см. рис. 1).

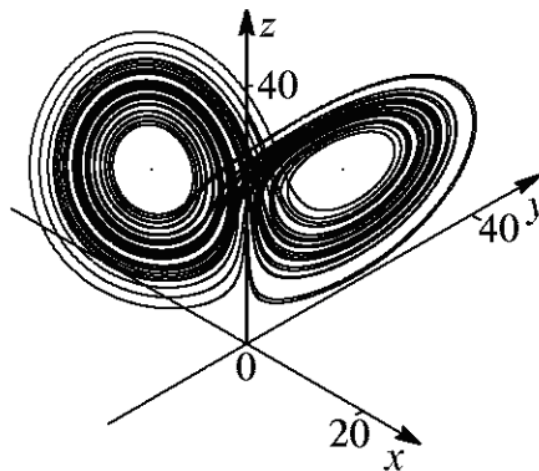


Рис. 1. Аттрактор Лоренца для “классических” значений параметров  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ .

А именно: если знаки собственных значений  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — временных производных (для трехмерных систем) равны

$$\begin{aligned} a) \quad & Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, -, -); \\ b) \quad & Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (0, -, -); \\ c) \quad & Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, 0, +), \end{aligned} \quad (3)$$

то динамический режим имеет характер соответственно

$a$  — устойчивой точки;

$b$  — предельного цикла;

$c$  — аттрактора (хаотической динамики).

То есть хаотическое поведение характеризуется наличием в спектре особой точки седло-фокуса и колебаний и выражается в нерегулярных неустойчивых колебаниях. Хаос подразделяется на диссипативный и активный. Диссипативный хаос связан с наличием притягивающих центров и уменьшением фазового объема системы (напр. хаос в модели Лоренца), при активном хаосе фазовые траектории разбегаются и фазовый объем увеличивается (см. модель Ресслера [8]).

Условием диссипативности — активности хаоса является дивергенция вектора скоростей системы  $\vec{B}(\partial_t x, \partial_t y, \partial_t z)$  одновременно являющаяся одним из условий устойчивости

$$\operatorname{div} B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (4)$$

Если  $\operatorname{div} B < 0$  фазовый объем уменьшается, траектории сближаются — хаос диссипативный. Если  $\operatorname{div} B > 0$ , то фазовый объем увеличивается, траектории разбегаются — система активна. Условие (4) сводится к условию

$$\operatorname{div} B \rightarrow \sum \lambda_i,$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения. Для модели Лоренца условие (4) принимает вид (см. [9])

$$\operatorname{div} B = -(\sigma + b + 1) < 0.$$

Согласно классическому спектральному методу знаки временных производных в системе (2) соответствуют знакам корней спектрального уравнения — (СУ), которое представляет собой условие разрешимости системы (2) и имеет вид полинома относительно спектрального параметра  $\lambda$

$$D = \det[\delta_{\alpha,\beta}\lambda - E_{\alpha,\beta}] = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \lambda^{n-i} = 0. \quad (5)$$

Поэтому классический спектральный анализ сводится к анализу корней спектрального уравнения. А работах [9, 10] сформулированы критерии нейтральности, которые позволяют не решая спектральные уравнения по коэффициентам динамических или спектральных уравнений получать условия возникновения неустойчивости и хаоса линейных систем (нейтральность — промежуточное состояние между устойчивыми и неустойчивыми состояниями, условие нейтральности —  $\lambda = 0$ ).

Уравнения для собственных векторов эволюционной матрицы  $\{\chi_i(\lambda_k)\}$  и решений системы (2), в этом случае, соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} (\delta_{im}\lambda_k - e_{im}) \cdot \chi_{im}(\lambda_k) &= 0, \\ a_i &= C_m \cdot \chi_{im}(\lambda_k) \cdot \exp(\lambda_k t). \end{aligned} \quad (6)$$

Этот подход хорошо применим для линейных систем (их можно свести к одному уравнению высшего порядка с одним значением спектрального параметра). Однако, применение классического спектрального метода к нелинейным системам, особенно к системам с хаотической динамикой вызывает ряд вопросов:

а)  $n$ -мерные системы с хаотической динамикой характеризуются  $n$  числом вещественных параметров — показателей Ляпунова, тогда как спектральный метод дает меньшее количество (например, для трехсистем с хаосом — три показателя Ляпунова а по спектральному методу — один вещественный корень и два комплексно сопряженных, т. е. два вещественных параметра);

б) из (5) следует, что все компоненты собственного вектора одинаково зависят от времени, тогда как в действительности поведение компонент различно (см. [3]). В традиционном анализе это частично снимается линейной комбинацией собственных векторов (6);

в) классический подход указывает лишь границу устойчивости-неустойчивости (в том числе перехода к хаосу), а действительности имеется чередование областей регулярной и хаотической динамик, т. е. несколько различных динамических режимов.

Выше отмеченное указывает на недостаточность в традиционном варианте спектрального метода для описания систем с хаотической динамикой и необходимости его модернизации.

Заметим, что метод  $L$ -критерия [9] описывает динамику  $n$ -мерных систем  $n$ -вещественными параметрами.

Сформулируем для описания систем с хаотической динамикой метод различных собственных значений — РСЗ.

### 3. МЕТОД РСЗ

Предварительно отметим следующее: известно, что системы третьего порядка отражают основные особенности динамики нелинейных систем, поэтому далее будем говорить только о них.

Предположим, что в уравнении для возмущений (2) временные производные характеризуются различными спектральными параметрами  $\lambda$ , тогда спектральное уравнение для трех системы принимает вид

$$\det [\delta_{ik}\lambda_i - e_{ik}] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_3e_{22} + \lambda_1\lambda_2e_{33} + \lambda_3\lambda_2e_{11}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i + D = 0, \quad (7.a)$$

$$A_1 = e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}, \quad A_2 = e_{11}e_{33} - e_{13}e_{31}, \quad A_3 = e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21},$$

$$D = e_{11}(e_{23}e_{32} - e_{22}e_{33}) + e_{33}e_{12}e_{21} + e_{22}e_{13}e_{31} - e_{12}e_{23}e_{31} - e_{13}e_{32}e_{21}.$$

Отметим что, спектральное уравнение в этом случае не имеет вид полинома, а представляет собой алгебраическую функцию трех взаимозависимых спектральных параметров —  $\lambda_i$ .

Полагая, например,  $\lambda_1 = Re \lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\omega$  (хаос это неустойчивость с седлообразным фокусом и нерегулярные колебания) из СУ (6) после выделения вещественной и мнимой частей уравнения получаем:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \omega^2) \cdot (\lambda - e_{11}) - \lambda\alpha(e_{22} + e_{33}) + A_1\lambda + \alpha(A_2 + A_3) + D &= 0, \\ \omega[\lambda(e_{22} - e_{33}) + (A_2 - A_3)] &= 0. \end{aligned} \quad (7.b)$$

Из (7.b) для  $\lambda_1, \alpha$  имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{A_3 - A_2}{e_{22} - e_{33}}, \quad \alpha_{2,3} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4NG}}{2N}, \\ N &= \lambda_1 - e_1, \quad M = -\lambda_1(e_{22} + e_{33}) + A_2 + A_3, \quad G = \omega^2(\lambda_1 - e_{11}) + \lambda_1 A_1 + D. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (8) дают нам три вещественных параметра, два из которых зависят от частоты —  $\omega$  и ограничение для  $\omega$  — ( $M^2 - 4NG \geq 0$ ). Также можно получить аналогичные (7), (8) уравнения для случаев  $\lambda_2 = Re \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_3 = Re \lambda_3 = \lambda$ . Это дает дополнительно два динамических режима. Зависимость спектральных параметров от частоты и дополнительные динамические режимы образуют области неустойчивости и хаоса.

Продemonстрируем на модельной системе Лоренца эти методы (классический спектральный и РСЗ).

#### 4. МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

Задача Лоренца интересна тем, что к нелинейным уравнениям модели Лоренца сводятся уравнения динамики ряда реальных физических систем: конвекция в слое жидкости подогреваемого снизу, одномодовый лазер, водяное колесо и др. Кроме того, она явно демонстрирует возникновение хаотической динамики. Уравнения модели Лоренца имеют вид [1, 8]

$$\begin{aligned} \partial_t x &= \sigma(y - x), \\ \partial_t y &= rx - y - xz, \\ \partial_t z &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x, y, z$  — динамические величины,  $\sigma, r, b$  — параметры, причем управляющим, играющим смысл интенсивности, является параметр  $r > 0$ .

Система (9) имеет три стационарных решения — стационарных состояния  $(x_s, y_s, z_s)_1, (x_s, y_s, z_s)_2$ , нулевое и два симметричных (см. рис. 1 стационарные точки)

$$\begin{aligned} \partial_t x = 0 & \quad x_s = 0 & \quad x_s = y_s \\ \partial_t y = 0 & \Rightarrow 1) \quad y_s = 0; \quad 2,3) \quad x_s = \pm \sqrt{bz_s} = \pm \sqrt{b(r-1)} \\ \partial_t z = 0 & \quad z_s = 0 & \quad z_s = r - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Линеаризация системы (9) относительно решения  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , в качестве которого может быть выбрано любое, в том числе и стационарное, дает систему уравнений для возмущений (2), где эволюционная матрица равна

$$\widehat{E} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -\tilde{z}_+ & -1 & -\tilde{x} \\ \tilde{y} & \tilde{x} & -b \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Спектральное уравнение и его коэффициенты в стационарном случае равны ( $\tilde{z}_+ \equiv \tilde{z} - r$ )

$$\det [\delta_{\alpha,\beta} \lambda - E_{\alpha,\beta}] = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0;$$

$$a_1 = (1 + b + \sigma), \quad a_2 = b + (1 + b + z_+) \cdot \sigma + x_s^2, \quad a_3 = \sigma [x_s^2 + x_s y_s + b(1 + z_+)]. \quad (12)$$

Метод НРИ [2] для СУ (12) дает два критических — нейтральных режима

$$1) \quad \omega = 0, \quad a_3 = 0, \quad (13)$$

$$2) \quad \omega^2 = a_2, \quad a_1 a_2 = a_3. \quad (14)$$

Режим (13) реализуется для первого стационарного состояния (нулевая точка) и соответствует его неустойчивости при  $r \geq 1$ , собственные значения (спектральные параметры) в этом случае равны

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 + b(r-1)}. \quad (15)$$

Режим (14) реализуется для второго и третьего стационарных состояний и при классических значениях параметров Лоренца критические значения частоты и параметра  $r$  равны

$$\omega_{cr} = \sqrt{b(r+\sigma)} = 9.62, \quad r_{cr} = \frac{\sigma(3+b+\sigma)}{\sigma-1-b} = 24.7. \quad (16)$$

При  $r > r_{cr}$  второе и третье стационарные состояния (стационарные точки на рис. 1) становится неустойчивым, при этом ( $r = r_{cr}$   $\lambda_1 = -13,7$ ,  $\lambda_{2,3} = +0 \pm 9.62i$ ) вещественная часть второго и третьего собственных значений становится положительной, т. е. появляются слабораствующие хаотические колебания. Например, при

$$r = 24.8 \Rightarrow \lambda_1 = -13.62, \quad \lambda_{2,3} = 1.902 \cdot 10^{-3} \pm 9.636i.$$

$L$ -критерий [9] для состояний (10) соответственно дает выражения

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \cdot \det(\widehat{L}) &= (-1)^{n+1} \cdot \det \left[ \delta_{\alpha,\beta} \widehat{E} + \widehat{T} e_{\alpha,\beta}^* \right] = \prod_{\alpha,\beta=1^n} (\tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{\lambda}_\beta^*) \xrightarrow[\text{< } y_0]{\text{> } \text{HY0}} \rightarrow \\ &\rightarrow (-1)^4 2^3 \sigma (\sigma + 1)^2 b(r - 1) \left( \frac{428}{9} - 10r \right)^2 \xrightarrow[\text{< } y_0]{\text{> } \text{HY0}}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\det L = (-1)^4 5 \left( \frac{2}{3} \right)^4 (-2166 \cdot b^3) (r - 1) (r - 24.7) (r - 67.9) \xrightarrow[\text{< } 0]{\text{> } 0}. \quad (18)$$

Как и следовало ожидать, критерий (17) показывает неустойчивость первого стационарного состояния (10) при  $r > 1$ . Из (18) следует, что неустойчивость второго и третьего стационарных состояний наступает при  $r > 24.7$  и что согласуется с критерием ПРИ и спектром. В критерии (18) есть три множителя меняющие знак, что соответствует знакам трех временных производных в исходных уравнениях системы (9). При  $r = 24.7$  первый множитель положительный, второй равен нулю, третий — отрицательный. Таким образом комбинация знаков производных соответствует условию возникновения хаотической динамики в системе см. (3). По критерию (18) хаотические колебания существуют до значения  $r = 67.9$  после чего в системе устанавливается режим нарастающих нерегулярных колебаний.

Отметим, что классический спектральный анализ этого порогового значения  $r$  не дает.

Коэффициенты спектрального уравнения по методу РСЗ (6) для эволюционной матрицы (11) равны ( $x_s^2 = \frac{8}{3} \cdot (r - 1)$  см. [10])

$$A_1 = \frac{8}{3} + x_s^2, \quad A_2 = \frac{80}{3}, \quad A_3 = 0, \quad D = 20 \cdot x_s^2. \quad (19)$$

По методу РСЗ в данной системе существует три динамических режима (8):

$$1. \lambda_1 = -16, \quad \alpha_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 1.5G}}{-3}, \quad G = 4x_s^2 - 43 - 6\omega^2, \quad \omega_{cr} \leq \frac{4}{3} \sqrt{r - 5}. \quad (20)$$

Из условия нейтральности ( $\alpha_2 = 0 \rightarrow G = 0$ ) следует выражение для критической частоты  $-\omega_{cr}$ , а интервал частот в этом режиме вытекает из вещественности  $\alpha$  и равен  $\omega \in (0; 8)$ . Условие диссипативности  $\sum \lambda_i < 0$

$$\lambda_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -16 - 2 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{40}{3}$$

в этом режиме выполняется автоматически. Из условия вещественности  $\alpha_{2,3}$  следует верхняя граница частоты

$$4 + 1.5G \geq 0 \rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{(21 + 4x_s^2)/6} = \sqrt{\frac{31}{18}} \sqrt{1 + \frac{32}{31}r}.$$

Из (20) следует, что при  $r > 5$  в системе возникают и усиливаются колебания с частотами  $\omega \in (0; \omega_{\max})$ , а комбинация знаков собственных значений (см. 3) соответствует хаотическим

колебаниям. Интервалы возможных частот и параметра  $r$  (в которые входят и граничные параметры по классическому анализу) говорят о некотором множестве состояний с хаотическими колебаниями.

Второй динамический режим ( $\lambda_2 = Re \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_{1,3} = \alpha \pm i\omega$ ). Из формул (7а,б), с учетом (19), следует

$$\lambda_2 = \frac{3x_s^2+8}{22}, \quad \alpha_{1,3} = \frac{-M+\sqrt{M^2-4NG}}{2N}, \quad N = \frac{3(10+x_s^2)}{22},$$

$$M = \frac{30(x_s^2+8/3)}{11}, \quad G = \frac{1}{22} [520x_s^2 + 640 + 3\omega^2 (x_s^2 + 10)]. \quad (21)$$

Из (21) следует, что в системе при  $r \in (1 ; 53)$  существуют неустойчивые колебания зависящие от частоты, которая также лежит в ограниченном интервале, это соответствует неустойчивости при  $r > 1$  в классическом анализе. Комбинация знаков собственных значений (+, -, -)<sub>-</sub> говорит об отсутствии хаоса в этом режиме.

Третий динамический режим ( $\lambda_3 = Re \lambda_3 = \lambda$ ,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ ). Из формул (7а,б), с учетом (19), имеем

$$\lambda_3 = \frac{x_s^2-24}{9}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{-M+\sqrt{M^2-4NG}}{2N}, \quad N = \frac{1}{9}x_s^2,$$

$$G = \frac{1}{9}(20 + \omega^2)x_s^2, \quad M = \frac{20}{9}x_s^2. \quad (22)$$

Из (22) видно, что этот режим реализуется в диапазоне  $r \in (1 ; 77)$  Неустойчивость возникает при  $x_s^2 > 24 \rightarrow r > 9$  виде усиливающихся колебаний в диапазоне частот  $\omega \in (0 ; \sqrt{80})$ , причем низкочастотные колебания усиливаются быстрее. Как и во втором режиме комбинация знаков собственных значений (+, -, -)<sub>-</sub> говорит об отсутствии хаотических колебаний.

Таким образом, из выше рассмотренного следует, что

- а) Предлагаемый метод РСЗ дает более сложную картину динамики в модели Лоренца чем классический.
- б) Хаос существует в первом динамическом режиме при меньших пороговых значениях  $r$ , чем по классической линейной теории.
- в) Наличие интервалов возможных частот и параметров и множественность динамических режимов указывает на существование областей неустойчивости и хаоса, что есть в действительности.
- г) В целом предлагаемый метод изучения динамики нелинейных систем можно рассматривать как дополнительный к методам основанным на расчетах показателей Ляпунова и классическому спектральному. А настоящую работу как дискуссионную.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шильников, Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца / Л. П. Шильников. — М. : Мир, 1980. — 386 с.
2. Андронов, В. А. Теория колебаний / В. А. Андронов, В. А. Витт, С. Б. Хайкин. — М. : Наука, 1981.
3. Гапонов-Грехов, А. В. Нелинейная физика, стохастичность и структура, сб. физика XX века / А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович. — М. : Наука, 1984.
4. Неймарк, Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. — М. : Наука, 1987, 424 с.
5. Мун, Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. — М. : Мир, 1990, 312 с.
6. Анищенко, В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. — М. : Наука, 1990. — 312 с.
7. Анищенко, В. С. Аттракторы динамических систем / В. С. Анищенко // Изв. Вузов, прикладная нелинейная динамика. — 1997. — Т. 5, № 1. — С. 109–127.
8. Кузнецов, С. П. Динамический хаос, ФМ / С. П. Кузнецов. — М. : Физматгиз, 2006. — 355 с.

9. Перевозников, Е. Н. Методы анализа устойчивости динамики неравновесных систем / Е. Н. Перевозников // Изв. Вузов, Физика. — 2006. — № 10. — С. 34–39.
10. Perevoznikov, E. Neutrality Criteria for Stability Analysis of Dynamical Systems through Lorentz and Rossler Model Problems / E. Perevoznikov, O. Mikhailova // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2015. — № 3. — P. 8.

## REFERENCES

1. Shilnikov L.P. Bifurcation theory and Lorentz model. [Shil'nikov L.P. Teoriya bifurkaciy i model' Lorenca]. Moscow: Mir, 1980, 386 p.
2. Andronov V.A., Vitt V.A., Khaikin S.B. Oscillation theory. [Andronov V.A., Vitt V.A., Хайкин S.B. Teoriya kolebaniy]. Moscow, 1981.
3. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Nonlinear physics, stochasticity and structure, collection of articles physics of the twentieth century. [Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Nelineynaya fizika, stoxastichnost' i struktura, sb. fizika XX veka]. Moscow, 1984.
4. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations . [Neyjmark Yu.I., Landa P.S. Stoxasticheskie i xaoticheskie kolebaniya]. Moscow, 1987, 424 p.
5. Moon F. Chaotic Oscillations . [Mun F. Хаотические колебания]. Moscow, 1990, 312 p.
6. Anisichenko V.S. Complex vibrations in simple systems . [Anishhenko V.S. Slozhnye kolebaniya v prostyx sistemax]. Moscow, 1990, 312 p.
7. Anisichenko V.S. Attractors of dynamical systems. [Anishhenko V.S. Attraktory dinamicheskix sistem]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedeniyj. Prikladnaya nelineynaya dinamika — Proceedings of higher educational institutions. Applied nonlinear dynamics*, 1997, vol. 5, no. 1, pp. 109–127.
8. Kuznetsov S.P. Dynamic chaos, FM. [Kuznecov S.P. Dinamicheskijj хаос, FM]. Moscow, 2006, 355 p.
9. Perevoznikov E.N. Techniques for analysis of stability of non-equilibrium system dynamics. [Perevoznikov E.N. Metody analiza ustojchivosti dinamiki neravnesnyx sistem]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedeniyj. Fizika — Proceedings of higher educational institutions. Physics*, 2006, № 10, pp. 34–39.
10. Perevoznikov E., Mikhailova O. Neutrality Criteria for Stability Analysis of Dynamical Systems through Lorentz and Rossler Model Problems. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2015, №3, 8 p.

*Перевозников Е. Н., канд. физ.-мат. наук, доцент, Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия*

*E-mail: eperevoznikov@yandex.ru*

*Perevoznikov E. N., kand. ph.-math. sciences, associate Professor, Military space Academy A. F. Mozhaisky, Saint-Petersburg, Russia*

*E-mail: eperevoznikov@yandex.ru*