УДК 517.956

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В. В. Панков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.05.2020 г.

Аннотация. В работе получены коэрцитивные априорные оценки решений краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Уравнение содержит весовые операторы, представляющие собой суперпозицию оператора умножения на функцию, которая обращается в нуль на границе, и оператора дифференцирования. На границе рассматриваются условия типа условий Дирихле. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева, весовые производные.

ON A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A DEGENERATE HIGH-ORDER ELLIPTIC EQUATION

V. V. Pankov

Abstract. In this paper, we obtain coercive a priori estimates of solutions to the boundary value problem of the Dirichlet type in the band for a degenerate high-order elliptic equation. The equation contains weight operators, which are a superposition of the multiplication operator on the function, which vanishes at the boundary, and the differentiation operator. On the boundary conditions of the Dirichlet condition type are considered. Estimates are obtained in special weight spaces such as Sobolev spaces.

Keywords: a priori estimate, the degenerate elliptical equation, S. L. Sobolev's weight spaces, weight derivatives.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений используются при моделировании вырождающихся процессов, то есть процессов, в которых процессы, происходящие вблизи границ, существенно отличаются от процессов, происходящих внутри области. Краевые задачи для таких уравнений относятся к “неклассическим” задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1], [2]. В работе В. П. Глушко [3] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [4]–[6] были сформулированы априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [7]–[8] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение нечетного порядка по одной из переменных. Работа является естественным продолжением исследований, начатых в работах [7]–[8], и уточнением исследований в работах [9]–[12] (сформулированы и доказаны леммы 2.5, 2.6, необходимые для доказательства леммы 2.7 и теоремы 2).

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть в полосе

$$\mathbb{R}_d^n = \{x \in \mathbb{R}^{n-1},\, 0 < t < d\}$$

задана следующая краевая задача:

$$A\left(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t\right) v\left(x,t\right) = F\left(x,t\right), \tag{1.1}$$

где

$$A\left(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t\right) v = L_{2m}\left(D_x,D_{\alpha,t}\right) v + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} v,$$

$$L_{2m}(D_x,D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}, \quad a_{\tau j} \in \mathbb{C}, Im\, \bar{b} a_{0,2m} = 0,$$

$$D_x^{\tau} = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} ... \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}},$$

$D_{\alpha,t}u(t)$ — так называемая весовая производная функции $u(t)$:

$$D_{\alpha,t}u(t) = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t(\sqrt{\alpha(t)}u(t)), \;\; \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$D_{\alpha,t}^{j}u(t) = D_{\alpha,t}(D_{\alpha,t}^{j-1}u(t)), j = 1,2,...,$$

$\alpha(t)$ — специальная весовая функция, которая будет определена далее, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

На границе $t = 0$ полосы $\mathbb{R}_d^n$ задаются условия:

$$B_j(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^{\tau} \partial_t^{j}\; v|_{t=0} = G_j(x),\; j = 1,...,k-1, \tag{1.2}$$

$$b_{\tau j} \in \mathbb{C}, G(x) = (G_0(x),G_1(x),...,G_{k-1}(x)).$$

На границе $t = d$ полосы $\mathbb{R}_d^n$ заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\; v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\; v|_{t=d} = 0. \tag{1.3}$$

Априорные оценки решения задачи (1.1)–(1.3) будут установлены в специальных пространствах с весом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}_d^n), s \geqslant 0, s \in \mathbb{Z}$ состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(\mathbb{R}_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{l=0}^{[\frac{(2k-1)s}{2m}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha} [(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{2k-1}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{(2k-1)s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$. Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}_d^n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ пространство С. Л. Соболева.

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство

$$Re(\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta)) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого числа $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3.

$$\sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0, j = 1,2,...,k-1 \text{ при всех } \xi \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant \max\left\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\right\}$ — целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число, и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \|B_j\, v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}} \right), \tag{1.4}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v. Здесь $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева–Слободецкого $H_s(\mathbb{R}^{n-1})$.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства теоремы 1 преобразуем задачу (1.1)–(1.3), применив преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ к уравнению, начальным и краевым условиям.

Обозначим

$$u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v], f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F], g(\xi) = F_{x\to\xi}[G],$$

$$L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j}\xi^\tau D^j_{\alpha,t}, B'_j(\xi) = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \partial_t^j,$$

тогда после применения преобразования Фурье задача исходная задача (1.1)–(1.3) приобретает вид

$$L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u(\xi,t) = f(\xi,t), \tag{2.1}$$

$$B_j'(\xi)\ u(\xi,t)|_{t=0} = g_j(\xi), j = 1,...,k-1, \tag{2.2}$$

$$u|_{t=d} = \partial_t\ u|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\ u|_{t=d} = 0 \tag{2.3}$$

Дополнительно введем еще одно пространство.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ ($s \geqslant 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{2k-1}j \leqslant s} \left\| F_\alpha^{-1} \left[\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha \left[\partial_t^j u \right] \right] \right\|^2_{L_2(0;d)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1 доказывается с помощью теоремы 2.

Теорема 2. Пусть $s \geqslant \max\left\{2m, \max\limits_{1\leqslant j \leqslant k-1}\left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}\right) + \frac{m}{2k-1}\right\}$ — целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число. Пусть $f(\xi,t) \in \widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ и выполнены условия 1 — 3. Тогда для любого решения $u(\xi,t)$ задачи (2.1) — (2.3), принадлежащего при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, справедлива априорная оценка

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}} |g_j(\xi)|^2 \right) \tag{2.4}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}, u, f, g$.

Для доказательства теоремы 2 потребуются несколько вспомогательных понятий и утверждений, в частности, интегральное преобразование F_α, свойства весовых производных и несколько лемм.

Интегральное преобразование F_α на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ может быть записано в виде:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование (его можно называть весовым преобразованием Фурье) было введено в работе [4]. В этом преобразовании $\eta \in \mathbb{R}, \alpha(t)$ — некоторая функция со свойствами: $t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ при $t \geqslant d$, $d > 0$.

Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье следующим образом:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau),$$

где

$$u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\ u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \tau = \varphi(t) = -\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Соответственно, для F_α можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде:

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье.

Для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля:

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\,.$$

Это дает возможность расширить F_α до непрерывного преобразования из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α не только на функциях из $L_2(\mathbb{R}_+)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Преобразование F_α и весовые производные обладают несколькими полезными свойствами.

Свойство 1. Для любых $u(t) \in L_2(0,d)$, $w(t) \in L_2(0,d)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha[u](\eta)\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta = 2\pi(u,w),$$

здесь (u,w) — скалярное произведение в $L_2(0,d)$.

Свойство 2. Если $u(t) \in C^s[0,d]$ и имеют место равенства

$$u(d) = \partial_t u(d) = ... = \partial_t^{s-1}u(d) = 0, \tag{2.5}$$

то выполняются:

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), j = 0,...,s.$$

Свойство 3. Если $u(t) \in C^s[0,d], w(t) \in C^s[0,d]$ и для них выполняются (2.5), то справедливо равенство:

$$(D^j_{\alpha,t}u(t),w(t)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta^j F_\alpha[u](\eta)\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta = \frac{1}{2\pi}(\eta^j F_\alpha[u](\eta),F_\alpha[w](\eta)).$$

Отметим, что $C^\infty(0,d)$ плотно в $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}$.

Для весовых производных известны аналоги неравенства Эрлинга-Ниренберга. Сформулируем их в виде леммы и следствия из нее.

Лемма 2.1. Пусть $u(t) \in C^\infty(0,d)$, тогда для любого $\varepsilon > 0, j = 0,...,s-1$ справедливо неравенство

$$\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon^{2(s-j)}\left\|D^s_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left(c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}\right)\|u\|^2, \tag{2.6}$$

где c — положительная константа.

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве $L_2\,(0;d)$.

Следствие 2.1. Пусть $u\,(t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\,(0;d)$. Тогда $\forall\varepsilon > 0, j = 0,1,...,2m-1$, $\xi \in R^{n-1}$ справедливо неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon^{2(2m-j)}\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + c\,(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \tag{2.7}$$

$c\,(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(2m-j)})$ не зависит от u,ξ.

В общем случае неравенство имеет вид:

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon^{2(s-j)}\left\|D^s_{\alpha,t}u\right\|^2 + c\,(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{s}\|u\|^2, j = 0,1,...,s-1,$$

$$c\,(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}).$$

Следующие леммы напрямую используются в доказательстве теоремы 2. Доказательства каждой из этих лемм громоздки, поэтому доказательство будет приведено только для теорем 1 и 2.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия 1 и 2, $m \geqslant 2k-1, k \geqslant 2$, тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2 \leqslant c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\left(t\right)\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\left(\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^{j}u\left(0\right)}-\frac{1}{2}\left|\partial_t^{k-1}u\left(0\right)\right|^2\right)\right) \quad (2.8)$$

с константой $c>0$, не зависящей от ξ, u.

Лемма 2.3. При выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2\right)+c\left(\varepsilon\right)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right) \quad (2.9)$$

при любом $\varepsilon>0$.

Лемма 2.4. При выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 \leqslant c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right). \quad (2.10)$$

Лемма 2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.2 и $2m$ кратно $2k-1$, тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, являющейся решением задачи (2.1)–(2.3), имеет место оценка:

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m-qj}\partial_t^{j}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-ql}\partial_t^{l}u\right\|^2+c\left(\varepsilon\right)\left(\|f\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right), \quad (2.11)$$

где $q=\frac{2m}{2k-1}, j \in \mathrm{N}$ такое, что $2m-qj>0$, $\varepsilon>0$ — любое число.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (2.1) скалярно на функцию $(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u$, получим

$$\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u+b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),$$

$$(-1)^j\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)+\left(b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=$$
$$=\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),$$

$$(-1)^j\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)+(-1)^{k+j}|b|^2\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=$$
$$=\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),$$

$$(-1)^j Re\left(L'_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})u,bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)+$$
$$+(-1)^{k+j}|b|^2 Re\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)=Re\left(f,(-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right). \quad (2.12)$$

С помощью неравенств Эрлинга-Ниренберга, Коши-Буняковского, теоремы “о следах”, а также интегрирования по частям и коммутаторов операторов дифференцирования и весового дифференцирования, получим оценки для каждого из слагаемых в левой и правой частях (2.12):

$$(-1)^{k+j}|b|^2 Re\left(\partial_t^{2k-1}u, D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right) = -|b|^2 ReA_{k+j-1} + (-1)^{k+j}|b|^2 Re\widetilde{B} =$$
$$= (-1)^{k+j}|b|^2 Re\widetilde{B} - \frac{|b|^2}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m-qj}\partial_t^{k+j-1}u(d)\right|^2, \quad (2.13)$$

$$ReA_{k+j-1} = \frac{1}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m-qj}\partial_t^{k+j-1}u(d)\right|^2, \quad (2.14)$$

$$\left|\widetilde{B}\right| = \left|\sum_{l=2}^{k+j-1}(-1)^l B_l\right| \leqslant \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-ql}\partial_t^l u\right\|^2 + c(\varepsilon)\|u\|^2, \quad (2.15)$$

$$(-1)^j Re\left(L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})u, bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right) = (-1)^j Rea_{0,2m}\overline{b}\left((-1)^j C_{j+1} + \sum_{l=2}^{j}(-1)^l\widehat{B_l}\right) + N_0 =$$
$$= (-1)^{2j}Rea_{0,2m}\overline{b}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-qj}\partial_t^j u\right\|^2 + Rea_{0,2m}\overline{b}\sum_{l=2}^{j}(-1)^{l+j}\widehat{B_l} + N_0, \quad (2.16)$$

$$N_0 \leqslant \varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \quad (2.17)$$

$$\left|Rea_{0,2m}\overline{b}\sum_{l=2}^{j}(-1)^{l+j}\widehat{B_l}\right| \leqslant \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-ql}\partial_t^l u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2, \quad (2.18)$$

$$Re\left(f, (-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right) \leqslant \left|\left(f, (-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right)\right| \leqslant \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\|u\|^2. \quad (2.19)$$

Применим оценки:

$$Rea_{0,2m}\overline{b}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-qj}\partial_t^j u\right\|^2 + Rea_{0,2m}\overline{b}\sum_{l=2}^{j}(-1)^{l+j}\widehat{B_l} + N_0 + (-1)^{k+j}|b|^2 Re\widetilde{B} +$$
$$+\tfrac{|b|^2}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m-qj}\partial_t^{k+j-1}u(d)\right|^2 = Re\left(f, (-1)^j bD_{\alpha,t}^{2m-2qj}\partial_t^{2j}u\right),$$

$$Rea_{0,2m}\overline{b}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-qj}\partial_t^j u\right\|^2 + \tfrac{|b|^2}{2}\left|D_{\alpha,t}^{m-qj}\partial_t^{k+j-1}u(d)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-ql}\partial_t^l u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(\|f\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right).$$

Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. Пусть выполнены условия леммы 2.2 и $q = \frac{2m}{2k-1} > 1$, $q \notin \mathbb{Z}$, тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,q}(0;d)$, являющейся решением задачи (2.1)–(2.3), имеет место оценка:

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{q_2 j}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-q_1 j}\partial_t^j u\right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\sum_{l=0}^{2k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{q_2 j}\left\|D_{\alpha,t}^{2m-q_1 l}\partial_t^l u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(\|f\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right), \quad (2.20)$$

$j = 1,2,\ldots : 2m - qj > 0$, $\varepsilon > 0$ — любое число, q_1 — целая часть q, q_2 — дробная часть q.

Доказательство леммы 2.6 очень похоже на доказательство леммы 2.5 и заключается в поэтапной оценке слагаемых выражения, полученного путем применения скалярного произведения (2.1) на $(-1)^j b\left(1+|\xi|^2\right)^{2q_2} D_{\alpha,t}^{2m-2q_1 j}\partial_t^{2j}u$.

Лемма 2.7. При выполнении условий леммы 2.2 справедлива оценка

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} Re\partial_t^{2k-2-j} u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right) \qquad (2.21)$$

Доказательство теоремы 2. В доказательстве потребуется
Утверждение 1. При $x,y \in \mathbb{R}, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ и произвольном $\varepsilon > 0$ верно неравенство:

$$xy \leqslant \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\left(\sqrt{\varepsilon}x - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y\right)^2 \geqslant 0, \quad \varepsilon x^2 - 2xy + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geqslant 0, \quad \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geqslant 2xy \geqslant xy.$$

Утверждение 1 доказано.

Оценим $\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum\limits_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} Re\partial_t^{2k-2-j} u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right|$. Применим утверждение 1 для оценки, получим:

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} Re\partial_t^{2k-2-j} u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left|\partial_t^{2k-2-j} u\,(0)\right| \left|\partial_t^j u\,(0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left(\varepsilon \left|\partial_t^{2k-2-j} u\,(\xi,0)\right|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1+|\xi|^2\right)^{-m+qj+\frac{1}{2}q}$, где $q = \frac{2m}{2k-1}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} Re\partial_t^{2k-2-j} u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-2} \left(\varepsilon_1 \left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}} \left|\partial_t^{2k-2-j} u\,(\xi,0)\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}} \left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right), \quad (2.22)$$

где ε_1 — любое число.

Рассмотрим $\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)$. Будем производить интегрирование по частям, пользуясь краевыми условиями (2.3):

$$\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right) = \int_0^d \partial_t^{2k-1-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}dt = |\text{интегрируем по частям}| =$$
$$= \overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}\Big|_0^d - \int_0^d \partial_t^{2k-2-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-1-j}u(t)}dt = \left|\partial_t^{2k-2-j}u(t)\right|^2\Big|_0^d -}$$
$$-\int_0^d \partial_t^{2k-1-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}dt = -\left|\partial_t^{2k-2-j}u(0)\right|^2 - \int_0^d \partial_t^{2k-1-j}u(t)\overline{\partial_t^{2k-2-j}u(t)}dt =$$
$$= -\left|\partial_t^{2k-2-j}u(0)\right|^2 - \overline{\left(\partial_t^{2k-1-j}u, \partial_t^{2k-2-j}u\right)}.$$

Отсюда:

$$\left|\partial_t^{2k-2-j}u(0)\right|^2 = -2Re\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\partial_t^{2k-2-j}u\right) = 2\left|Re\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\partial_t^{2k-2-j}u\right)\right|. \qquad (2.23)$$

Подставим (2.23) в (2.22):

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left|Re\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\partial_t^{2k-2-j}u\right)\right| + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left|\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\partial_t^{2k-2-j}u\right)\right| + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2\right).$$

Применяем для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства утверждение 1 и неравенство Коши-Буняковского, получим оценку:

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left(\varepsilon_2\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2\right).$$

Выберем в этом неравенстве $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{q}{2}}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\left(\begin{array}{c} 2\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj}\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2 \end{array}\right). \qquad (2.24)$$

Применим (2.24) и неравенство Эрлинга-Ниренберга в правой части неравенства (2.21), получим:

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\|Au\|^2 + \varepsilon_2\left(\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right) +\right.$$
$$\left. + c(\varepsilon_2)\sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2\right).$$

Выбирая достаточно малое $\varepsilon_2 > 0$, получим:

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c_1\left(\|Au\|^2 + \sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2\right). \qquad (2.25)$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$\left|u\left(\xi,0\right)\right| = \left|\frac{\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \partial_t^{j-1}\left. u\right|_{t=0}}{\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau}\right| \leqslant c\left(1+|\xi|\right)^{-m_j}\left|B_j\left(\xi\right)\left. u\right|_{t=0}\right| \leqslant c\left|g_j(\xi)\right|.$$

Применяя это неравенство в (2.25), получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\left(\|f\|^2+\sum_{j=1}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}|g_j(\xi)|^2\right).$$

Таким образом, доказана оценка (2.4) при $s = 2m$. Справедливость оценки (2.4) при $s > 2m$ доказывается методами, аналогичными методам работы [4]. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть решение $v(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) принадлежит пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}^n_d)$. Тогда функция $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при почти всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ и является решением задачи (2.1)–(2.3). Следовательно, в силу теоремы 2 для функции $u(\xi,t)$ справедлива оценка (2.4). Интегрируя эту оценку по $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, получим неравенство

$$\int\limits_{R^{n-1}}\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}\,d\xi \leqslant c\int\limits_{R^{n-1}}\left(\left(\begin{array}{c}\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}+\\ +\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}|g_j(\xi)|^2\end{array}\right)\right)d\xi, \tag{2.26}$$

где $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Из неравенства (2.26) с помощью равенства Парсеваля получим справедливость априорной оценки (1.4) в теореме 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

2. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

3. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

4. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

5. Баев, А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун–т, 2008. — 240 с.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

8. Бунеев, С. С. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

9. Баев, А. Д. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, В. В. Панков, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 161–171.

10. Панков, В. В. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения / В. В. Панков // Современные методы теории функций

и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). — Воронеж, 2019. — С. 199–203.

11. Панков, В. В. Об априорной оценке решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения–XXX" (3–9 мая 2019 г.). — Воронеж, 2019. — С. 220–224.

12. Панков, В. В. Об априорной оценке решений одной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения / В. В. Панков, А. Д. Баев // Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения–XXXI" (3–9 мая 2020 г.). — Воронеж, 2020. — С. 161–165.

REFERENCES

1. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

2. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

3. Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate high-order elliptic equations. [Glushko V.P. Apriornye ocenki resheniyj kraevyxzadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Voronezh State University, Voronezh, 1979, 47 p, dep. in VINITI 27.03.79, no. 1048–79 — Voronezhskiyj gosudarstvennyyj universitet, Voronezh, 1979, 47 s, dep. v VINITI 27.03.79, No 1048–79.*

4. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

5. Baev A.D. Qualitative methods of theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. Voronezh, 2008, 240 p.

6. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

7. Baev A.D., Buneev S.S. On a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D., Buneev S.S. Ob odnom klasse kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 448, no. 1, pp. 7–8.

8. Baev A.D., Buneev S.S. A priori estimate of solutions of a boundary value problem in strip fordegenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

9. Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. On an a priori estimate for solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. [Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose

dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 161–171.

10. Pankov V.V. An a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate elliptic equation. [Pankov V.V. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya]. Sovremennye metody teorii funkciyj i smezhnye problemy: materialy Mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola (28 yanvarya – 2 fevralya 2019). Voronezh, 2019, pp. 199–203.

11. Pankov V.V. On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. [Pankov V.V. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola “Pontryaginskie chteniya XXX” (3–9 maya 2019). Voronezh, 2019, pp. 220–224.

12. Pankov V.V., Baev A.D. On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem for a degenerate elliptic equation. [Pankov V.V., Baev A.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya]. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoyj konferencii Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola “Pontryaginskie chteniya XXXI” (3–9 maya 2020). Voronezh, 2020, pp. 161–165.

Панков Владимир Владимирович, ассистент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: pankovfam@mail.ru

Pankov Vladimir Vladimirovich, teaching assistant of Department of mathematical analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: pankovfam@mail.ru