УДК 517

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

А. Х. Мохамад

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.12.2020 г.

Аннотация. Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных первого порядка в банаховом пространстве с вырожденными операторами. В работе система расщепляется на подсистемы, каждая из них решается с условиями типа Шоуолтера в особых случаях. Построено решение поставленной задачи.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, фредгольмов оператор, условия типа Шоуолтера.

INVESTIGATION OF A SYSTEM OF ALGEBRAIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNRESOLVED WITH RESPECT TO THE DERIVATIVE

A. H. Mohamad

Abstract. System of first-order partial differential algebraic equations in a Banach space with degenerate operators is considered. In this work, the system splits into subsystems. Each of which is solved with Showalter-type conditions in special cases. The solution of the problem is constructed.

Keywords: Banach space, partial differential algebraic equations, Fredholm operator, Showalter-type conditions.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается уравнение

$$A\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\alpha U\right)=B\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}+\beta U\right)+CU(t,x)+f(t,x), \tag{1}$$

где $A : E_1 \to E_2$, E_1, E_2 — банаховы пространства; A — замкнутый линейный фредгольмов оператор, с нулевым индексом, с плотной в E_1 областью определения $D(A)$, $\overline{domA}=\overline{domC}=E_1$; $B,C \in L(E_1,E_2)$, B — необратимый; $(t,x) \in T \times X$, $T=[0,t_k], X=[0,x_k]$; $f(t,x)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2; $U=U(t,x)$ искомая вектор-функция, $\alpha(t,x), \beta(t,x)$ — скалярные функции.

Дифференциально-алгебраические системы [1] также называют сингулярными системами, обобщенными системами пространства состояний (или обобщенными системами), неявными системами или системами дескрипторов. Математическая теория дифференциально-алгебраических систем начала развиваться в 1970-х годах в различных областях техники. Можно упомянуть работу Нгуена [2], в которой получены определенные условия разрешимости задачи в регулярном случае. В более общем случае, чем конечномерная система, можно вспомнить монографию Кэмпбелла [3]. Вырожденные системы уравнений в частных производных встречаются в различных приложениях: гидродинамике (уравнения Навье-Стокса), теплотехнике, электротехнике [2], [4].

Более того дескрипторные системы нашли свое применение в технических системах [5], энергетических системах [6] и робототехники [7].

Наша цель — найти условия, при которых система (1) с условиями типа Шоуолтера разрешима.

В случае, когда оператор пучок $A - \lambda B$, при λ достаточно малых по модулю, является регулярным, то есть оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A$: $domA \to E_1$ имеет число 0 нормальным собственным числом [8], E_1 разлагается в прямую сумму двух подпространств

$$E_1 = M \oplus N, \tag{2}$$

где N — корневое подпространство для A_λ, M — инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\widetilde{A_\lambda}$ оператора A_λ на M имеет обратный оператор $(\widetilde{A_\lambda})^{-1}$.

Известные свойства фредгольмовского оператора A.

Свойство 1 [9]. Пространства E_1 и E_2 расщепляются в прямые суммы

$$E_1 = KerA \oplus CoimA, E_2 = ImA \oplus CokerA, \tag{3}$$

где $CoimA$ — прямое дополнение к ядру $KerA$ в E_1, $CokerA$ — дефектное подпространство, $dimKerA = dimCokerA < \infty$. Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $CoimA \cap D(A)$ имеет ограниченный обратный оператор $\widetilde{A}^{-1}$.

Вводятся проекторы P_0 и Q_0 на $KerA$ и $CokerA$ соответственно, отвечающие разложениям (3), и оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q_0) : ImA \to CoimA \cap D(A)$, A^- называемый полуобратным. Здесь и далее через I обозначен единичный оператор в соответствующем пространстве.

Свойство 2 [10]. Уравнение

$$Av = w, \quad v \in E_1 \cap D(A), w \in E_2, \tag{4}$$

эквивалентно системе

$$Q_0 w = 0, \quad v = A^- w + P_0 v, \quad \forall P_0 v \in KerA \cap D(A).$$

Первое условие в последней системе является условием корректности уравнения (4).

Свойство 3 [10]. Цепочки Жордана B-присоединенных элементов оператора A имеют максимальную длину $p < \infty$, тогда и только тогда, когда оператор A_p обратим (см. [10–12]),

$$\begin{gathered} A_j = S_{j-1}P_{j-1}, \quad T_0 = A_0^- B, (A_0^- = A^-), \quad S_0 = Q_0 B, \\ S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - A_j^- S_{j-1} T_{j-1}, \quad (j = 1{,}2, \ldots ,p), \end{gathered} \tag{5}$$

Обозначим $A_0 = A$, $Q_0 = Q$, $P_0 = P$. Операторы P_j и Q_j в (5) — это проекторы на $KerA_j$ и $CokerA_j$, соответственно, отвечающие этим разложениям; $A_j^- = \widetilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)$.

Свойство 4 [10]. Пучок $(A - \lambda B)$ регулярен в том и только том случае, когда $\exists q \in \mathbb{N}$ такое, что оператор A_q обратим. Число p — есть минимальное из таких q.

Число 0 является нормальным собственным числом оператора A_λ, при этом выполняется (2), где

$$M = \{y \in E_1 : S_i y = 0, i = 0{,}1{,}...{,}p-1\}. \tag{6}$$

Сужение $\widetilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет ограниченный обратный оператор $\widetilde{A}_\lambda^{-1}$:

$$\widetilde{A}_\lambda^{-1} = I - \lambda T_p. \tag{7}$$

Свойство 5 [10]. B-присоединённые элементы v_i определяются из соотношений

$$Av_1 = 0, Av_i = Bv_{i-1}, \quad i = 1,2,...,p, \tag{8}$$

$$S_r v_i = 0, \quad (r + i) < p. \tag{9}$$

РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $B = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda B - A + A)$, умножение уравнения (1) слева на $(A - \lambda B)^{-1}$ приведет к

$$A_\lambda\big(\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U\big) = \frac{A_\lambda - I}{\lambda}\big(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U\big) + (A - \lambda B)^{-1}\big(C + f(t,x)\big). \tag{10}$$

Поскольку A_λ имеет число 0 нормальным собственным числом вектор–функция $U(t,x)$, отвечающая разложению (2), принимает вид

$$U(t,x) = QU + PU, \tag{11}$$

где P — проектор на подпространства N, Q — проектор на M.

Подставив (11) в (10), и учитывая, что подпространства N и M инвариантны относительно A_λ и что $N \cap M = \{0\}$, получим, что все слагаемые расщепляются на слагаемые в подпространствах M и N.

Уравнение расщепляется на уравнения в подпространствах M и N, после подстановки $P(A - \lambda B)^{-1}CQ = \widehat{0}$, т. е.

$$(A - \lambda B)^{-1}CU = Q(A - \lambda B)^{-1}C(PU + QU) + P(A - \lambda B)^{-1}CPU, \tag{12}$$

где $Q(A - \lambda B)^{-1}C(PU + QU) \in M$, $P(A - \lambda B)^{-1}CPU \in N$.

Таким образом, уравнение в подпространстве N принимает вид

$$A_\lambda(\frac{\partial PU}{\partial t} + \alpha PU) = G\big(\frac{\partial PU}{\partial x} + \beta PU\big) + P(A - \lambda B)^{-1}\big(CPU + f\big), \tag{13}$$

где, $G = \dfrac{A_\lambda - P}{\lambda}$, и уравнение в подпространстве M —

$$\widetilde{A}_\lambda\big(\frac{\partial QU}{\partial t} + \alpha QU\big) = \frac{\widetilde{A}_\lambda - Q}{\lambda}\big(\frac{\partial QU}{\partial x} + \beta QU\big) + Q(A - \lambda B)^{-1}\big(CU + f\big). \tag{14}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение (1) расщепляется на уравнения (13), (14) в подпространствах N и M, при выполнении условия $P(A-\lambda B)^{-1}CQ = \widehat{0}$, каждое из них решается с условиями типа Шоуолтера

$$U(t,0) = \psi(t) \in N, \tag{15}$$

$$U(0,x) = \varphi(x) \in M. \tag{16}$$

Из (11) следует

$$PU(0,x) = \widehat{0}, PU(t,0) = \psi(t). \tag{17}$$

$$QU(0,x) = \varphi(x), QU(t,0) = \widehat{0}. \tag{18}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В КОРНЕВОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

Решение уравнений (13), (17) лежит в корневом подпространстве. Рассмотрим случай, когда $dimKerA = 1$. Разложим по базису $\{v_i\}, i = 1, 2,..., p$, т. е.

$$PU(t,x) = \sum_{i=1}^{p} c_i(t,x)v_i, \quad P\psi(t) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(t)v_i, \tag{19}$$

$$\widetilde{C}(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j(t,x)v_i, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i > j, \quad a_{ij} = a_{ij}(\lambda) \in \mathbb{C}, \tag{20}$$

где $\widetilde{C}(t,x,\lambda) = P(A - \lambda B)^{-1}CPU(t,x)$, оператор $P(A - \lambda B)^{-1}CP$ является верхним треугольным оператором,

$$\begin{aligned} (A - \lambda B)^{-1}f(t,x) = F(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{p} f_i v_i + QF, \quad QF \in M, \\ P(A - \lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t,x,\lambda)v_i, \end{aligned} \tag{21}$$

используется следующая формула

$$A_\lambda v_i = -\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^{i-k}} v_k. \tag{22}$$

Используя (19)–(22), уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial c_i}{\partial x} v_i = \sum_{i=2}^{p}\Big(\frac{\partial c_i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial c_i}{\partial x}\Big)\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{\lambda^{i-k}}v_k + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j v_i \\ + \sum_{i=1}^{p}\Big(\alpha - \frac{\beta}{\lambda}\Big)c_i \sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{\lambda^{i-k}}v_k - \frac{\beta}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} c_i v_i + \sum_{i=1}^{p} f_i v_i. \end{aligned} \tag{23}$$

Сравнение в этом равенстве коэффициентов при v_i с одинаковыми индексами приводит к соотношениям

$$\frac{\partial c_p}{\partial x} = \big(\lambda a_{pp} - \beta(t,x)\big)c_p + \lambda f_p, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t} + \big(\lambda a_{ii} - \beta(t,x)\big)c_i + \alpha c_{i+1} \\ + \sum_{j=i+1}^{p} (\lambda a_{ij} - a_{i+1j})c_j + (\lambda f_i - f_{i+1}). \end{aligned} \tag{25}$$

Лемма 1. *Функции $\lambda f_p, \lambda f_i - f_{i+1}, i = 1, ..., p$ не зависят от λ.*

Доказательство. В силу (21),

$$(A - \lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i v_i + QF,$$

где

$$QF = Q(A - \lambda B)^{-1}f(t,x).$$

Отсюда

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i (A - \lambda B) v_i + (A - \lambda B) QF. \qquad (26)$$

Используя определение v_i, из (8) получаем

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i) B v_i - \lambda f_p B v_p + (A - \lambda B) QF,$$

откуда

$$AQF = f(t,x) + \lambda BQF - \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i) B v_i + \lambda f_p B v_p. \qquad (27)$$

В силу свойства (2) соотношение (27) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} Q_0 f + \lambda Q_0 BQF - \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i) Q_0 B v_i + (\lambda f_p) Q_0 B v_p = 0, \\ QF = A^- f + \lambda A^- B(QF) - \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i) A^- B v_i \\ + \lambda f_p A^- B v_p + P_0 (QF). \end{aligned} \qquad (28)$$

В первом равенстве этой системы $\lambda Q_0 BQF = \lambda S_0 QF = 0$ в силу (6). Более того, в силу свойства (5), $Q_0 B v_i = S_0 v_i = 0$, для $i = 1,...,p-1$. Поэтому первое равенство принимает вид

$$Q_0 f + (\lambda f_p) Q_0 B v_p = 0,$$

поскольку $Q_0 f$ и $Q_0 B v_p$ не зависят от λ, то и λf_p не зависит от λ.

Из второго равенства системы (28) $P_0(QF) = 0$. Тогда

$$QF = \lambda A^- B(QF) - \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i) A^- B v_i + A^- f + \lambda f_p A^- B v_p. \qquad (29)$$

Применяя S_1 к (29), в силу свойств (4), (5), получим

$$0 = (\lambda f_{p-1} - f_p) A^- B S_1 v_{p-1} + \lambda f_p A^- B S_1 v_p.$$

Но элементы последнего уравнения $\lambda f_p A^- B S_1 v_p$, $A^- B S_1 v_{p-1}$ не зависят от λ. Поэтому, $(\lambda f_{p-1} - f_p)$ не зависит от λ. Итак, в силу свойств (4), (5), после применения S_i к обеим частям уравнения (29), вытекает, что элементы $(\lambda f_{p-i} - f_{p-i+1})$, $i = 1,...,p-1$, не зависят от λ. ■

Поэтому можно записать λf_p и $\lambda f_i - f_{i+1}$ вектор–функций $P(A - \lambda B)^{-1} f(t,x)$ в виде

$$\lambda f_p = \Phi_p(t,x), \quad \lambda f_i - f_{i+1} = \Phi_i(t,x) \quad i = 1,2,...,p-1. \qquad (30)$$

Лемма 2. *Элементы* λa_{rr}, $(\lambda a_{ij} - a_{i+1j})$, $r = 1,2,...,p$, $i = 1,2,..., p-1$, $j = i+1, i+2,...,p$, *не зависят от* λ.

Доказательство. С учетом уравнения (12), (20), имеем

$$CU = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} c_j (A - \lambda B) v_i + (A - \lambda B) d_M,$$

$a_{ij}=0\quad \forall i>j$, $d_M=Q(A-\lambda B)^{-1}CU$, отсюда, с силу свойством (5), вытекает

$$A\Big(\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i+d_M\Big)=CU+\lambda a_{pp}c_pBv_p+\lambda Bd_M. \tag{31}$$

В силу свойства (2), соотношение (31) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} Q_0CU+\lambda a_{pp}c_pQ_0Bv_p+\lambda Q_0Bd_M=0,\\ \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i=A^{-}CU+\lambda a_{pp}c_pA^{-}Bv_p-G_M,\end{aligned} \tag{32}$$

$G_M=d_M-\lambda A^{-}Bd_M-P_0\big(\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i+d_M\big)$.

В первом равенстве системы (32), $Q_0Bd_M=S_0d_M=0$ в силу свойства (4) подпространства M, и поскольку Q_0CU, Q_0Bvp не зависят от λ, то и λa_{pp} не зависит от λ.

В силу свойства (4), $P_0d_M=0$, тогда во втором равенстве системы (32)

$$G_M=d_M-\lambda A^{-}Bd_M-P_0\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i.$$

Применим к этому равенству слева A, получим

$$AG_M=(A-\lambda B)d_M, \tag{33}$$

откуда $d_M=A_\lambda G_M$.

Теперь второе равенство в системе (32) можно записать

$$\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i=-G_M+q(t,x), \tag{34}$$

где $q(t,x)=A^{-}CU+\lambda a_{pp}c_pA^{-}Bv_p$ не зависит от λ.

Теперь применив к обеим частям уравнения (34) слева S_0, с учетом свойства (5), получим

$$\big(-\lambda a_{p-1p-1}c_{p-1}+(a_{pp}-\lambda a_{p-1p})c_p\big)S_0v_p=-S_0G_M+S_0q(t,x), \tag{35}$$

с учетом свойства (4) $S_0G_M=0$, $S_0q(t,x)$ не зависит от λ, и поскольку элемент S_0v_p не зависит от λ, в результате $-\lambda a_{p-1p-1}c_{p-1}+(a_{pp}-\lambda a_{p-1p})c_p$ не зависит от λ; но c_p, c_{p-1} не зависит от λ, поэтому элементы λa_{p-1p-1}, $(a_{pp}-\lambda a_{p-1p})$ не зависят от λ.

После применении S_1 слева для уравнения (34), с учетом свойств (4), (5), вытекает, что элементы λa_{p-2p-2}, $(a_{p-1p-1}-\lambda a_{p-2p-1})$, $(a_{p-1p}-\lambda a_{p-2p})$ не зависят от λ.

Тогда, после применении S_i, $i=1,2,\ldots,p-2$ слева для уравнения (34), с учетом свойств (4), (5), находим, что элементы $\lambda a_{p-i-1p-i-1}$, $(a_{p-ip-j}-\lambda a_{p-i-1p-j})$, $j=0,1,\ldots,i$, не зависят от λ. ■

На основании леммы 2 мы можем допустить

$$\lambda a_{rr}=\gamma_r,\quad (-\lambda a_{ij+1}+a_{i+1j+1})=-\zeta_{ij+1}, \tag{36}$$

где γ_r, ζ_{ij+1} — числа, $r=1,\ldots,p$, $i=1,\ldots,p-1$, $j=i,\ldots,p-1$.

На основании (30) и (36), система (24), (25), имеет вид

$$\frac{\partial c_p}{\partial x}=\big(\gamma_p-\beta(t,x)\big)c_p+\Phi_p, \tag{37}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t} + \big(\gamma_i - \beta(t,x)\big)c_i + \alpha c_{i+1} + \sum_{j=i+1}^{p} \zeta_{ij} c_j + \Phi_i, \tag{38}$$

де $i = 1,...,p-1$.

Уравнения (37), (38) решаются с условиями

$$c_i(t,0) = \psi_i(t), \quad c_i(t,0) = 0, \tag{39}$$

откуда, решение уравнения (37) с условием $c_i(t,0) = \psi_i(t)$, имеет вид

$$c_p(t,x) = \int_0^x exp\bigg(\int_\tau^x \big(\gamma_p - \beta(t,s)\big)ds\bigg)\Phi_p(t,\tau)d\tau + exp\bigg(\int_0^x \big(\gamma_p - \beta(t,s)\big)ds\bigg)\psi_p(t), \tag{40}$$

отсюда следует, что $c_p(t,x)$ принимает вид (40) при выполнении условия $c_p(t,0) = 0$, т. е.

$$0 = \int_0^x exp\bigg(\int_\tau^x \big(\gamma_p - \beta(0,s)\big)ds\bigg)\Phi_p(0,\tau)d\tau + exp\bigg(\int_0^x \big(\gamma_p - \beta(0,s)\big)ds\bigg)\psi_p(0). \tag{41}$$

Затем подставляем (40) в (38) с $i = p-1$, получим $c_{p-1}(t,x)$. Этот процесс повторяется для $i = p-2, p-3, ..., 1$, и находятся все элементы $c_i(t,x)$.

Решение уравнения (38) с условием $c_i(t,0) = \psi_i(t)$ для $i = 1,...,p-1$, имеет вид

$$c_i(t,x) = \int_0^x exp\big(\int_\tau^x \beta_i(t,s)ds\big)z_i(t,\tau)d\tau + exp\big(\int_0^x \beta_i(t,s)ds\big)\psi_i(t), \tag{42}$$

где,

$$\beta_i(t,s) = \gamma_i - \beta(t,s),$$

$$z_i(t,\tau) = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t}(t,\tau) + \alpha(t,\tau)c_{i+1}(t,\tau) + \sum_{j=i+1}^{p} \zeta_{ij} c_j(t,\tau) + \Phi_i(t,\tau).$$

Также $c_i(t,x)$, для $i = 1,...,p-1$ принимает вид (42) при выполнении условия $c_i(t,0) = 0$, т.е.

$$0 = \int_0^x exp\big(\int_\tau^x \beta_i(0,s)ds\big)z_i(0,\tau)d\tau + exp\big(\int_0^x \beta_i(0,s)ds\big)\psi_i(0), \tag{43}$$

Пусть теперь $dimKerA = n > 1$. Из свойства (3) p — максимальная длина цепочек B-присоединенных элементов для оператора A. Операторы A_j: $KerA_{j-1} \to CokerA_{j-1}$ — конечномерные операторы с соответствующими квадратными матрицами, следовательно, являются фредгольмовыми операторами, тогда

$$\begin{aligned} KerA_{j-1} &= CoimA_j \oplus KerA_j, \\ CokerA_{j-1} &= ImA_j \oplus CokerA_j, \quad j = 1,2,3,\ldots,p-1. \end{aligned} \tag{44}$$

Обозначим длину B-жордановой цепочки элемента из $CoimA_j$ через p_j:

$$p_j > p_{j+1}.$$

Введем обозначения: $dimKerA = n$, N — есть прямая сумма подпространств N_j, $j = 1,2,...,n$, $P = \sum_{j=1}^{n} P_j$, P_j — проектор в N на $N_j = lin\{v_i^j\}$, $\{v_i^j\}$ — элементы B-жордановых цепочек к элементам v_1^j ядра оператора A, то есть

$$Av_1^j = 0, Av_i^j = Bv_{i-1}^j, \quad j = 2,...,p_j,$$

и уравнения $Az = Bv_{p_j}$ неразрешимы относительно z.

Из (9) находим

$$S_r v_i^j = 0, \quad r = 0,1,...,p-1, r+i < p.$$

Согласно (19)–(21)

$$PU(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} c_i^j(t,x) v_i^j, \quad P\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} \psi_i^j(t) v_i^j,$$

$$P(A-\lambda B)^{-1} f(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} f_i^j(t,x) v_i^j, \tag{45}$$

$$P(A-\lambda B)^{-1} CPU = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} \sum_{k=1}^{p_j} a_{ik}^j c_k^j(t,x) v_i^j.$$

$$a_{ik}^j = 0 \quad \forall i > k, \quad a_{ik}^j = a_{ik}^j(\lambda) \in \mathbb{C}.$$

Аналогично, задача (13), решается с условиями

$$c_i^j(t,0) = \psi_i^j(t), \quad c_i^j(0,x) = 0, \quad i = 1,2,...,p_j, \quad j = 1,...,n, \tag{46}$$

и решение принимает вид

$$c_{p_j}^j(t,x) = \int_0^x exp\left(\int_\tau^x \left(\gamma_{p_j}^j - \beta(t,s)\right) ds \right) \Phi_{p_j}^j(t,\tau) d\tau + exp\left(\int_0^x \left(\gamma_{p_j}^j - \beta(t,s)\right) ds \right) \psi_{p_j}^j(t), \tag{47}$$

$$c_i^j(t,x) = \int_0^x exp\big(\int_\tau^x \beta_i^j ds\big) z_i^j(t,\tau) d\tau + exp\big(\int_0^x \beta_i^j ds\big) \psi_i^j(t), \tag{48}$$

$i = 1,...,p_j - 1$, $j = 1,...,n$, где

$$\lambda f_{p_j}^j = \Phi_{p_j}^j(t,x), \quad \lambda f_i^j - f_{i+1}^j = \Phi_i^j(t,x),$$

$$\beta_i^j = \beta_i^j(t,s) = \gamma_i^j - \beta(t,s),$$

$$z_i^j(t,\tau) = \frac{\partial c_{i+1}^j}{\partial t}(t,\tau) + \alpha(t,\tau) c_{i+1}^j(t,\tau) + \sum_{k=i+1}^{p_j} \zeta_{ik}^j c_k^j(t,\tau) + \Phi_i^j(t,\tau),$$

$$\lambda a_{rr}^j = \gamma_r^j, \quad (-\lambda a_{ik+1}^j + a_{i+1k+1}^j) = -\zeta_{ik+1}^j,$$

где γ_r^j, $\zeta_{ik+1}^j \in \mathbb{C}$, $r = 1,...,p_j$, $i = 1,...,p_j - 1$, $k = i,...,p_j - 1$.

Имеем

$$0 = \int_0^x exp\left(\int_\tau^x \left(\gamma_{p_j}^j - \beta(0,s)\right) ds \right) \Phi_{p_j}^j(0,\tau) d\tau + exp\left(\int_0^x \left(\gamma_{p_j}^j - \beta(0,s)\right) ds \right) \psi_{p_j}^j(0), \tag{49}$$

$$0 = \int_0^x exp\big(\int_\tau^x \beta_i^j(0,s) ds\big) z_i^j(0,\tau) d\tau + exp\big(\int_0^x \beta_i^j(0,s) ds\big) \psi_i^j(0), \tag{50}$$

$i = 1,...,p_j - 1$, $j = 1,...,n$.

Лемма 3. *Если $dimKerA = n > 1$, и оператор $P(A - \lambda B)^{-1}C$ действующий на подпространство N является верхним треугольным оператором, и $f(t,x)$ непрерывно дифференцируема $p-1$ раз по t и x, и $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируема $p-1$ раз. Тогда решение задачи* (13) *с условием* (17) *существует, единственно, не зависит от λ, определяется из соотношений* (47), (48) *при выполнении согласование условия* (49), (50).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ M

За счёт обратимости оператора A_λ на подпространстве M уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\partial QU(t,x)}{\partial t} + \alpha QU(t,x) = \frac{Q - \widetilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\Big(\frac{\partial QU(t,x)}{\partial x} + \beta QU(t,x)\Big) + h(t,x), \tag{51}$$

$$h(t,x) = H\big(CU + f(t,x)\big)$$

$$H = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1},$$

$$HCU = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1} C\big(QU + PU\big),$$

в правой части выражения HCU, элемент PU является решением задачи в корневом подпространстве, в силу леммы 3, PU не зависит от λ, поэтому из (11) решение в $M - QU$ не зависит от λ; так как $U(t,x)$ не зависит от λ.

Из свойства (3) и (4) оператор уравнения (51), $\dfrac{Q - \widetilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda} = T_p$, не зависит от λ.

Лемма 4. *Оператор* $H = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1}$ *не зависит от* λ.

Доказательство. Все слагаемые уравнения (51) не зависят от λ, кроме $h(t,x) = H\big(CU + f(t,x)\big)$, но CU и $f(t,x)$ не зависят от λ; отсюда вытекает, что H не зависит от λ.■

Уравнение (51) разрешимо, если операторы $\widetilde{A_\lambda}^{-1}$ и $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1} CQ$ коммутируют.

Лемма 5. *Если операторы* $Q(A - \lambda B)^{-1} CQ$ *и* $Q(A - \lambda B)^{-1} AQ$ *коммутируют, то коммутируют и* $\widetilde{A_\lambda}^{-1}$ *и* $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1} CQ$.

$$Q(A - \lambda B)^{-1} CQ = Q(A - \lambda B)^{-1} CQ \widetilde{A_\lambda} \widetilde{A_\lambda}^{-1}.$$

Операторы $Q(A - \lambda B)^{-1} CQ$ и $Q(A - \lambda B)^{-1} AQ$ коммутируют, поэтому,

$$Q(A - \lambda B)^{-1} CQ = \widetilde{A_\lambda} Q(A - \lambda B)^{-1} CQ \widetilde{A_\lambda}^{-1},$$

умножение последнего уравнения на $(\widetilde{A_\lambda}^{-1})^2$ нам дает требуемое

$$\widetilde{A_\lambda}^{-1} \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1} CQ = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1} CQ \widetilde{A_\lambda}^{-1}.\blacksquare$$

Пусть

$$\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A - \lambda B)^{-1}\big(CPU + f(t,x)\big) = \widetilde{h}(t,x).$$

Тогда, уравнение (51) эквивалентно

$$\frac{\partial QU(t,x)}{\partial t} + LQU(t,x) = T_p \frac{\partial QU(t,x)}{\partial x} + \widetilde{h}(t,x). \tag{52}$$

$$L = L(t,x) = \alpha(t,x)Q - \beta(t,x)T_p - HQ.$$

Решение задачи в M подпространстве является решением уравнения (52) с условием (18). Решение уравнения (52) с $QU(0,x) = \varphi(x)$ таково:

$$QU(t,x) = exp\left(-\int_0^t L(s,D_1)ds\right)\varphi(D_2) + \int_0^t exp\left(\int_t^\tau L(s,D_1)ds\right)\widetilde{h}(\tau,D_3)d\tau, \tag{53}$$

где $D_1 = (t-s)T_p + xQ$, $D_2 = tT_p + xQ$, $D_3 = (t-\tau)T_p + xQ$,

$$L(s,D_1) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Big((t-s)T_p + (x-\mu)Q\Big)^{-1} L(s,\mu)d\mu,$$

$$\varphi(D_2) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Big(tT_p + (x-\mu)Q\Big)^{-1} \varphi(\mu)d\mu,$$

$$\widetilde{h}(\tau,D_3) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Big((t-\tau)T_p + (x-\mu)Q\Big)^{-1} \widetilde{h}(\tau,\mu)d\mu,$$

Γ — замкнутый спрямляемый жорданов контур, такой, что область, которую он ограничивает, содержит спектры ограниченных операторов D_1, D_2 и D_3. Итак, получен следующий результат.

Лемма 6. *Пусть $P(A-\lambda B)^{-1}CQ = 0$, и выполнены условия пятой леммы. Тогда решение $QU(t,x)$ уравнения* (14) *с условием* (18) *с аналитической вектор-функций $\varphi(x)$, существует, и имеет вид (53), при выполнении условия*

$$0 = exp\left(-\int_0^t L(s,\widetilde{D}_1)ds\right)\varphi(\widetilde{D}_2) + \int_0^t exp\left(\int_t^\tau L(s,\widetilde{D}_1)ds\right)\widetilde{h}(\tau,\widetilde{D}_3)d\tau, \tag{54}$$

где $\widetilde{D}_1 = (t-s)T_p$, $\widetilde{D}_2 = tT_p$, $\widetilde{D}_3 = (t-\tau)T_p$,

$$L(s,\widetilde{D}_1) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Big((t-s)T_p - \mu Q\Big)^{-1} L(s,\mu)d\mu,$$

$$\varphi(\widetilde{D}_2) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Big(tT_p - \mu Q\Big)^{-1} \varphi(\mu)d\mu,$$

$$h(\tau,\widetilde{D}_3) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Big((t-\tau)T_p - \mu Q\Big)^{-1} h(\tau,\mu)d\mu.$$

На основании результатов, полученных ранее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если оператор пучок $(A-\lambda B)$ обратим и выполнены леммы (3) и (6), то решение задачи (1) с условиями (17), (18) существует, единственно и определяется по формулам (11), (45), (47), (48) и (53), когда применяются условия (49), (50) и (54).*

Пример 1. В пространстве ℓ_2 решается задача для системы

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial U_3}{\partial x} + \big(\beta+1\big)U_3(t,x), \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} + \big(\alpha-1\big)U_2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+1}}{i}\big(\dfrac{\partial U_{i+3}}{\partial x} + \beta U_{i+3}\big), \\ \dfrac{\partial U_3}{\partial t} + \big(\alpha-1\big)U_3 = \dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \beta\big(U_1+U_2\big), \\ \dfrac{\partial U_j}{\partial t} + \big(\alpha-1\big)U_j = \dfrac{\partial U_j}{\partial x} + \dfrac{\partial U_{j+1}}{\partial x} + \beta\big(U_j+U_{j+1}\big), \end{cases} \tag{55}$$

$j = 4, 6, ...$, с условиями $QU(0,x) = \varphi(x)$, $PU(t,0) = \psi(t)$, допустим, что $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ аналитические функции.

Пучок $A-\lambda B$ регулярен, так как цепочка $v_1, v_2, ...$, такая, что $Av_1 = 0, Av_i = Bv_{i-1}, i = 2, 3, ...$, конечна. Действительно, $v_1 = (1,0,0,0,...)$, $v_2 = (0,0,1,0,...)$ и v_3 не существует. Следовательно $dimN = 2$.

Пространство ℓ_2 разлагается в прямую сумму двух подпространств $\ell_2 = M + N$, т. е.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -U_{2M} \\ U_{2M} \\ 0 \\ U_{4M} \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{56}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ..... \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & ..... \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$Q(A - \lambda B)^{-1} CP = \widehat{0}$.

Система в N с $p = 2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_3}{\partial x} + (\beta + 1)c_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial (c_1 + c_2)}{\partial x} + \beta(c_1 + c_2) = \dfrac{\partial c_3}{\partial x} + \alpha c_3, \end{cases} \tag{57}$$

решается с условиями

$$c_3(t,0) = \psi_3(t), \quad \big(c_1 + c_2\big)(t,0) = \psi_1(t),$$

откуда,

$$c_3(t,x) = e^{-x}\psi_3(t), \tag{58}$$

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) = \int_0^x exp\bigg(\int_x^\tau \beta(t,s)ds\bigg)\bigg(\frac{\partial c_3(t,\tau)}{\partial \tau} + \alpha c_3(t,\tau)\bigg)d\tau \\ + exp\bigg(-\int_0^x \beta(t,s)ds\bigg)\psi_1(t), \end{aligned} \tag{59}$$

где

$$\frac{\partial c_3(t,\tau)}{\partial \tau} = -\psi_3(t) exp\bigg(-\int_0^x \big(\beta(t,s) + 1\big)ds\bigg)\bigg(\int_0^x \frac{\partial\big(\beta(t,s) + 1\big)}{dx}ds + \beta(t,x) + 1\bigg)$$

$\widetilde{h}(t,x) = 0$, поэтому задачи в M решается с условиями $U_{iM}(0,x) = \varphi_i(x)$, $i = 2,4,5,...$, решение принимает вид

$$QU(t,x) = exp\left(-\int_0^t L(s,D_1)ds\right)\varphi(D_2). \tag{60}$$

$$\int_0^t L(s,D_1)ds = W(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & -w_{22} & 0 & -w_{24} & -w_{25} & -w_{26} & \dots \\ 0 & w_{22} & 0 & w_{24} & w_{25} & w_{26} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & w_{44} & w_{45} & w_{46} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{44} & w_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где,

$$w_{22} = \int_0^t \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \frac{\alpha(s,\mu) - 1}{x - \mu} d\mu ds, \quad w_{24} = \int_0^t \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \frac{-\beta(s,\mu)}{x - \mu} + \frac{\alpha - \beta - 1}{x - \mu} b_4 d\mu ds,$$

$$w_{2i} = \int_0^t \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \frac{(-1)^{i+1}\beta(s,\mu)}{(i-3)(x - \mu)} - \frac{\beta(s,\mu)}{x - \mu} b_{i-1} + \frac{\alpha - \beta - 1}{x - \mu} b_i d\mu ds, \quad i = 5,6,...$$

$$b_4 = \frac{-(t-s)}{t-s+x-\mu}, \quad b_i = (-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{i-3}\frac{(-b_4)^j}{i-2-j}, \quad i = 5,6,...$$

$$w_{44} = \int_0^t \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{\alpha(s,\mu)-\beta(s,\mu)-1}{t-s+x-\mu} d\mu ds,$$

$$w_{4i} = \int_0^t \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(-1)^i\left(\frac{\beta(t-s)^{i-4-1}}{(t-s+x-\mu)^{i-4}} + \frac{(\alpha-\beta-1)(t-s)^{i-4}}{(t-s+x-\mu)^{i-4+1}}\right) d\mu ds$$

где $i = 5,6,7,...$

$$\varphi(D_2) = \begin{pmatrix} -\varphi_2(x) - \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{i=j+4}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i-j-3}\left(\varphi_i(x) - \frac{(t-s)^j}{j!}\varphi_i^{(j)}(t-s+x)\right) \\ \varphi_2(x) + \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{i=j+4}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i-j-3}\left(\varphi_i(x) - \frac{(t-s)^j}{j!}\varphi_i^{(j)}(t-s+x)\right) \\ 0 \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(-t)^j}{j!}\varphi_{4+j}^{(j)}(t+x) \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(-t)^j}{j!}\varphi_{5+j}^{(j)}(t+x) \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{(-t)^j}{j!}\varphi_{6+j}^{(j)}(t+x) \\ \dots \end{pmatrix}.$$

$$QU(t,x) = exp\Big(-W(t,x)\Big)\varphi(D_2). \tag{61}$$

Тогда

$$U(t,x) = QU(t,x) + PU(t,x), \tag{62}$$

$PU(t,x) = \begin{pmatrix} \big(c_1+c_2\big)(t,x) \\ 0 \\ c_3(t,x) \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$, $\big(c_1+c_2\big)(t,x)$ и $c_3(t,x)$ принимают виды (59), (58) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Byrne, G. D. Differential-algebraic systems, their applications and solutions / G. D. Byrne, P. R. Ponzi // Comput. Chem. Eng. — 1988. — V. 12. — P. 377–382.

2. Нгуен, Х. Д. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х. Д. Нгуен, В. Ф. Чистяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 98–111.

3. Campbell, S. L. Singular Systems of Differential Equations II / S. L. Campbell. — Pitman, 1982.

4. Bodestedt, M. PDAE models of integrated circuits and index analysis / M. Bodestedt, C. Tischendorf // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. — 2007. — V. 13. — P. 1–17.

5. Hemami, H. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane / H. Hemami, B. F. Wyman // IEEE Trans. Automat. Control. — 1979. — V. 24. — P. 526–535.

6. Scott, B. Power system dynamic response calculations / B. Scott // Proc. IEEE. — 1979. — V. 67. — P. 219–247.

7. Mills, J. K. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks / J. K. Mills, A. A. Goldenberg // IEEE Trans. Robot. Automat. — 1989. — V. 5. P. 30–46.

8. Зубова, С. П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве / С. П. Зубова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 192–198.

9. Аткинсон, Ф. В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф. В. Аткинсон // Математический сборник. — 1951. — Т. 28 (70), № 1. — С. 3–14.

10. Зубова, С. П. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышов // Дифференц. уравнения и их применение. — 1976. — Вып. 14. — С. 21–39.

11. Баев, А. Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.

12. Зубова, С. П. Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в случае двухшаговой декомпозиции / С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Ижевского гос. ун–та им. М. Т. Калашникова. Серия : математика. — 2015. — № 1 (65). — С. 120–122.

REFERENCES

1. Byrne G.D., Ponzi P.R. Differential-algebraic systems, their applications and solutions. Comput. Chem. Eng., 1988, vol. 12, pp. 377–382.

2. Nguyen H.D., Chistyakov V.F. On modeling using differential-algebraic equations in partial derivatives. [Nguyen H.D., Chistyakov V.F. O modelirovanii s ispol'zovaniem differencial'no-algebraicheskix uravneniyj v chastnyx proizvodnyx]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling and Programming*, 2013. — vol. 6, no. 1, pp. 98–111.

3. Campbell S.L. Singular Systems of Differential Equations II, Pitman, 1982.

4. Bodestedt M., Tischendorf C. PDAE models of integrated circuits and index analysis. Math. Comput. Model. Dyn. Syst., 2007, vol. 13, pp. 1–17.

5. Hemami H., Wyman B.F. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane. IEEE Trans. Automat. Control, 1979, vol. 24, pp. 526–535.

6. Scott B. Power system dynamic response calculations. Proc. IEEE, 1979, vol. 67, pp. 219–247.

7. Mills J.K., Goldenberg A.A. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. IEEE Trans. Robot. Automat., 1989, vol. 5, pp. 30–46.

8. Zubova S.P. On the solvability of the Cauchy problem for the descriptor quasiregular equations in banach spaces. [Zubova S.P. O razreshimosti zadachi Koshi dlya deskriptornogo psevdoregulyarnogo uravneniya v banaxovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 192–198.

9. Atkinson F.V. Normal solvability of linear equations in normed spaces. [Atkinson F.V. Normal'naya razreshimost' lineyjnyx uravneniyj v normirovannyx prostranstvax]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1951, vol. 28 (70), no. 1, pp. 3–14.

10. Zubova S.P., Chernyshov K.I. On a linear differential equation with a Fredholm operator at the derivative. [Zubova S.P., Chernyshov K.I. O lineyjnom differencial'nom uravnenii s fredgol'movym operatorom pri proizvodnoyj]. *Differencial'nye uravneniya i ix primenenie —*

Differential Equations and Their Applications, 1976, iss. 14, pp. 21–39.

11. Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. Solving problems for descriptor equations by the decomposition method. [Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadach dlya deskriptornyx uravneniyj metodom dekompozicii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 134–140.

12. Zubova S.P., Uskov V.I. The solution of the Cauchy problem for the descriptor equation in the case of two-step decomposition. [Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadachi Koshi dlya deskriptornogo uravneniya v sluchae dvuxshagovoyj dekompozicii]. *Vestnik Izhevskogo gos. un–ta im. M.T. Kalashnikova. Seriya: matematika — Bulletin of Izhevsk State University univ. M. T. Kalashnikov. Series: mathematics*, 2015, no. 1 (65), pp. 120–122.

Мохамад Абдулфтах Хосни, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com

Mohamad Abdulftah Hosni, PhD student, Department of Mathematical Analysis, faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com