УДК 517.958

ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ ГРАНИЦЕ

А. В. Глушко, Е. А. Логинова, А. А. Лесных

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.

Аннотация. Статья посвящена изучению задачи нестационарного распределения температуры в верхней полуплоскости с конечным разрезом, ортогональным границе, моделирующей композитный материал с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности и трещиной. Рассматривается уравнение теплопроводности, дополненное граничными условиями типа трансмиссии и нулевым начальным условием. Исходная задача сводится к обобщенной задаче Коши, для чего используется специализированная дельта-функция, описывающая границу области. Примененный подход позволяет доказать корректность поставленной таким образом задачи, изучить ее разрешимость, показать, в каком смысле и при каких ограничениях выполнены краевые условия и, главное, выделить сингулярные компоненты асимптотик решения и его производных в разложениях решения по расстоянию до границы.

Ключевые слова: асимптотические представления, условия типа трансмиссии, разрез-трещина, задача теплопроводности, неоднородный коэффициент теплопроводности.

STUDYING THE SOLUTION OF THE NON-STATIONARY EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY IN A HALF-PLANE WITH A SECTION, ORTHOGONAL BOUNDARY

A. V. Glushko, E. A. Loginova, A. A. Lesnyh

Abstract. The article is devoted to the study to the problem of unsteady temperature distribution in the upper half-plane with a finite cut, orthogonal to the boundary, modeling a composite material with a variable coefficient of internal thermal conductivity and a crack. The heat conduction equation is considered, supplemented by boundary conditions such as a transmission and a zero initial condition. The original problem is reduced to the generalized Cauchy problem, for which a specialized delta function is used that describes the boundary of the region. The applied approach allows one to prove the correctness of the problem posed in this way, study its solvability, show in what sense and under what restrictions the boundary conditions are satisfied and, that is the most important, highlight the singular components of the asymptotics of the solution and its derivatives in the expansion of the solution with respect to the distance to the boundary.

Keywords: asymptotic representations, conditions such as transmission, section-crack, heat conduction problem, inhomogeneous coefficient of thermal conductivity.

ВВЕДЕНИЕ

Последнее время значительное количество работ, в которых изучаются эллиптические и параболические уравнения и системы уравнений, посвящены задачам с граничными условиями типа сопряжения (трансмиссии).

Частью этих исследований является ряд работ, в которых рассматриваются задачи сопряжения для эллиптических и параболических уравнений с непрерывными коэффициентами в связных областях, однако, наличествуют куски границы вырожденного типа (разрез) с неоднородными условиями сопряжения ("трансмиссии с собой"), моделирующие внутреннюю трещину в материале.

Задачи подобного типа содержатся в работах [1–4]. Работы [5–6] были посвящены изучению задачи трансмиссии для эллиптического уравнения в полуплоскости с трещиной, ортогональной границе.

Данная работа посвящена изучению аналогичной задачи, только для параболического уравнения, описывающего нестационарное распределение тепла.

Исходная задача будет сведена нами к обобщенной задаче Коши, для чего будет использована специализированная дельта-функция (см. [3], [4]), описывающая границу области. Примененный подход позволил доказать корректность поставленной таким образом задачи, изучить ее разрешимость, показать, в каком смысле и при каких ограничениях выполнены краевые условия и, главное, выделить сингулярные компоненты асимптотик решения и его производных в разложениях решения по расстоянию до границы.

В работе рассматривается задача, описывающая нестационарное распределение температуры с переменным коэффициентом внутренней теплопроводности в материале с трещиной. Изучается двумерный случай.

Предполагается, что коэффициент внутренней теплопроводности вещества задан формулой $k\left(x\right)=e^{kx_2}$. Тогда уравнение нестационарного распределения тепла примет вид

$$\frac{\partial\widehat{u}\left(x,t\right)}{\partial t}-\frac{\partial^2\widehat{u}\left(x,t\right)}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\widehat{u}\left(x,t\right)}{\partial x_2^2}+\frac{k^2}{4}\widehat{u}=0,\quad x=\left(x_1,x_2\right)\in\mathrm{R}_+^2\backslash l,\ t>0. \qquad (1)$$

Здесь $l=\{x=(x_1,x_2):x_1=\pm0,x_2\in[0;1]\}$, $\mathrm{R}_+^2=\{x|x_1\in\mathrm{R},\ x_2>0\}$.

Считаем выполненным начальное условие

$$u(x_1,x_2,0)=0,\ x=(x_1,x_2)\in\mathrm{R}_+^2.$$

Граничное условие на части границы, не являющейся трещиной, задано следующим образом

$$\widehat{u}\left(x_1,x_2,t\right)\big|_{x_2=0}=0,\ x_1\in\mathrm{R},\ t\geqslant0. \qquad (2)$$

Граничные условия на трещине заданы следующим образом

$$\begin{aligned}&\widehat{u}\left(+0,x_2,t\right)-\widehat{u}(-0,x_2,t)=\widehat{q}_0\left(x_2,t\right),\\&\frac{\partial\widehat{u}\left(+0,x_2,t\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial\widehat{u}\left(-0,x_2,t\right)}{\partial x_1}=\widehat{q}_1\left(x_2,t\right);\ \ t\geqslant\ 0,\ x_2\in(0;\ 1).\end{aligned} \qquad (3)$$

Первое из условий (3) описывает разность между температурами левого и правого берегов трещины, а второе — разность между тепловыми потоками через эти берега.

Рассмотрим продолжения по нечетности функций $\widehat{u}$, $\widehat{q}_0$ и $\widehat{q}_1$:

$$u\left(x_1,x_2,t\right)=\begin{cases}\widehat{u}\left(x_1,x_2,t\right),x_2>0\\-\widehat{u}\left(x_1,-x_2,t\right),x_2<0\end{cases};\quad q_k\left(x_2,t\right)=\begin{cases}\widehat{q}_k\left(x_2,t\right),x_2>0;\\-\widehat{q}_k\left(-x_2,t\right),x_2<0;\end{cases}\ k=0;1.$$

Будем считать, что $u\,(x_1,x_2,t)$, $q_0\,(x_2,t)$, $q_1\,(x_2,t)$ равны нулю при $t<0$.

Условие 1. Функции $\widehat{q}_0$ и $\widehat{q}_1$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных, ограничены вместе со своими производными до второго порядка и $\widehat{q}_k(x_2,0)=0$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\widehat{q}_1(x_2,0)=0;\;\; k=0;1.$

Продолженные функции q_0 и q_1 также будут дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных.

Определение 1. Пусть $q\,(x_2,t)\in C\,([-1;1])\times[0;+\infty)$. Через $q\,(x_2,t)\,\delta_{[-1,1]}$ будем обозначать обобщенную функцию из $D'\left(\mathrm{R}^3\right)$, действующую на пробную функцию $\varphi\,(x,t)\in D\left(\mathrm{R}^3\right)$ по следующему правилу

$$\left(q\,(x_2,t)\,\delta_{[-1,1]},\varphi\,(x_1,x_2,t)\right)=\int\limits_0^\infty\int\limits_{-1}^1 q\,(\sigma_2,t)\,\varphi\,(0,\sigma_2,t)d\sigma_2dt.$$

Задача (1)–(3) может быть сведена к обобщенной задаче

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t}-\Delta u\,(x_1,x_2,t)+\frac{k^2}{4}u\,(x_1,x_2,t)=\\=q_1\,(x_2,t)\,\delta_{[-1,1]}\,(x_1,x_2,t)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(q_0\,(x_2,t)\,\delta_{[-1,1]}\,(x_1,x_2,t)\right).\end{gathered}\tag{4}$$

Определение 2. Обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть решение уравнения (4).

Фундаментальным решением оператора $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x+\frac{k^2}{4}$ в R^3 является функция $E(x,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi t}\exp[-\frac{k^2}{4}t-\frac{|x|^2}{4t}]$, где $\theta(t)$ — тета–функция Хэвисайда.

Пусть функции $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(q_0(x_2,t)\delta_{[-1,1]}\right)$, $q_1(x_2,t)\delta_{[-1,1]}$ принадлежат пространству $D'(\mathrm{R}^3)$, $E(x_1,x_2,t)\in S'(\mathrm{R}^3)$ — фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x+\frac{k^2}{4}$. Тогда обобщенное решение задачи (1)–(3) представимо в виде

$$u(x_1,x_2,t)=E(x_1,x_2,t)*(q_1(x_2,t)\delta_{[-1,1]})+E(x_1,x_2,t)*\left(\frac{\partial q_0(x_2,t)\delta_{[-1,1]}}{\partial x_1}\right).\tag{5}$$

Сформулируем два главных утверждения работы.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Пусть также выполнены условия $q_i(1,t)=q_i(-1,t)=0$, $i=0;1$. Обозначим $u=u_0+u_1$, где

$$u_1(x,t)=-\int\limits_0^t\frac{1}{4\pi\tau}\int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}}q_1(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau;$$

$$u_0(x,t)=\int\limits_0^t\frac{x_1}{8\pi\tau^2}\int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}}q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau.$$

Тогда функция $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3). Функция $u_1(x,t)$ непрерывна при $x_2\in\mathrm{R}$, $x_1\in\mathrm{R}$, $t>0$. Функция $u_0(x,t)$ непрерывна в точках $\{x,t|\,(x_2\in\mathrm{R},\,x_1\in\mathrm{R},\,t>0)\backslash(x_2\in(-1;\;1)\}$ и

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\{u_0(\varepsilon_1,x_2,t)-u_0(-\varepsilon_2,x_2,t)\}=q_0(x_1,t),$$

т. е. первое из условий (3) для функции $u(x,t)$ выполнено по непрерывности, второе из условий (3) для функции $u\,(x,t)$ выполнено в смысле главного значения, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial u(\varepsilon,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial u(-\varepsilon,x_2,t)}{\partial x_1}=$

$\widehat{q}_1(x_2,t)$ при этом $\frac{\partial}{\partial x_1}u(x,t)$ непрерывна при $x_2 > 0$, $x_1 \in \mathrm{R}$, $x \notin \{x_1 = 0;\ x_2 \in (0;1)\}, t > 0$. Условие (2) выполнено в классическом смысле (по непрерывности). Также выполнено начальное условие.

Теорема 2. Пусть $t > 0$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы при $x_1 \to +0$, $x_2 \in [-1;1]$, $t \in [0;T]$, где $T > 0$, асимптотические представления

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2+x_1^2} + \frac{1+x_2}{(1+x_2)^2+x_1^2}\right) q_0(x_2,t) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{(1-x_2)^2+x_1^2}{(1+x_2)^2+x_1^2} + \frac{2x_1^2x_2}{((1-x_2)^2+x_1^2)((1+x_2)^2+x_1^2)}\right)\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2} + r(x,t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1}{(x_2+1)^2+x_1^2} - \frac{x_1}{(x_2-1)^2+x_1^2}\right) q_0(x_2,t) - \frac{1}{4\pi}\left(\ln(\frac{(x_2+1)^2+x_2^2}{(x_2-1)^2+x_1^2}\right) q_1(x_2,t) + \widetilde{r}, \quad (6)$$

где r, $\widetilde{r}$ — ограниченные на любом компакте функции.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ПРОВЕРКА УСЛОВИЙ

Стандартным образом доказывается

Лемма 1. Пусть существует решение задачи (1)–(3) $\widehat{u}(x_1,x_2,t)$, принадлежащее пространству $C^2(\mathrm{R}^2\backslash l_1) \times C^1(0;+\infty)$, где $l_1 = \{x = (x_1,x_2) : x_1 = \pm 0, x_2 \in [-1;1]\}$, $q_0(x_2,t)$, $q_1(x_2,t)$ — ограничены. Тогда обобщенное решение задачи (1)–(3) имеет вид (5).

На основании утверждения леммы 1 задача (1)–(3) может быть сведена к обобщенной задаче (5).

Обозначим $\|q(x_2,t)\| = \sup\limits_{\substack{x_2 \in [0;\ 1] \\ t \in [0;\infty)}} |q(x_2,t)|$.

Доказательство теоремы 1. Так как имеет место неравенство $e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} = \frac{|\sigma-x_2|^{2/3}}{4\tau^{1/3}} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \frac{4\tau^{1/3}}{|\sigma-x_2|^{2/3}} \leqslant c\frac{\tau^{1/3}}{|\sigma-x_2|^{2/3}}$, то для интеграла u_1 справедлива следующая оценка

$$|u_1| \leqslant \tfrac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \tfrac{1}{\tau}\int\limits_0^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} e^{-(\frac{k^2}{4}\tau+\frac{x_1^2}{4\tau})}|q_1|\,d\sigma d\tau \leqslant c\,\|q_1\|\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \tfrac{1}{\tau}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}d\sigma d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c_1\,\|q_1\|\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \tfrac{1}{\tau}\tfrac{\tau^{1/3}d\sigma d\tau}{(\sigma-x_2)^{2/3}} = K\int\limits_0^t \tfrac{d\tau}{\tau^{2/3}}\int\limits_{-1}^1 \tfrac{d\sigma}{(\sigma-x_2)^{2/3}}\,\|q_1\| \leqslant\ Kt^{1/3}\left(|1-x_2|^{1/3} + |1+x_2|^{1/3}\right)\|q_1\|.$$

Отсюда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [11]) вытекает, что интеграл $u_1(x,t)$ непрерывен при $x \in \mathrm{R}^2$, $t > 0$, поэтому

$$u_1(+0,x_2,t) - u_1(-0,x_2,t) = 0. \quad (7)$$

Пусть фиксированное x_2 не принадлежит отрезку $[-1,1]$, то есть$(\sigma - x_2)^2 > \delta^2 > 0$. Тогда выражение $\tau^{-2}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} < \tau^{-2}e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}$ ограничено. В данном случае для u_0 справедлива оценка $|u_0| \leqslant c\,\|q_0\|\,|x_1| \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^t 1d\tau d\sigma = 2ct\,\|q_0\|\,|x_1|$, поэтому интеграл $u_0(x,t)$ непрерывен при $x_1 \in \mathrm{R}$, $|x_2| > 1$, $t \geqslant 0$.

Пусть x_2 принадлежит интервалу $(-1;1)$. Отметим справедливость представления

$e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-(\frac{k^2}{4}\tau+\frac{x_1^2}{4\tau})} = e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}} + e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}(e^{-\frac{k^2\tau}{4}}-1)$, причем

$$\left|e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}(e^{-\frac{k^2\tau}{4}}-1)\right| = \left|e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}\left(-\frac{k^2\tau}{4}\right)\int\limits_0^1 e^{-\frac{k^2}{4}\tau q}dq\right| \leqslant ce^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\left(e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}(\sigma-x_2)^{2/3}\tau^{-1/3}\right)(\sigma-x_2)^{-2/3}e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\tau^{4/3} \leqslant c_1\tau^{4/3}(\sigma-x_2)^{-2/3}. \quad (8)$$

Представим интеграл u_0 в виде $u_0 = u_{00} + u_{01}$, где

$$u_{00} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^t \frac{x_1}{\tau^2}\cdot e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau;$$

$$u_{01} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^t \frac{x_1}{\tau^2}\cdot\int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}(e^{-\frac{k^2\tau}{4}}-1)q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau.$$

С учетом оценки (8) для интеграла u_{01} можем записать неравенство

$$|u_{01}| \leqslant c|x_1|\int\limits_0^1 \tau^{-2/3}d\tau\int\limits_{-1}^1 |\sigma-x_2|^{-2/3}d\sigma||q_0|| \leqslant c'|x_1|||q_0||.$$

Из последней оценки следует, что u_{01} непрерывная функция. В частности, поэтому

$$u_{01}(+0,x_2,t) - u_{01}(-0,x_2,t) = 0. \quad t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1) \quad (9)$$

Перейдем к оценке интеграла u_{00}. Напомним, что теперь $|x_2| \leqslant 1$. После замен переменных $\sigma = x_2 - 2\sqrt{\tau}\eta$, $\tau = x_1^2\left(4\xi^2\right)^{-1}$ интеграл примет вид

$$u_{00} = \operatorname{sign} x_1\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{|x_1|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{\frac{(x_2-1)\xi}{|x_1|}}^{\frac{(x_2+1)\xi}{|x_1|}} e^{-\eta^2}q_0(x_2-\frac{|x_1|\eta}{\xi},t-\frac{x_1^2}{4\xi^2})d\eta d\xi. \quad (10)$$

Из (10) следует, что u_{00} — нечетная по x_1 функция. Пусть теперь $x_1 > 0$. Тогда

$$u_{00} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{x_1}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{\frac{(x_2-1)\xi}{x_1}}^{\frac{(x_2+1)\xi}{x_1}} e^{-\eta^2}q_0(x_2-\frac{x_1\eta}{\xi},t-\frac{x_1^2}{4\xi^2})d\eta d\xi =$$

$$= q_0(x_2,t)\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta d\xi + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{x_1}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{\frac{(x_2-1)\xi}{x_1}}^{\frac{(x_2+1)\xi}{x_1}}\left(e^{-\eta^2}q_0(x_2-\frac{x_1\eta}{\xi},t-\frac{x_1^2}{4\xi^2})-\right.$$

$$\left.-\left(q_0(x_2,t)\right)d\eta d\xi\right) - q_0(x_2,t)\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{\frac{(x_2-1)\xi}{x_1}} e^{-\eta^2}d\eta d\xi -$$

$$-q_0(x_2,t)\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{\frac{(x_2+1)\xi}{x_1}}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta d\xi - q_0(x_2,t)\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{x_1}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\int\limits_{\frac{(x_2-1)\xi}{x_1}}^{\frac{(x_2+1)\xi}{x_1}} e^{-\eta^2}d\eta d\xi.$$

При $x_1 \to +0$ три последних интеграла стремятся к нулю. Кроме того, $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta \cdot \frac{q_0(x_2,t)}{2} = \frac{q_0(x_2,t)}{2}$. Поэтому

$$\lim_{x_1\to+0} u_{00} = \frac{1}{2}q_0(x_2,t) + \lim_{x_1\to+0} g(x,t), t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1) \tag{11}$$

где $g(x,t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{x_1}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}\int\limits_{\frac{(x_2-1)\xi}{x_1}}^{\frac{(x_2+1)\xi}{x_1}} \left(e^{-\eta^2}q_0(x_2-\frac{x_1\eta}{\xi},t-\frac{x_1^2}{4\xi^2}) - q_0(x_2,t)\right)d\eta d\xi$.

Перейдем в последнем интеграле к старым переменным, получим $g(x,t) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^t \frac{x_1}{\tau^2}\cdot e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\left(q_0(\sigma,t-\tau)-q_0(x_2,t)\right)d\sigma d\tau$. Из представления $q_0(\sigma,t-\tau) - q_0(x_2,t) = O(\sigma-x_2)+O(\tau)$ следует неравенство $|q_0(\sigma,t-\tau)-q_0(x_2,t)| \leqslant c\left(\left\|\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right\||\sigma-x_2| + \left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\tau\right)$. Проведем оценки

$$\left|\frac{x_1}{\tau^2}\cdot e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\cdot e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\left(q_0(\sigma,t-\tau)-q_0(x_2,t)\right)\right| =$$

$$= |x_1|^{0,1}\left(\frac{x^{0,9}}{\tau^{0,45}}e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\right)\cdot\frac{1}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\cdot\left(\frac{(\sigma-x_2)^{0,9}}{\tau^{0,45}}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\right)\cdot|q_0(\sigma,t-\tau)-q_0(x_2,t)|\frac{1}{\tau^{1,1}} \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x_1|^{0,1}\frac{1}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\left(\frac{(\sigma-x_2)^{0,9}}{\tau^{0,45}}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\right)\cdot\left(\left\|\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right\||\sigma-x_2| + \left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\tau\right)\frac{1}{\tau^{1,1}} \leqslant$$

$$\leqslant c\,|x_1|^{0,1}\frac{1}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\left(\frac{(\sigma-x_2)^{1,9}}{\tau^{0,95}}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\right)\cdot\left\|\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right\|\frac{1}{\tau^{0,6}} +$$

$$+\frac{c_1\,|x_1|^{0,1}}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\frac{1}{\tau^{0,1}} \leqslant c^*|x_1|^{0,1}\left(\frac{1}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\frac{1}{\tau^{0,6}}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right\| + \frac{1}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\frac{1}{\tau^{0,1}}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\right).$$

На основе этих оценок для $g(x,t)$ может быть получено неравенство

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{c^*|x_1|^{0,1}}{8\pi}\left(\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\tau^{0,6}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right\| + \int\limits_0^t\frac{d\tau}{\tau^{0,1}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{(\sigma-x_2)^{0,9}}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\right). \tag{12}$$

Так как интегралы в правой части оценки (12) абсолютно сходятся, то $g(x,t)$ является непрерывной функцией, и справедливо равенство

$$\lim_{x_1\to+0} g(x,t) = 0. \tag{13}$$

Из равенств (11) и (13) имеем $\lim\limits_{x_1\to+0} u_{00} = \frac{q_0(x_2,t)}{2}$, а с учетом нечетности функции u_{00} можем записать

$$u_{00}(+0,x_2,t) - u_{00}(-0,x_2,t) = q_0(x_2,t); \quad t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1). \tag{14}$$

Из представления $u_0 = u_{00} + u_{01}$ и равенств (9) и (14) следует

$$u_0(+0,x_2,t) - u_0(-0,x_2,t) = q_0(x_2,t); t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1). \tag{15}$$

Из представления обобщенного решения задачи (1)-(3) $u = u_0 + u_1$ и равенств (7) и (15) имеем первое из условий (3). Таким образом, доказано

Утверждение 1. Пусть выполнено условие (1). Тогда решение задачи (1)-(3) непрерывно по $x \in \mathrm{R}^2 \backslash l;\ t \geqslant 0$ и выполнено первое из условий (3).

Перейдём к доказательству выполнения второго из условий (3).

Отметим, что справедливо представление $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1} = \sum\limits_{k=1}^{3} P_k(x,t)$, где

$$P_1(x,t) = \int\limits_0^t \frac{x_1}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau;$$

$$P_2(x,t) = \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} e^{-\frac{k^2}{4}\tau} q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau; \tag{16}$$

$$P_3(x,t) = -\int\limits_0^t \frac{x_1^2}{16\pi\tau^3} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau.$$

Функция $P_1(x,t)$ была изучена выше, как $u_0(x,t)$ с формальной заменой в подынтегральном выражении q_0 на q_1. Поэтому $P_1(x,t)$ непрерывна при $x \in \mathrm{R}^2 \backslash l;\ t \geqslant 0$. При $x_1 \to 0,\ x_2 \in (-1;\ 1)$: $P_1(x,t) \to \operatorname{sign} x_1 \cdot \frac{q_1(x_2,t)}{2}$ и справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \{P_1(\varepsilon,x_2,t) - P_1(-\varepsilon,x_2,t)\} = q_1(x_2,t). \quad t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1). \tag{17}$$

Перейдем к изучению интеграла $P_2(x,t) = P_{20}(x,t) + P_{21}(x,t)$, где

$$P_{20}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau; \tag{18}$$

$$P_{21}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \left(e^{-\frac{k^2}{4}\tau} - 1\right) q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau. \tag{19}$$

Для P_{21} имеет место оценка

$$|P_{21}| \ \leqslant\ c\,\|q_0\| \int\limits_0^t \frac{1}{\tau} \int\limits_{-1}^{1} \exp\left[\frac{-(\sigma-x_2)^2 - x_1^2}{4\tau}\right] d\sigma d\tau =$$

$$= c\,\|q_0\| \int\limits_0^t \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{(\sigma-x_2)^{2/3}}{\tau^{1/3}} e^{\frac{-(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\right) \frac{1}{\tau^{2/3}} d\sigma d\tau \leqslant c_1\,\|q_0\| \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^{2/3}} d\tau = c_2\,\|q_0\|\, t^{\frac{1}{3}}.$$

Из этой оценки вытекает, что интеграл P_{21} непрерывен по переменным x_1, x_2, t.

Перейдем к рассмотрению функции P_{20}. Проведём в интеграле P_{20} интегрирование по частям с учетом равенства нулю внеинтегральных членов.

Введем обозначения $P_{20} = P_{20}^0 + P_{20}^1$, где

$$P_{20}^0 = -\int\limits_0^t \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \frac{\partial}{\partial\tau} q_0(\sigma, t-\tau)d\sigma d\tau; \tag{20}$$

$$P_{20}^1(x,t) = -\int\limits_0^t \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \left(e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}} - 1\right) \frac{\partial}{\partial\tau} q_0(\sigma, t-\tau)d\sigma d\tau. \tag{21}$$

Из неравенства $|e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}} - 1| \leqslant x_1^2(4\tau)^{-1}$ для интеграла P_{20}^1 вытекает оценка

$$|P_{20}^1| \leqslant c\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\| \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \int\limits_0^t \frac{x_1^2}{\tau} \cdot \left(\frac{\tau^{1/3}}{(\sigma - x_2)^{2/3}} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\right) \cdot \frac{(\sigma - x_2)^{2/3}}{\tau^{1/3}} d\tau d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^t \left(\frac{(\sigma - x_2)^{2/3}}{\tau^{1/3}} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\right) \cdot \frac{x_1^2}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \cdot \frac{1}{(\sigma - x_2)^{2/3}} \cdot \frac{1}{\tau^{2/3}} d\sigma d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int\limits_{-1}^1 x_1^{\varepsilon} \frac{x_1^{2-\varepsilon}}{((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^{1-\varepsilon/2}} \frac{1}{((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^{\varepsilon/2}} \frac{1}{(\sigma - x_2)^{2/3}} \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^{2/3}} d\tau d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_3 x_1^{\varepsilon} \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma - x_2)^{\varepsilon + 2/3}} \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^{\frac{2}{3}}} d\tau d\sigma \leqslant c_4 x_1^{\varepsilon} t^{\frac{1}{3}}. \tag{22}$$

В (22) $0 < \varepsilon < 1/3$. Из оценки (22) по теореме Лебега следует, что исследуемый интеграл непрерывен и ограничен по внешним переменным.

Введём обозначения $P_{20}^0 = P_{20}^{00} + P_{20}^{01}$,

$$\begin{aligned} P_{20}^{00} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \int\limits_0^t \frac{\partial q_0(\sigma, t-\tau)}{\partial\tau} d\tau d\sigma; \\ P_{20}^{01} &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \int\limits_0^t \frac{\partial q_0(\sigma, t-\tau)}{\partial\tau} \left(e^{\frac{-(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} - 1\right) d\tau d\sigma. \end{aligned} \tag{23}$$

Оценим разность

$$|P_{20}^{01}(p, x_2, t) - P_{20}^{01}(q, x_2, t)| \leqslant$$

$$\leqslant |-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + p^2} - \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + q^2}\right) \int\limits_0^t \frac{\partial q_0(\sigma, t-\tau)}{\partial\tau} \left(e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} - 1\right) d\tau d\sigma|.$$

Обозначим $f(z) = \frac{1}{(\sigma - x_2)^2 + z^2}$, тогда $f'(z) = \frac{-2z}{((\sigma - x_2)^2 + z^2)^2}$.

По теореме Лагранжа [12] выполнено равенство

$$f(p) - f(q) = -\frac{2z_{cp}}{(\sigma - x_2)^2 + z_{cp}^2}(p - q),\ 0 \leqslant p \leqslant z_{cp} \leqslant q.$$

Тогда выполнено неравенство

$$|P_{20}^{01}(p, x_2, t) - P_{20}^{01}(p, x_2, t)| \leqslant$$

$$\leqslant \ |-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}[f(p)-f(q)]\int\limits_{0}^{t}\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}[e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}-1]d\tau d\sigma| \ \leqslant$$

$$\leqslant c\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\int\limits_{-1}^{1}\frac{|z_{cp}||p-q|}{[(\sigma-x_2)^2+z_{cp}^2]^2}\int\limits_{0}^{t}\left(\frac{|\sigma-x_2|^{1,8}}{(4\tau)^{0,9}}\right)d\tau d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \ c'\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|t^{0,1}|p-q|\int\limits_{-1}^{1}\frac{|\sigma-x_2|^{1,8}}{[(\sigma-x_2)^2+z_{cp}^2]^{1,5}}d\sigma \leqslant \ c't^{0,1}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\||p-q|\int\limits_{-1}^{1}|\sigma-x_2|^{0,3}d\sigma\to 0$$

при $p,q\to 0$. Поэтому выполнено условие $P_{20}^{01}(+0,x_2,t)-P_{20}^{01}(-0,x_2,t)=0$.

Вычислим внутренний интеграл в представлении (23), и получим представление функции P_{20}^{00}: $P_{20}^{00} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma,t)}{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}d\sigma$. Таким образом, выражение $P_2(x,t)$ представимо в виде $P_2(x,t) = P_{20}^{00}+J$, где для функции $J = P_{21}+P_{20}^{1}+P_{20}^{01}$ выполнено равенство $J(+0,x_2,t)-J(-0,x_2,t) = 0$. Так как функция P_{20}^{00} четна по переменной x_1, то и для нее справедливо равенство $P_{20}^{00}(+0,x_2,t)-P_{20}^{00}(-0,x_2,t)=0$. Следовательно,

$$P_2(+0,x_2,t)-P_2(-0,x_2,t)=0; \quad t\geqslant \ 0, \ x_2\in(-1;\ 1). \tag{24}$$

Отметим, что условие 1 позволяет записать функцию q_0 в виде

$$q_0(\sigma,t)=$$

$$=q_0(x_2,t)+\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2}(\sigma-x_2)+s(x_2,\sigma,t)(\sigma-x_2)^2,\text{ где } s(x_2,x_2,t) \ = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_0(x_2,t)}{\partial x_2^2}.$$

Тогда

$$P_2=-\frac{arctg\frac{1-x_2}{|x_1|}+arctg\frac{1+x_2}{|x_1|}}{2\pi\,|x_1|}q_0(x_2,t)-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(1-x_2)^2+x_1^2}{(1+x_2)^2+x_1^2}\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2}+S(x,t), \tag{25}$$

причем функция $S(x,t)$ непрерывна и $|S(x,t)| \ \leqslant \ c\left\|\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2}\right\|$.

Перейдем к изучению интеграла $P_3=P_{30}(x,t)+P_{31}(x,t)$, где

$$P_{30}(x,t)=-\int\limits_{0}^{t}\frac{x_1^2}{16\pi\tau^3}\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{x_1^2}{4\tau}}q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau; \tag{26}$$

$$P_{31}(x,t)=-\int\limits_{0}^{t}\frac{x_1^2}{16\pi\tau^3}\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}}\left(e^{-\frac{k^2\tau}{4}}-1\right)q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau. \tag{27}$$

Так как $e^{-\frac{k^2\tau}{4}}-1 \ \leqslant \ c_1\tau$; $e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}x_1^2\tau^{-1} \ \leqslant \ c_2$; $e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}(\sigma-x_2)^{2/3}\tau^{1/3} \ \leqslant \ c_3$, получим, что для интеграла P_{31} справедлива оценка $|P_{31}| \ \leqslant \ c_4t^{1/3}\,\|q_0\|$, поэтому оцениваемый интеграл непрерывен по совокупности переменных, откуда следует равенство

$$P_{31}(+0,x_2,t)-P_{31}(-0,x_2,t)=0; t\geqslant \ 0, \ x_2\in(-1;\ 1). \tag{28}$$

Проведем в интеграле P_{30} интегрирование по частям, с учётом равенства нулю внеинтегральных членов, интеграл примет вид $P_{30} = P_{30}^1 + P_{30}^2 + P_{30}^3$, где
$P_{30}^1 = -\int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1^2}{\pi} \frac{1}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^2} \frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau} d\sigma d\tau = \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1^2}{\pi} \frac{1}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^2} q_0(\sigma,t) d\sigma$;

$P_{30}^2 = \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1^2}{\pi} \left(\frac{1}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^2}\right)\left(1 - e^{\frac{-((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}}\right) \frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau} d\sigma d\tau$;

$P_{30}^3 = -\int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1^2}{4\pi} \left(\frac{1}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)\tau}\right) e^{\frac{-((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}} \frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau} d\sigma d\tau$.

Из разложения функции q_0, примененного в представлении (25), получим

$$P_{30}^1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2+x_1^2} + \frac{1+x_2}{(1+x_2)^2+x_1^2} + \frac{1}{|x_1|}\left(arctg\frac{1-x_2}{|x_1|} + arctg\frac{1+x_2}{|x_1|}\right)\right) q_0(x_2,t) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{2x_1^2x_2}{((1-x_2)^2+x_1^2)((1+x_2)^2+x_1^2)}\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2} + R_1(x,t), \tag{29}$$

где $R_1(x,t)$ — непрерывная функция с оценкой $|R_1(x,t)| \leqslant c\left\|\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2}\right\|$. Отметим, что функция P_{30}^1 четна по x_1, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0} P_{30}^1(\varepsilon,x_2,t) - P_{30}^1(-\varepsilon,x_2,t) = 0. \tag{30}$$

Перейдем к оценке функции P_{30}^2. Так как $0 \leqslant 1 - e^{\frac{-((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}} \leqslant 1$, то при любом $\varepsilon \in (0,1)$ имеет место оценка $1 - e^{\frac{-((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}} \leqslant \left(\frac{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}\int\limits_0^1 e^{\frac{-((\sigma-x_2)^2+x_1^2)z}{4\tau}} dz\right)^\varepsilon \leqslant \left(\frac{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}\right)^\varepsilon$, поэтому

$$\left|P_{30}^2\right| \leqslant c\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\| \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^\varepsilon} d\tau \int\limits_{-1}^1 \frac{d\sigma}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^{1-\varepsilon}} \leqslant c_1 t^{1-\varepsilon}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|.$$

Поэтому функция P_{30}^2 непрерывна по совокупности переменных. Так как

$$\left(\frac{x_1^2}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)\tau}\right) e^{\frac{-((\sigma-x_2)^2+x_1^2)}{4\tau}} = \left(\frac{|x_1|^{1/2}}{\tau^{1/4}} e^{\frac{-x_1^2}{4\tau}}\right)\left(\frac{|x_1|^{3/2}}{((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^{3/4}}\right).$$

$$\frac{1}{\tau^{3/4}((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^{1/4}} e^{\frac{-(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \leqslant c\frac{1}{\tau^{3/4}((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^{1/4}} \leqslant c\frac{1}{\tau^{3/4}|\sigma-x_2|^{1/2}},$$

то для функции P_{30}^3 имеет место оценка

$$\left|P_{30}^3\right| \leqslant c\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\| \int\limits_0^t \tau^{-3/4} d\tau \int\limits_{-1}^1 (\sigma-x_2)^{-1/2} d\sigma = c_1\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\| t^{1/4}\left((|1-x_2|^{1/2} + |1+x_2|^{1/2}\right).$$

Поэтому функция P_{30}^2 непрерывна по совокупности переменных, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0} P_{30}(\varepsilon,x_2,t) - P_{30}(-\varepsilon,x_2,t) = 0; \quad t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1). \tag{31}$$

Из (26)–(31) вытекает равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0} P_3(\varepsilon,x_2,t) - P_3(-\varepsilon,x_2,t) = 0; \quad t \geqslant 0,\ x_2 \in (-1;\ 1). \tag{32}$$

Нами доказано

Утверждение 2. При выполнении условия 1 верно равенство (32).

Из утверждений 1 и 2 вытекает утверждение теоремы 1.

Осталось лишь показать выполнение начального условия. Сделав в представлении функции $u_1(x,t)$ замену $\frac{\sigma-x_2}{2\sqrt{\tau}}=\eta$, $d\sigma=2\sqrt{\tau}d\eta$, получим оценку $|u_1(x,t)|\leqslant c\,\|q_1\|\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau=2c\sqrt{t}\to 0$ при $t\to 0$.

В интеграле $u_0(x,t)=\int\limits_0^t\frac{x_1}{8\pi\tau^2}\int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}}q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau$ проведем интегрирование по частям, получим

$$u_0(x,t)=\int\limits_{-1}^1\frac{x_1}{8\pi}\int\limits_0^t\frac{e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{x_1^2}{4\tau}}}{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}\Big(\frac{k^2}{4}e^{-\frac{k^2}{4}\tau}q_0(\sigma,t-\tau)+e^{-\frac{k^2}{4}\tau}\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}\Big)d\tau d\sigma.$$

Из выписанного представления и ограниченности функций $q_0(\sigma,t-\tau)$ и $\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}$ следует, что $\lim\limits_{t\to 0}u_0(x,t)=0$. Начальное условие выполнено.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЯ

Доказательство теоремы 2. Ограниченность $u(x,t)$ доказана в теореме 1.

Изучим $\frac{\partial u}{\partial x_1}$. Справедливо представление

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=P_1(x,t)+P_2(x,t)+P_3(x,t). \tag{33}$$

Первое слагаемое в правой части (33) совпадает с $u_0(x,t)$ с точностью до замены функции $q_1(\sigma,t-\tau)$ на $q_0(\sigma,t-\tau)$. Следовательно, для него справедливы все утверждения, доказанные для $u_0(x,t)$. Таким образом осталось изучить функции P_2 и P_3.

Для P_2 в теореме 1 уже построено асимптотическое разложение по расстоянию до границы. Для нее имеет место разложение (25). Асимптотика вблизи границы для функции P_3, как показано в теореме 1, совпадает с асимптотическим разложением P_{30}^1 . Поэтому из (29) имеем

$$P_3=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2+x_1^2}+\frac{1+x_2}{(1+x_2)^2+x_1^2}+\frac{1}{|x_1|}\left(arctg\frac{1-x_2}{|x_1|}+arctg\frac{1+x_2}{|x_1|}\right)\right)q_0(x_2,t)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\frac{2x_1^2x_2}{((1-x_2)^2+x_1^2)((1+x_2)^2+x_1^2)}\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2}+R_2(x,t), \tag{34}$$

где $R_2(x,t)$ — непрерывная функция с оценкой $|R_2(x,t)|\ \leqslant\ c\left\|\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2}\right\|$. Из (33), (25), (34) имеем следующие сингулярные члены асимптотического разложения функции $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ по расстоянию до границы

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2+x_1^2}+\frac{1+x_2}{(1+x_2)^2+x_1^2}\right)\frac{q_0(x_2,t)}{2\pi}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4}\ln\frac{(1-x_2)^2+x_1^2}{(1+x_2)^2+x_1^2}+\frac{2x_1^2x_2}{((1-x_2)^2+x_1^2)((1+x_2)^2+x_1^2)}\right)\frac{\partial q_0(x_2,t)}{\partial x_2}+r(x,t), \tag{35}$$

где $r(x,t)$ — ограниченная функция с оценкой $|r(x,t)|\ \leqslant\ c\left\|\frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2}\right\|$.

Вычислим теперь асимптотическое разложение $\frac{\partial u}{\partial x_2}$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\widehat{u}_1+\widehat{u}_2, \tag{36}$$

$$\widehat{u}_1 = \int\limits_0^t \frac{x_1}{16\pi\tau^3} \int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}} (\sigma - x_2) q_0(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau,$$

$$\widehat{u}_2 = -\int\limits_0^t \frac{1}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}-\frac{k^2}{4}\tau-\frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau)(\sigma - x_2) d\sigma d\tau.$$

Рассмотрим $\widehat{u}_2 = u_{20} + u_{21}$, где

$$u_{20} = -\int\limits_0^t \frac{1}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau)(\sigma - x_2) d\sigma d\tau;$$

$$u_{21} = -\int\limits_0^t \frac{1}{8\pi\tau^2} \int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}} (e^{-\frac{k^2}{4}\tau} - 1)(\sigma - x_2) q_1(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau.$$

Так как $\left| e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \frac{(\sigma-x_2)}{\sqrt{\tau}} (e^{-\frac{k^2\tau}{4}} - 1) \frac{1}{\tau^{3/2}} \right| \leqslant c\frac{1}{\tau^{1/2}}$, то справедлива оценка $|u_{21}| \leqslant ct^{1/2} \|q_1\|$, из которой вытекает, что оцениваемый интеграл непрерывен по совокупности переменных.

Проинтегрировав u_{20} по частям с учетом равенства нулю внеинтегральных членов, получим представление $u_{30} = u_{20}^0 + u_{20}^1$, где

$$u_{20}^0 = \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \frac{(\sigma - x_2)}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \frac{\partial q_1(\sigma, t-\tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau;$$

$$u_{20}^1 = \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \left(e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}} - 1 \right) \frac{(\sigma - x_2)}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \frac{\partial q_1(\sigma, t-\tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau.$$

Так как $1 - e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}} \leqslant (1 - e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}})^{1/2} \leqslant c|x_1|\tau^{-1/2}$, имеем оценку интеграла u_{20}^1

$$\left|u_{20}^1\right| \leqslant c \left\| \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \right\| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int\limits_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} \frac{|x_1| \cdot |\sigma - x_2|}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} d\sigma d\tau \leqslant ct^{1/2} \left\| \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \right\|,$$

поэтому оцениваемый интеграл непрерывен по совокупности переменных.

Функцию u_{20}^0 можно представить в виде суммы $u_{20}^0 = u_{20}^{01} + u_{20}^{00}$, где

$$u_{20}^{00} = \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \frac{(\sigma - x_2)}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \frac{\partial q_1(\sigma, t-\tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau;$$

$$u_{20}^{01} = \int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \left(e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{2\tau}} - 1 \right) \frac{(\sigma - x_2)}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} \frac{\partial q_1(\sigma, t-\tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau.$$

Отметим, что $\left|\widehat{u}_{20}^{01}\right| \leqslant c \int\limits_{-1}^1 \frac{(\sigma-x_2)^{7/3}}{(\sigma-x_2)^2+x_1^2} \int\limits_0^t \frac{1}{\tau^{2/3}} d\sigma d\tau$ — ограниченная функция.

Интеграл u_{20}^{00} имеет вид $u_{20}^{00}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(\sigma-x_2)}{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}q_1(\sigma,t)d\sigma$. Поэтому

$$\widehat{u}_2=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(\sigma-x_2)q_1(\sigma,t)d\sigma}{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}+R_4, \tag{37}$$

где через R_4 обозначены все ограниченные слагаемые.

Рассмотрим $\widehat{u}_1$. Введём обозначения $\widehat{u}_1=u_{10}+u_{11}$, где

$$u_{10}=\int\limits_0^t\frac{x_1}{16\pi\tau^3}\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}q_0(\sigma,t-\tau)(\sigma-x_2)d\sigma d\tau;$$
$$u_{11}=\int\limits_0^t\frac{x_1}{16\pi\tau^3}\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}(e^{-\frac{k^2}{4}\tau}-1)(\sigma-x_2)q_0(\sigma,t-\tau)d\sigma d\tau.$$

Оценим интеграл u_{11}.

$$|u_{11}|\leqslant c\left\|q_0\right\|\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{1}\left|\frac{x_1}{\tau^2}(\sigma-x_2)e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2+x_1^2}{4\tau}}\right|d\sigma d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c_1\left\|q_0\right\|\int\limits_0^t\tau^{-5/6}\int\limits_{-1}^{1}|\sigma-x_2|^{4/3}\tau^{-2/3}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}\left|x_1\right|\tau^{-1/2}|\sigma-x_2|^{-1/3}d\sigma d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c_2\left\|q_0\right\|\int\limits_0^t\tau^{-5/6}d\tau\int\limits_{-1}^{1}|\sigma-x_2|^{-1/3}d\sigma\leqslant c_3\left\|q_0\right\|t^{1/6}\left(|1-x_2|^{2/3}+|1+x_2|^{2/3}\right),$$

откуда вытекает, что интеграл u_{11} непрерывен по совокупности переменных.

Проведя в интеграле u_{10} интегрирование по частям, получим $u_{10}=u_{10}^0+u_{10}^1+u_{10}^2+u_{10}^3$, где

$$u_{10}^0=-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{1}\frac{x_1(\sigma-x_2)}{\pi((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^2}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}d\sigma d\tau;$$

$$u_{10}^1=-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{1}\frac{x_1(\sigma-x_2)}{4\pi((\sigma-x_2)^2+x_1^2)\tau}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}d\sigma d\tau;$$

$$u_{10}^2=-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{1}\frac{x_1(\sigma-x_2)}{\pi((\sigma-x_2)^2+x_1^2)^2}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}(e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}-1)\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}d\sigma d\tau;$$

$$u_{10}^3=-\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^{1}\frac{x_1(\sigma-x_2)}{4\pi((\sigma-x_2)^2+x_1^2)\tau}e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}}(e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}-1)\frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial\tau}d\sigma d\tau.$$

Стандартным способом получим оценки трех последних интегралов.

$$\left|u_{10}^1\right|\leqslant\ ct^{1/6}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\left(|1-x_2|^{1/3}+|1+x_2|^{1/3}\right);\quad\left|u_{10}^2\right|\ \leqslant\ ct^{1/3}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\left(|1-x_2|^{1/3}+|1+x_2|^{1/3}\right);$$

$$\left|u_{10}^3\right|\leqslant\ ct^{1/6}\left\|\frac{\partial q_0}{\partial t}\right\|\left(|1-x_2|^{1/3}+|1+x_2|^{1/3}\right).$$

Из последних оценок вытекает, что оцениваемые интегралы непрерывны по совокупности переменных.

Рассмотрим u_{10}^0. Функцию можно записать в виде $u_{10}^0 = u_{10}^{00} + u_{10}^{01}$, где

$$u_{10}^{00} = -\int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1(\sigma - x_2)}{\pi((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^2} \frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau;$$

$$u_{10}^{01} = -\int\limits_0^t \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1(\sigma - x_2)}{\pi((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^2} (e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau}} - 1) \frac{\partial q_0(\sigma,t-\tau)}{\partial \tau} d\sigma d\tau.$$

Для интеграла u_{10}^{01} выполнена оценка $\left|u_{10}^{01}\right| \leqslant ct^{1/3} \left\| \frac{\partial q_0}{\partial t} \right\| \left(|1 - x_2|^{1/3} + |1 + x_2|^{1/3} \right)$, из которой вытекает, что интеграл непрерывен по совокупности переменных. Вычисляя в представлении u_{10}^{00} интеграл по τ, получим $u_{10}^{00} = \pi^{-1} \int_{-1}^1 x_1(\sigma - x_2)((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^{-2} q_0(\sigma,t) d\sigma d\tau$. Таким образом,

$$\widehat{u}_1 = \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1(\sigma - x_2)}{\pi((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^2} q_0(\sigma,t) d\sigma d\tau + R_5, \tag{38}$$

где через R_5 обозначены все ограниченные слагаемые. Из (36)-(38) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^1 \frac{\sigma - x_2}{(\sigma - x_2)^2 + x_1^2} q_1(\sigma,t) d\sigma + \int\limits_{-1}^1 \frac{x_1(\sigma - x_2)}{\pi((\sigma - x_2)^2 + x_1^2)^2} q_0(\sigma,t) d\sigma + R_6,$$

где через R_6 обозначены все ограниченные слагаемые.

Воспользуемся разложениями функций $q_k(\sigma,t) = q_k(x_2,t) + (\sigma - x_2)g(\sigma,x_2,t)$, где, согласно условию 1, $g(\sigma,x_2,t)-$ непрерывная, ограниченная функция. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_1}{(x_2+1)^2 + x_1^2} - \frac{x_1}{(x_2-1)^2 + x_1^2} \right) q_0(x_2,t) - \frac{1}{4\pi} \left(\ln(\frac{(x_2+1)^2 + x_2^2}{(x_2-1)^2 + x_1^2} \right) q_1(x_2,t) + \widetilde{r}.$$

Здесь $\widetilde{r}$ — ограниченные на любом компакте функции. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen, Y. F. The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate / Y. F. Chen, F. Erdogan // J. Mech. Phys. Solids. — 1996. — V. 44. — P. 771–787.

2. Glushko, A. V. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19^{th} European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety”: Book of Abstracts, 26-31 August. — Kazan, 2012. — P. 269.

3. Логинова, Е. А. Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 157–161.

4. Логинова, Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. — 2012. — Вып. 1. — С. 40–47.

5. Глушко, А. В. Стационарное распределение тепла в полуплоскости с ортогональной к границе трещиной / А. В. Глушко, Е. О. Мальцева, А. С. Рябенко // Материалы Современные

методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы “Понтрягинские чтения–XXV”. — Воронеж, 2014. — С. 42.

6. Глушко, А. В. Стационарное распределение тепла в полупространстве с трещиной, перпендикулярной границе полупространства / А. В. Глушко, Е. О. Мальцева, А. С. Рябенко // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУММ–2014). Сборник трудов VII Международной научной конференции. — Воронеж, 2014. — С. 93–95.

7. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.

8. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2003. — 704 с.

REFERENCES

1. Chen Y.F., Erdogan F. The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate. J. Mech. Phys. Solids, 1996, vol. 44, pp. 771–787.

2. Glushko A.V., Ryabenko A.S. Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips. 19^{th} European Conference on Fracture “Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety”: Book of Abstracts, 26-31 August, Kazan, 2012, p. 269.

3. Loginova E.A. Asymptotic behavior of the heat flux for the problem of the stationary distribution of heat in an inhomogeneous plane with a crack. [Loginova E.A. Asimptoticheskoe povedenie teplovogo potoka dlya sadachi o stasionarnom raspredelenii tepla v ploskosti s treshchinoy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 157–161.

4. Loginova E.A. Construction of a solution to the problem of heat distribution in an inhomogeneous material with a crack. [Loginova E.A. Postroenie reshenia zadachy o raspredelenii tepla v ploskosty c treshchinoy]. *Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия — Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics, mechanika, astronomya*, 2012, vol. 1, pp. 40–47.

5. Glushko A.V., Maltseva E.O., Ryabenko A.S. Stationary heat distribution in the half-plane with orthogonal to the boundary crack. [Glushko A.V., Maltseva E.O., Ryabenko A.S. Stasionarnoe raspredelenye tepla v poluploskosti s ortogonalnoi k granitse treshchinoy]. Sovremennie metody teoryi kraevih zadach: materialy voronezhskoy vesenney matematicheskoy shkoly “Pontryagenskie chtenya – XXV”. Voronezh. IPZ “Nauchnaya kniga”, 2014, p. 42.

6. Glushko A.V., Maltseva E.O., Ryabenko A.S. Stationary heat distribution in the half-space with a crack perpendicular to the half-space boundary. [Glushko A.V., Maltseva E.O., Ryabenko A.S. Stasionarnoe raspredelenye tepla v poluprostranstve s treshchinoy, perpendikuliarnoy granitse poluprostranstva]. Sovremennie problemy prikladnoy matematiki, teorii upravlenya i komputernykh nauk (PTUMM – 2014). Sbornik trudov VII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferenzii. Voronezh, 2014, pp. 93–95.

7. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki]. Moskow: Nauka, 1981, 512 p.

8. Kudriavzev L.D. Mathematical Analysis Course. [Kudriavzev L.D. Kurs matematicheskogo analisa]. Moskow: Drofa, 2003, 704 p.

Глушко А. В., доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Glushko A. V., doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Логинова Е. А., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: loginova@vsu.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Loginova E. A., PhD of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, assistant professor of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: loginova@vsu.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Лесных А. А., магистрант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: alina.lesnyh1996@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Lesnyh A. A., undergraduate student of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: alina.lesnyh1996@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–18