УДК 517.51

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА ЛАГРАНЖА ПО КОРНЯМ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

А. Г. Баламирзоев[1,2], С. А. Агаханов[1], Г. С. Рагимханова[1]

[1] — *ФГБОУ ВО "Дагестанский государственный педагогический университет";*
[2] — *Махачкалинский филиал МАДИ*

Поступила в редакцию 04.04.2019 г.

Аннотация. Если функция имеет разрыв 1-го рода, а члены ряда Фурье является непрерывными функциями, то в точке разрыва по поводу сходимости частных сумм ряда Фурье носит особый характер.

Так как интерполяционный полином Лагранжа по корням полиномов Чебышева ведут в некотором смысле аналогичным образом как ряды Фурье для некоторых классов функций, то естественно изучить явление Гиббса в окрестности точек разрыва 1-го рода.

В данной работе мы доказываем наличие явления Гиббса для интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по корням полиномов Чебышева для функции $f(x) = sign(x - x_0)$ (в любой точке $x \in (-1, 1)$.

Ключевые слова: ряд Фурье, явление Гиббса, полином Лагранжа, полином Чебышева, сумма ряда.

THE GIBBS PHENOMENON FOR POLYNOMIAL INTERPOLATION OF LAGRANGE ON THE ROOTS OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS

A. G. Balamirzoev, S. A. Agakhanov, G. S. Ragimkhanova

Abstract. If the function has a discontinuity of the 1st kind and the terms of the Fourier series are continuous functions, then at the discontinuity point about the convergence of the partial sums of the Fourier series is of a special nature.

Since the Lagrange interpolation polynomial in the roots of Chebyshev polynomials leads in some sense in the same way as the Fourier series for some classes of functions, it is natural to study the Gibbs phenomenon in the vicinity of discontinuity points of the 1st kind.

In this paper we prove the presence of the Gibbs phenomenon for the Lagrange interpolation polynomial constructed from the roots of Chebyshev polynomials for the function $f(x) = sign(x - x_0)$ (at any point $x \in (-1,1)$.

Keywords: Fourier series, Gibbs phenomenon, Lagrange polynomial, Chebyshev polynomial, series sum.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно из анализа, если функциональный ряд из непрерывных функций равномерно сходится на некотором отрезке, то предельная функция является непрерывной функцией на этом же отрезке. В конце XIX века на частном примере тригонометрического ряда Гиббсом (J. W. Gibbs) [1–5] было отмечено явление известное сейчас под названием явление Гиббса. Это явление состоит в следующем. Если взять ряд Фурье функции $f(x)$, определяемой равенствами

$$f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0;$$

$$f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad -\pi < x < 0;$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x < \pi,$$

т. е.

$$\sum_{\nu} \frac{1}{2\nu - 1} \sin(2\nu - 1)x, \tag{1}$$

и обозначим через $S_n(x)$ сумму первых n членов ряда (1), тогда для любого $x \in [-\pi,\pi]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x);$$

однако

$$\overline{\lim_{x\to 0+0, n\to\infty}}\, S_n(x) > \frac{\pi}{2}.$$

Известны теоремы В. И. Крылова о поведении интерполяционных полиномов Лагранжа по корням полиномов Чебышева для функции имеющиеся на отрезке $[-1,1]$ ограниченную вариацию последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа по корням полиномов Чебышева ведут аналогичным образом, как ряды Фурье для непрерывной функции.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $x_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} (\theta_k^{(n)} = \dfrac{2k-1}{2n}\pi, 1 \leqslant k \leqslant \pi)$ нули Чебышева $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$. Обозначим через $L_n(f,x)$ интерполяционный полином Лагранжа по узлам $x_k^{(n)}$ для функции $f(x)$, т. е.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \cdot \frac{T_n(x)}{(x - x_k^{(n)}) \cdot T_n(x_k^{(n)})}.$$

Пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < x_0, \\ 0, & x = x_0, \\ 1, & x_0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

где $x_0 \in (-1,1)$ фиксированная точка.

Наша цель, показать, что $L_n(f_n;x)$ дает явление Гиббса в точке x_0, т.е.

$$\overline{\lim_{\substack{x\to 0+0\\ n\to\infty}}} = \frac{L_n(f_0;x)}{f_0(x)} > 0.$$

Доказательство. Будем различать два случая: 1-й случай $x_0 \in (0,1)$ (случай $-1 < x < 0$ рассматривается аналогично); 2-й случай $x_0 = 0$.

<u>1 случай</u>. Пусть $0 < x_0 < 1$ и $x_0 = \cos\theta_0$. Пока будем считать, что $x_0 \neq x_k^{(n)} (1 \leqslant k \leqslant n)$; $(n = 1,2,3,\ldots)$. Допустим, что $x_{k_0+1}^{(n)} < x_0 < x_{k_0}^{(n)}$.

Положим $\overline{x_n} = \cos\overline{\theta_n}$, где $\overline{\theta_n} = \dfrac{\theta_{k_0-1}^{(n)} + \theta_{k_0}^{(n)}}{2}$.

Тогда

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = T_n(\overline{x_n}) \left\{ \sum_1^{k_0} \frac{1}{\left(\overline{x_n} - x_k^{(n)}\right) T_n'\left(x_k^{(n)}\right)} - \sum_{k_0+1}^{n} \frac{1}{\left(\overline{x_n} - x_k^{(n)}\right) T_n'\left(x_k^{(n)}\right)} \right\}$$

Так как

$$T_n'\left(x_k^{(n)}\right) = n \cdot \frac{\sin\left(n \cdot \arccos x_k^{(n)}\right)}{\sqrt{1 - x_k^{(n)^2}}} = n \cdot \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{\sin \theta_k^{(n)}} = n \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \theta_k^{(n)}},$$

то

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = \frac{\cos n\overline{\theta_n}}{n} \left\{ \sum_1^{k_0} \frac{(-1)^{k+1} \sin \theta_k^{(n)}}{\cos \overline{\theta_n} - \cos \theta_k^{(n)}} - \sum_{k_0+1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{\cos \overline{\theta_n} - \cos \theta_k^{(n)}} \right\}.$$

Положим для краткости

$$A_k^{(n)} = \frac{\sin \theta_k^{(n)}}{\cos \overline{\theta_n} - \cos \theta_k^{(n)}}$$

и будем считать, что для определенности $k_0 = 2 \cdot N$ четным числом. Тогда будем иметь

$$L_n(f_0,\overline{x}_n) = \frac{\cos n\overline{\theta}_n}{n} \left\{ \sum_1^{2N} (-1)^{k+1} A_k^{(n)} - \sum_{2N+1}^{n} (-1)^{k+1} A_k^{(n)} \right\} =$$

$$= \frac{\cos n\overline{\theta}_n}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{N} (A_{2k-1}^{(n)} - A_{2k}^{n}) + \sum_{k_0+1}^{n} (A_{2k}^{(n)} - A_{2k-1}^{(n)}) - A_n^{(n)} \right\},$$

где $m = [\frac{n}{2}]$ и при n четном в последней строке слагаемое $A_n^{(n)}$ надо опустить. Так как

$$\overline{\theta}_n = \frac{\theta_{k_0-1}^{(n)} + \theta_{k_0}^{(n)}}{2} = \frac{k_0 - 1}{n} \pi,$$

то $\cos n\overline{\theta}_n = (-1)^{k_0-1} = -1$ поскольку k_0 — четное число.

С другой стороны

$$A_{2k-1} - A_{2k} = \frac{\sin \theta_{2k-1}^{(n)}}{\cos \overline{\theta}_n - \cos \theta_{2k-1}^{(n)}} - \frac{\sin \theta_{2k}^{(n)}}{\cos \overline{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)}} =$$

$$= \frac{\left(\sin \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k}^{(n)}\right) \cos \overline{\theta}_n + \left(\sin \theta_{2k}^{(n)} \cos \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k-1}^{(n)} \cos \theta_{2k}^{(n)}\right)}{\left(\cos \overline{\theta}_n - \cos \theta_{2k-1}^{(n)}\right)\left(\cos \overline{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sin \theta_{2k-1}^{(n)} - \sin \theta_{2k}^{(n)}\right) \cos \overline{\theta}_n + \sin \frac{\pi}{n}}{\left(\cos \overline{\theta}_n - \cos \theta_{2k-1}^{(n)}\right)\left(\cos \overline{\theta}_n - \cos \theta_{2k}^{(n)}\right)} = \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}$$

Поэтому

$$L_n(f_0,\overline{x}_n) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_1^{N} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^{m} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} \right\}.$$

Далее имеем

$$J_k^{(1)} = 2 \cos \frac{\theta_{2k-1}^{(n)} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{m}\right) \cos \overline{\theta}_n + \sin \frac{\pi}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $O(1)$ — абсолютная величина постоянная (вообще всюду) в дальнейшем $O(1)$ либо абсолютная постоянная, либо зависит только от x_0.

Поэтому, положив $\nu = [\frac{n}{4}]$ получим

$$\sum_{v+1}^{m} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} = O(n^{-1}) \left\{ \sum_{v+1}^{m} \frac{1}{|J_k^{(2)}|} + |A_n^{(n)}| \right\}.$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что для всех $v+1 \leqslant k \leqslant m$ (равномерно) $J_k^{(2)} = (\overline{x_n} - x_{2k}^{(n)})(\overline{x_n} - x_{2k-1}^{(n)}) \geqslant \overline{x_n^2} \geqslant x_0^2$ (поскольку $x_{2k}^{(n)} \leqslant 0, x_{2k-1}^{(n)} \leqslant 0$) и, кроме того, $A_n^{(n)} = O(1)$ получим

$$\sum_{v+1}^{m} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - A_n^{(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right) \{(m-v)+1\} = O(1).$$

Поэтому

$$L_n(f_0, \overline{x_n}) = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{1}^{N} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} - \sum_{N+1}^{v} \frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \right\}$$

Применение формулы Тейлора к разности $\sin\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k}^{(n)}$ дает для $J_k^{(1)}$

$$J_k^{(1)} = \sin\frac{\pi}{n} + \cos\overline{\theta_n}\left(\cos\theta_{2k}^{(n)}\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \theta_{2k}^{(n)}\right) + O\left(\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \theta_{2k}^{(n)}\right)^2\right)\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{\pi}{n}\cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Но

$$1 - \cos\overline{\theta_n}\cos\theta_{2k}^{(n)} = 1 - \cos^2\overline{\theta_n} + \cos\overline{\theta_n}\left(\cos\overline{\theta_n} - \cos\theta_{2k}^{(n)}\right) =$$

$$= \sin^2\overline{\theta_n} + 2\cos\overline{\theta_n}\cdot\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2}\sin\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} = \sin^2\overline{\theta_n} + O\left(|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}|\right).$$

Поэтому

$$J_k^{(1)} = \frac{\pi}{2}\sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\frac{|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}|}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n}\sin^2\overline{\theta_n} + O\left(\frac{|\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}|}{n}\right)$$

Так как $\frac{2\pi}{n}|t| < |\sin t| < |t|$ для $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$, то для этих же t будет $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = O(|t|)$, поэтому

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = \left\{4\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2}\sin\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2}\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{2\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2}\right\}^{-1} = O\left(\left|\frac{\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}}{\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}}\right|\right).$$

Здесь мы воспользовались еще тем, что

$$\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2} \geqslant \sin^2\frac{\overline{\theta_n}}{2} \text{ для } 1 \leqslant k \leqslant v. \tag{1}$$

Применение еще раз аналогичного рассуждения дает

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1} = \left\{\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n} + \theta_{2k}^{(n)}}{2}\right\}^{-1} +$$

$$+O\left\{\left(\left|\frac{\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}}{\theta_{2k-1}^{(n)}-\overline{\theta_n}}\right|\right)+\left(\left|\frac{\theta_{2k-1}^{(n)}-\overline{\theta_n}}{\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}}\right|\right)\right\}.$$

Заметим, наконец, что

$$\sin\frac{\overline{\theta_n}+\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\overline{\theta_n}+\theta_{2k}^{(n)}}{2}=\sin^2\frac{\overline{\theta_n}+\theta_{2k}^{(n)}}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\overline{\theta_n}+\theta_{2k}^{(n)}\right)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1-\cos 2\overline{\theta_n}+\left(\cos 2\overline{\theta_n}-\cos\left(\overline{\theta_n}+\theta_{2k}^{(n)}\right)\right)\right\}+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\sin^2\overline{\theta_n}+O\left(\left|\overline{\theta_n}-\theta_{2k}^{(n)}\right|+\frac{1}{n}\right)=\sin^2\overline{\theta_n}+O\left(\left|\overline{\theta_n}-\theta_{2k}^{(n)}\right|\right).$$

Отсюда, с учетом выражения (1), следует

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1}=\left\{\left(\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}\right)\left(\theta_{2k-1}^{(n)}-\overline{\theta_n}\right)\sin^2\overline{\theta_n}\right\}^{-1}+$$
$$+O\left\{\left|\frac{\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}}{\theta_{2k-1}^{(n)}-\overline{\theta_n}}\right|+\left|\frac{\theta_{2k-1}^{(n)}-\overline{\theta_n}}{\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}}\right|+\frac{1}{|\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}|}\right\}.$$

Так как

$$\frac{1}{2}<\left|\frac{\theta_{2k-1}^{(n)}-\overline{\theta_n}}{\theta_{2k}^{(n)}-\overline{\theta_n}}\right|=\left|\frac{4k-2k_0-1}{4k-2k_0+1}\right|<2 \text{ для } 1\leqslant k\leqslant v,$$

то

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1}=\frac{4n^2}{\pi^2(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)\sin^2\overline{\theta_n}}+O\left(\frac{n}{|4k-2k_0-1|}\right). \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\left\{J_k^{(2)}\right\}^{-1}=O\left(\frac{n^2}{|4k-2k_0-1|}\right).$$

Поэтому вклад остаточного члена для $J_k^{(1)}$ дает для разности

$$\sum_1^N\frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}-\sum_{N+1}^v\frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}$$

величину порядка

$$O(1)\sum_1^v\frac{n^2}{(4k-2k_0-1)^2}\cdot\frac{(4k-2k_0-1)}{n^2}=O(\ln n).$$

Итак, окончательно, имеем

$$L_n(f_0,\overline{x_n})=-\frac{1}{n}\left\{\sum_1^N\frac{\pi\sin^2\overline{\theta_n}}{nJ_k^{(2)}}-\sum_{N+1}^v\frac{\pi\sin^2\overline{\theta_n}}{nJ_k^{(2)}}\right\}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Остаточный член в формуле (2) дает для $L_n(f_0,\overline{x_n})$ тоже величину порядка

$$O(1)\sum_1^v\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{|4k-2k_0-1|}=O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Следовательно,

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = -\frac{4n}{n\pi}\left\{\sum_1^N \frac{1}{(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{N+1}^{v} \frac{1}{(4k-2k_0+1)(4k-2k_0-1)}\right\} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left\{-1 + \sum_1^{N-1}\frac{1}{(16k^2-1)} - \sum_{N+1}^{v-N}\frac{1}{(16k^2-1)}\right\} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Так как, в силу неравенств $k_{k_0+1}^{(n)} < \overline{x_n} < x_{k_0}^{(n)}$, $k_0 = \frac{\theta_0}{\pi}n + \lambda$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$v - N = \left[\frac{n}{4}\right] - \frac{1}{2}k_0 = \frac{n}{2} - \lambda_1 - \frac{\theta_0}{2\pi}n - \frac{1}{2}\lambda = \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\pi}\right)\frac{n}{2} - \lambda_1 - \frac{\lambda}{1},$$

где $0 \leqslant \lambda_1 < 1$.

Поскольку $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, то для $n \to \infty$ будет $v - N \to \infty$.

Поэтому

$$\overline{\lim}\, L_n(f_0,\overline{x_n}) = \frac{4}{\pi} > 1,$$

ибо для $N-1 > v-N$ (случай $N-1 \leqslant v-N$ рассматривается аналогично)

$$\sum_1^{N-1}\frac{1}{(4k)^2-1} - \sum_{N+1}^{v-N}\frac{1}{(4k)^2-1} = \sum_{v+1}^{N-1}\frac{1}{(4k)^2-1} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В самом начале работы, мы считали, что $x_0 \neq x_k^{(n)}$ для $(1 \leqslant k \leqslant n)$; $(n = 1,2,\ldots)$. Очевидно, что существует бесконечная последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ такая, что $x_0 \neq x_k^{(n_i)}$ для и $i = 1,2,\ldots$, ибо в противном случае было бы $x_0 = x_k^{(n)}$ при $n \geqslant N$ и некоторых $k = k(n)$, т. е. $\frac{\theta_0}{\pi} = \frac{2k(n)-1}{2n}$, что возможно только при $\frac{\theta_0}{\pi}$ рациональном.

Если же интерполяционный полином Лагранжа дает явление Гиббса во всех иррациональных точках, то из всюду плотности множества иррациональных чисел во множестве действительных чисел следует наличие явления Гиббса и в любом рациональной точке.

2-й случай. Пусть $x_0 = 0$. Тогда положив $x = \cos\theta$, $n = 2m$ (для определенности мы считаем n четным) получим

$$L_n(f_0,x) = \frac{\cos n\theta}{n}\left\{\sum_1^m (-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos\theta_k^{(n)}} - \sum_{m+1}^{2m}(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos\theta_k^{(n)}}\right\}.$$

Введя во второй сумме замену $k = 2m - \widetilde{k} + 1$ и заменив снова $\widetilde{k}$ на k получим

$$L_n(f_0,x) = \frac{\cos n\theta}{n}\left\{\sum_1^m (-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos\theta_k^{(n)}} + \sum_1^{m}(-1)^{k+1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta + \cos\theta_k^{(n)}}\right\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sin\theta_{2m-\widetilde{k}+1}^{(n)} = \sin\theta_{\widetilde{k}}^{(n)}$ и $\cos\theta_{2m-\widetilde{k}+1}^{(n)} = -\cos\theta_{\widetilde{k}}^{(n)}$. Отсюда следует

$$L_n(f_0,x) = \frac{\cos n\theta}{n}\sum_1^m (-1)^{k+1}\frac{2\cos\theta\sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta - \cos^2\theta_k^{(n)}}.$$

Пусть

$$\overline{\theta_n} = \frac{1}{2}\left(\theta_{m-1}^{(n)} + \theta_m^{(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2m-3}{2n}\pi + \frac{2m-1}{2n}\pi\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n-4}{2n}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

и $\overline{x_n} = \cos\overline{\theta_n}$. Тогда

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = \frac{\cos n\overline{\theta_n}}{n}\sum_1^m (-1)^{k+1}\frac{2\cos\overline{\theta_n}\sin\theta_k^{(n)}}{\cos^2\overline{\theta_n} - \cos^2\theta_k^{(n)}} = \frac{2(-1)^m\sin\frac{\pi}{n}}{n}\sum_1^m(-1)^k\frac{2\sin\theta_k^{(n)}}{\sin^2\theta_k^{(n)} - \sin^2\theta_n}.$$

Положим $A_k^{(n)} = \sin^2\theta_k^{(n)} - \sin^2\overline{\theta_n}$. Тогда

$$A_k^{(n)} = \left(\sin\theta_k^{(n)} - \sin\overline{\theta_n}\right)\left(\sin\theta_k^{(n)} + \sin\overline{\theta_n}\right) = 2\cos\frac{\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}}{2}\sin\frac{\theta_k^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2}\times$$

$$\times\, 2\sin\frac{\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}}{2}\cos\frac{\theta_k^{(n)} - \overline{\theta_n}}{2} = \sin\left(\theta_k^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_k^{(n)} - \overline{\theta_n}\right).$$

Поэтому считая (для определенности) $m = 2N$ четным, получим

$$L_n(f_0,\overline{x_n}) = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n} = \sum_1^N\left(\frac{\sin\theta_{2k}^{(n)}}{A_{2k}} - \frac{\sin\theta_{2k-1}^{(n)}}{A_{2k-1}}\right) =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n}\sum_1^N\frac{\sin\theta_{2k}^{(n)}\left(\sin^2\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin^2\overline{\theta_n}\right) - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\left(\sin^2\theta_{2k}^{(n)} - \sin^2\overline{\theta_n}\right)}{A_{2k}A_{2k-1}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n}\sum_1^N\frac{\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)}\left(\sin\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k}^{(n)}\right) + \sin^2\overline{\theta_n}\left(\sin\theta_{2k-1}^{(n)} - \sin\theta_{2k}^{(n)}\right)}{A_{2k}A_{2k-1}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^m}{n}\sum_1^N\frac{\left(\sin\theta_{2k}^{(n)} - \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right) - \left(\sin^2\overline{\theta_n} + \sin\theta_{2k}^{(n)}\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right)}{\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} - \overline{\theta_n}\right)}.$$

Обозначим k–ое слагаемое в последней сумме через $\frac{J_k^{(1)}}{J_k^{(2)}}$. Так как

$$\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\right) = \sin\frac{n-4k+4}{2n}\pi \sim \frac{n-4k+4}{2n}, \tag{3}$$

то

$$J_k^{(1)} = \cos\frac{\theta_{2k}^{(n)} + \theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin^2\overline{\theta_n} + \sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)}\right) \sim \frac{n-4k+4}{2n}. \tag{4}$$

Далее из равенства

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + O(|x|) \text{ для } |x| \leqslant C < \pi$$

следует

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)} = \frac{1}{\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}} = O\left(\left|\theta_{2k}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right|\right), \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right)} = \frac{1}{\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}} = O\left(\left|\theta_{2k-1}^{(n)} + \overline{\theta_n}\right|\right). \tag{6}$$

По той же причине из равенства

$$\sin\left(\theta_{2k}^{(n)}+\overline{\theta_n}\right)=\sin\frac{n-4k+3}{2n}\pi n\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)}+\overline{\theta_n}\right)=\sin\frac{n-4k+5}{2n}\pi$$

следует из равенств

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k}^{(n)}+\overline{\theta_n}\right)}=\frac{2n}{\pi(n-4k+3)}+O\left(\frac{n-4k+3}{n}\right), \tag{7}$$

$$\frac{1}{\sin\left(\theta_{2k-1}^{(n)}+\overline{\theta_n}\right)}=\frac{2n}{\pi(n-4k+3)}+O\left(\frac{n-4k+5}{n}\right). \tag{8}$$

Если теперь в выражении для $L_n(f_0,\overline{x_n})$ воспользуемся оценкой (4) и оценками (5)–(8), то вклад остаточных членов будет

$$O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_1^N\frac{n-4k+1}{n^2}\cdot\left(\frac{n}{n-4k+1}\right)^3\cdot\frac{n-4k+1}{n}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_1^N\frac{1}{n-4k+1}=O\left(\frac{\ln}{n^2}\right).$$

Поэтому

$$L_n(f_0,\overline{x_n})=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}(-1)^{m+1}}{n}\times$$
$$\times\sum_1^N\frac{16n^4J_k^{(1)}}{\pi^4(n-4k-1)(n-4k+1)(n-4k+3)(n-4k+5)}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Далее

$$J_k^{(1)}=\left(2-\left(1-\sin^2\overline{\theta_n}\right)-\left(1-\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)}\right)\right)\left(\sin\theta_{2k}^{(n)}-\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right).$$

Так как[1)]

$$1-\sin^2\overline{\theta_n}=\cos^2\overline{\theta_n}=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\overline{\theta_n}\right)\sim\frac{1}{n^2},$$

$$1-\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\sin\theta_{2k}^{(n)}=\left(1-\sin\theta_{2k}^{(n)}\right)+\sin\theta_{2k}^{(n)}\left(1-\sin\theta_{2k-1}^{(n)}\right)=$$
$$=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{2k}^{(n)}\right)+\sin\theta_{2k}^{(n)}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{2k}^{(n)}\right)\right)=$$
$$=2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-\theta_{2k}^{(n)}}{2}+2\sin\theta_{2k}^{(n)}\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}=O\left(\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{2k}^{(n)}\right)^2\right)=O\left(\frac{(n-4k+1)^2}{n^2}\right),$$

$$\sin\theta_{2k}^{(n)}-\sin\theta_{2k-1}^{(n)}=2\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)}+\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\sin\frac{\pi}{2n}=2\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)}+\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

то

$$J_k^{(1)}=\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)}+\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}+O\left(\frac{1}{n^3}+\frac{(n-4k+1)^2}{n^3}\right)=$$
$$=\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)}+\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}+O\left(\frac{(n-4k+1)^2}{n^3}\right).$$

[1)] Для двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ запись означает, что $0<C_1<\frac{a_n}{b_n}<C_2<\infty$, где c_1, c_2 — постоянные числа.

Если заметить еще, что

$$\cos\frac{\theta_{2k}^{(n)}+\theta_{2k-1}^{(n)}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8k-4}{4n}\pi\right)=\sin\frac{n-4k+1}{n}\pi=$$
$$=\frac{n-4k+2}{2n}\pi+O\left(\left(\frac{n-4k+2}{n}\right)^3\right),$$

то окончательно получим

$$J_k^{(1)}=\frac{\pi^2}{n^2}(n-4k+2)+O\left(\frac{(n-4k+1)^2}{n^3}\right).$$

Поэтому с учетом четности m имеем

$$L_n(f_0,\overline{x_n})=-\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\cdot\frac{16n^4}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^2}{n^2}\times$$
$$=\sum_1^N\frac{n-4k+2}{(n-4k+1)(n-4k-1)(n-4k+3)(n-4k+5)}+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=-\frac{32}{\pi}\sum_1^N\frac{n-4k+2}{(n-4k+1)(n-4k-1)(n-4k+3)(n-4k+5)}+O\left(\frac{1}{n}\right)=$$
$$=-\frac{32}{\pi}\left\{-\frac{2}{15}+\sum_1^N\frac{n-4k+2}{(n-4k+1)(n-4k-1)(n-4k+3)(n-4k+5)}\right\}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положив $N-k=\overline{k}$ и заменив снова $\overline{k}$ на k получим

$$L_n(f_0,\overline{x_n})=\frac{32}{\pi}\left\{\frac{2}{15}-\frac{1}{64}\sum_1^{N-1}\frac{k+\frac{1}{2}}{\left(k^2-\frac{1}{16}\right)\left(k+\frac{3}{4}\right)\left(k+\frac{5}{4}\right)}\right\}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Так как

$$\sum_1^{N-1}\frac{k+\frac{1}{2}}{\left(k^2-\frac{1}{16}\right)\left(k+\frac{3}{4}\right)\left(k+\frac{5}{4}\right)}\leqslant\sum_1^{N-1}\frac{1}{k\left(k^2-\frac{1}{16}\right)}<2\sum_1^{N-1}\frac{1}{k^3}=\sum_1^{\infty}\frac{1}{k^3}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}L_n(f_0,\overline{x_n})>1,$$

значит $L_n(f_0,\overline{x_n})$ в окрестности точки x_0 даем явление Гиббса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Наука, 2003. — 662 с.

2. Агаханов, С. А. Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования рядов Фурье / С. А. Агаханов, Г. И. Натансон // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 162, № 6. — С. 1215–1218.

3. Агаханов, С. А. Явление Гиббса при некоторых процессах суммирования обобщенных рядов Фурье / С. А. Агаханов // Сб. статей, вып. 1, Функциональный анализ, теория функций и их приложения. — 1974.

4. Агаханов, С. А. Явление Гиббса в теории тригонометрических рядов : дис. . . . к.ф.-м.н. — Ленинград, 1974. — 57 с.

5. Натансон, Г. И. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции / Г. И. Натансон // Сб. статей. — 1961. — С. 206–213.

REFERENCES

1. Fikhtengolts G.M. Course of differential and integral calculus: in 3 volumes. vol. 3. [Fixtengol'cz G.M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya: v 3 t. t. 3]. Moscow: Nauka, 2003, 662 p.

2. Agaxanov S.A., Natanson G.I. Gibbs phenomenon in some processes of summation of Fourier series. [Agaxanov S.A., Natanson G.I. Yavlenie Gibbsa pri nekotoryx processax summirovaniya ryadov Fur'e]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1965, vol. 162, no. 6, pp. 1215–1218.

3. Agakhanov S.A. Gibbs phenomenon for some summation processes of generalized Fourier series. [Agaxanov S.A. Yavlenie Gibbsa pri nekotoryx processax summirovaniya obobshhennyx ryadov Fur'e]. *Sbornik stateyj vypusk 1, Funkcional'nyyj analiz, teoriya funkciyj i ix prilozheniya — Collection of articles, iss. 1, Functional analysis, theory of functions and their applications*, 1974.

4. Agakhanov S.A. Gibbs phenomenon in trigonometric series theory. [Agaxanov S.A. Yavlenie Gibbsa v teorii trigonometricheskix ryadov]. dis.... k.ph.-m.n., Leningrad, 1974, 57 p.

5. Natanson G.I. Research on modern problems of constructive function theory. [Natanson G.I. Issledovaniya po sovremennym problemam konstruktivnoyj teorii funkcii]. *Sbornik stateyj — Digest of articles*, 1961, pp. 206–213.

Баламирзоев Абдул Гаджибалаевич, доктор технических наук, профессор, профессор каф. информатики и вычислительной техники, Дагестанский государственный педагогический университет; профессор кафедры прикладной математики Махачкалинского филиала МАДИ, Махачкала, Россия
E-mail: abdul2000@yandex.ru

Balamirzoev Abdul Gadjibalaevich, doctor of technical Sciences, Professor, Professor, Computer science and engineering, Dagestan state pedagogical University; Professor of applied mathematics Department of Makhachkala branch of MADI, Makhachkala, Russia
E-mail: abdul2000@yandex.ru

Агаханов Селимхан Агаханович, к.ф.-м. наук, доцент, доцент каф. информатики и вычислительной техники, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия
E-mail: abdul-b@yandex.ru

Agakhanov Selimhan Agahanovich, associate professor, assistant professor Computer science and engineering, Dagestan state pedagogical University, Makhachkala, Russia
E-mail: abdul-b@yandex.ru

Рагимханова Гульнара Саруханoвна, к.ф.-м. наук, доцент, доцент каф. информатики и вычислительной техники, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия
E-mail: gulnara_6789@mail.ru

Gulnara Sarukhanovna Ragimkhanova, associate professor, assistant professor Computer science and engineering, Dagestan state pedagogical University, Makhachkala, Russia
E-mail: gulnara_6789@mail.ru