

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЫТОВ БРИДЖМЕНА ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА

О. Л. Швед, В. В. Ткаченко

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.

Аннотация. Для идеально упругопластического материала Мурнагана выполнено численное моделирование одноосных и двухосных нагружений растяжение и сжатие, проведенных до момента макроразрушения образцов. Описано явление возникновения и развития упругой и пластической деформационной анизотропии. Осуществлена проверка определяющих уравнений, задания параметров модели материала и предложенного критерия разрушения образца (в общем случае появления макротрещины). Установлена пригодность разработанных для триклинного материала комплексов программ на языке Фортран. Результаты расчетов кривых пластичности, отражающих возникшую анизотропию, сравниваются и с опытными данными Бриджмена. Описывается явление увеличения пластичности материала в условиях высокого гидростатического давления.

Ключевые слова: упругопластический материал Мурнагана, определяющие уравнения, численное моделирование, комплекс программ.

NUMERICAL MODELING OF THE BRIDGMAN EXPERIENCE FOR ELASTIC-PLASTIC MATERIAL OF MURNAGHAN

O. L. Shved, V. V. Tkachenko

Abstract. For the ideally elastic-plastic material of Murnaghan, numerical modeling of uniaxial and biaxial tensile and compression loads was performed, performed prior to the macro fracture of the samples. The phenomenon of the onset and development of deformation elastic and plastic anisotropy is described. A check was carried out on the governing equations, setting the parameters of the material model and the proposed criterion for sample failure (in the general case of the appearance of a macro crack). The suitability of the Fortran programs developed for triclinic material has been established. The results of calculations of plasticity curves reflecting the anisotropy that has arisen are compared with the experimental Bridgman data. The phenomenon of increasing the plasticity of the material under conditions of high hydrostatic pressure is described.

Keywords: elastic-plastic material of Murnaghan, defining equations, numerical modeling, complex of programs.

ВВЕДЕНИЕ

Модель упругого материала Мурнагана [1, 2] обобщена на упругопластичность в [3]. Использовано требование двойной потенциальности в напряжениях и скоростях напряжений. Предполагалось, что активный упругопластический процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний. Сформулированы определяющие уравнения упругопластического материала Мурнагана. Получены девиаторные сечения поверхности текучести в пространстве напряжений и специфический критерий макроразрушения материала

при течении. В качестве базовых экспериментов выбраны одноосные нагружения — растяжение, сжатие и двухосные нагружения — растяжение, сжатие. При численном моделировании базовых экспериментов, проведенных до момента разрушения, материал для необходимого упрощения предполагается идеально упругопластическим. В рамках ортотропного материала требуется выполнить численное моделирование базовых экспериментов и провести проверку возможностей модели материала с использованием опытных данных работы [4]. Выбранные эксперименты Бриджмена состояли из начальной деформации одноосных и двухосных растяжения, сжатия и последующей деформации одноосных растяжения и сжатия в ортогональном (и обратном) направлении, а также нагружении простого сжатия при высоком гидростатическом давлении сжатия.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Обозначим $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ — неподвижный ортонормированный триэдр. Определяющее уравнение в конечном виде для удельной потенциальной энергии упругой деформации ε запишутся как

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{G}) + \varepsilon_{23}(\mathbf{G}, \delta_j) + c \quad (\varepsilon_{23} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$\varepsilon_0 = 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3)I_1^2 + (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3)I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3)I_1I_2 + 12^{-1}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)I_1^3 + 2\nu_3I_3),$$

$$\varepsilon_2 = 4^{-1} \left(\sum \delta_i((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 - 1) + \delta_8((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) - 1) + \delta_9((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) - 1) + \delta_{10}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) - 1) + \delta_{11}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \right),$$

$$\varepsilon_3 = 8^{-1} \left(\sum \delta_{21+i}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^3 + 1) + \delta_{25}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{26}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{27}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \delta_{28}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum \delta_{31+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \delta_{31}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) \right), \quad (1)$$

где ε_0 — изотропный потенциал, ε_{23} — анизотропные структуры второй и третьей степени, c — минимальная скалярная величина, обеспечивающая условие $\varepsilon \geq 0$, I_i — главные инварианты упругой меры Коши–Грина \mathbf{G} , δ_j — параметры упругой анизотропии, $\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ — постоянные Ламе. Для рассматриваемого ортотропного материала при выбранной нумерации [3, 5] индекс $j \in \{1 - 3, 8 - 11, 22 - 34\}$ с учетом используемого одноосного нагружения по оси 2.

Из (1) получаем определяющее уравнение в конечном виде для тензора напряжений Коши \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \sum \delta_j \mathbf{T}_j \quad \mathbf{T}_0 = 2\sqrt{I_3^{-1}} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T, \sum \delta_j \mathbf{T}_j = 2\sqrt{I_3^{-1}} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T,$$

$$\mathbf{T}_0 = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2),$$

$$\varphi_0 = a_0 I_3, \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1,$$

$$a_0 = 2^{-1} \nu_3, b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3), b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2),$$

$$b_2 = 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2), b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), c_1 = -b_3,$$

$$\begin{aligned}
 T_i &= L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \quad (i = 1, 2, 3), \\
 T_{3+i} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + 2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}), \\
 T_8 &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 T_9 &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 T_{10} &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \\
 T_{11} &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \quad T_{21+i} = 4^{-1}3L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \\
 T_{25} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{26} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{27} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{28} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{29} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{30} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{31} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + \\
 &+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 T_{31+i} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}),
 \end{aligned} \tag{2}$$

В (2) $\mathbf{C}_i = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O}$, \mathbf{O} — собственно ортогональный тензор упругого поворота, сопровождающего упругую деформацию $\mathbf{F}_e = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T$ — неособенный тензор, заменяющий деформационный градиент $\mathbf{U}^2 = \mathbf{G}$, $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}$, \mathbf{F} — мера упругой деформации Фингера [3]. В рассматриваемых нагружениях $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{C}_i = \mathbf{c}_i$.

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ВИДЕ

В [3] определен тензор $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$ — объективная О-производная тензора \mathbf{T} , где $\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}$ — упругий спин, который в рассматриваемых случаях нулевой. Введем девиатор-оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ — О-производную тензора $\text{dev } \mathbf{T}$, вычисленную по соотношению $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$ ($\nabla \mathbf{v}^T$ — градиент скорости, \mathbf{D} — тензор скорости деформаций) при условии несжимаемости:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_0 &= \text{dev}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}(d\mathbf{F} \cdot \cdot \mathbf{D} + c_1 \mathbf{F}^2 \cdot \cdot \mathbf{D})\mathbf{F} + c_1 \mathbf{F} \cdot \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \\
 &\quad - \varphi_0 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) \quad (d = b_1 + (2b_2 + b_3)I_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_2 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot (\sum (\delta_i 2\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + \delta_8 (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) + \\
 &+ \delta_9 (\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) + \delta_{10} (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1) + \\
 &\quad + \delta_{11} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1)) \cdot \mathbf{V}), \quad (i = \overline{1,3}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_3 &= L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot (\sum 3\delta_{21+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i + \\
 &\quad + \delta_{25}(((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \\
 &\quad + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) + \\
 &\quad + \delta_{26}(((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + \\
 &\quad + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) + \\
 &\quad + \delta_{27}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \\
 &\quad + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1) + \\
 &\quad + \delta_{28}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 + \\
 &\quad + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta_{29}(((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 + \\
 & \quad + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1) + \\
 & + \delta_{30}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 + \\
 & \quad + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2) + \\
 & + \delta_{31}2^{-1}(((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 + \\
 & \quad + ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 + \\
 & \quad + ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)) \cdot \mathbf{V}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Определяющие уравнения при течении в дифференциальном виде можно записать согласно [3]:

$$\begin{aligned}
 (L_3^{-1}\dot{\varepsilon}) \cdot & = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}\mathbf{N}), \\
 \dot{\delta}_j & = \beta k_j \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} (\mathbf{T}_j \neq 0, \beta \rightarrow \min, \beta \geq 0, (k_j = \pm 1) \vee (k_j = 0)), \dot{\delta}_j = 0 (\mathbf{T}_j = 0), \quad (4)
 \end{aligned}$$

где α — относительная часть рассеиваемой удельной мощности деформации зависит от тензора \mathbf{D} , напряженно-деформированного состояния и истории нагружения, девиатор \mathbf{N} — единичный вектор нормали к поверхности девиаторного сечения поверхности текучести (при векторной интерпретации девиатора симметричного тензора второго ранга). Минимум величины параметра роста упругой анизотропии β отыскивается на множестве параметров k_j . При одноосных нагружениях третье соотношение в (4) дополняется еще четырьмя линейными однородными уравнениями [3, 5].

3. КРИТЕРИЙ МАКРОРАЗРУШЕНИЯ

Используя условия потенциальности [3], переходим к представлению девиатора $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ в пятимерном векторном пространстве в базисе $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$ с матрицей оператора $Q = (q_{ik})_{\substack{i=\overline{1,5} \\ k=\overline{1,5}}}$, которая для ортотропного материала может содержать

только 7 ненулевых элементов: $q_{11} = p_1 + 2p_2$, $q_{22} = -p_1 + 2p_2$, $q_{12} = q_{21} = \sqrt{3}p_2$, $q_{33} = p_3$, $q_{44} = p_4$, $q_{55} = p_5$.

Функция критерия разрушения с учетом нормирования запишется в виде

$$X(\varphi) = (p_1^2 + 3p_2^2)^{-3} \prod_{i=1}^3 (p_2^2 - p_1^2 - 4p_2p_{2+i} + p_{2+i}^2) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (5)$$

На рис. 1 для первоначально изотропного материала изображены положения точки процесса при одноосных растяжении (вверху) и сжатии (внизу) по оси 2. Стрелками и цифрами $i = 1, 2, 3$ обозначены проекции базисных диад $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i$ на девиаторную плоскость $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$, которая натянута на базисные векторы $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$, задающие направления осей в декартовой системе координат. Функция X вычисляется из соотношения (5) в расчетной точке, которая перемещается по часовой стрелке из точки процесса на кривой пластичности. На оси абсцисс φ большие штрихи соответствуют положениям сингулярных точек кривой пластичности. Появление макротрещины вследствие пластической деформации происходит при переходе, какого либо нуля функции X на регулярный соседний участок кривой [3]. Соответствующая точка на оси абсцисс указывается стрелкой.

Шестимерное векторное пространство симметричных тензоров второго ранга получается добавлением базисного вектора $\mathbf{W}_0 = (\sqrt{3})^{-1}\mathbf{E}$.

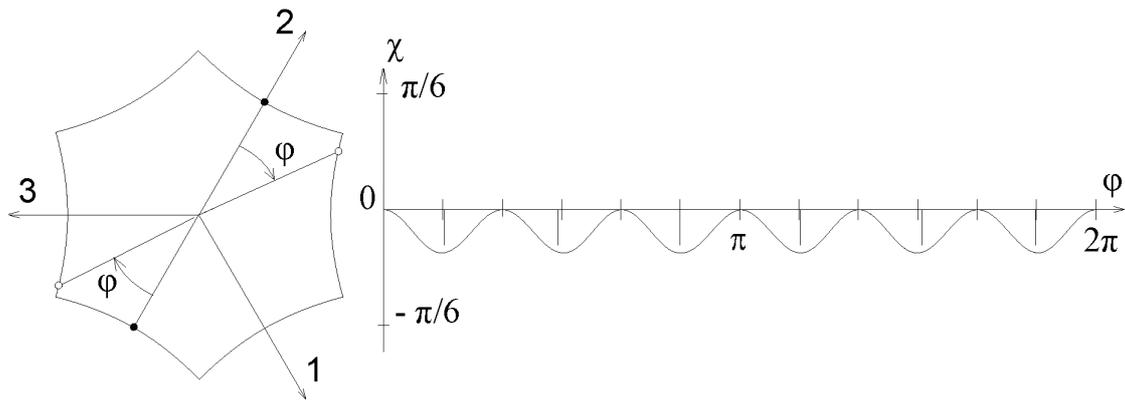


Рис. 1. Изотропный материал. Кривая пластичности и функция разрушения.

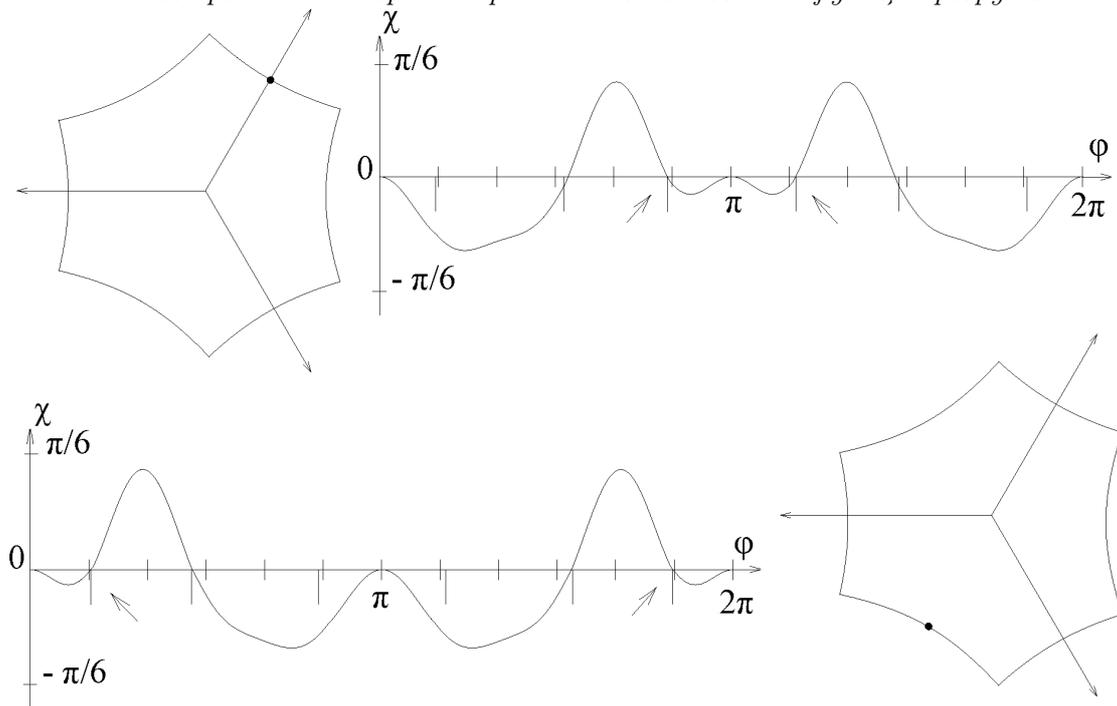


Рис. 2. Простое растяжение (вверху) и простое сжатие (внизу).

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование проводится в квазистатическом режиме при малом временном шаге. При известных скоростях перемещений в общем случае требуется переход от материально индифферентных величин к инвариантным величинам [6]. Для ортотропного материала этой процедуры не требуется, т. к. $\mathbf{O} = \mathbf{E}$. Из системы определяющих уравнений (1)–(4) находятся величины: $\dot{\mathbf{V}}$ — тензор скорости меры упругих искажений и β — параметр роста упругой анизотропии, а затем $\dot{\delta}_j$. Далее вычисляются новые значения величин напряженно-деформированного состояния.

Разработаны алгоритмы и комплексы программ на языке Фортран для численного моделирования базовых экспериментов — одноосных и двухосных растяжения и сжатия, проведенных до момента разрушения. Точка процесса расположена в основном двумерном подпространстве пространства девиаторов напряжений. Используются общие программные модули

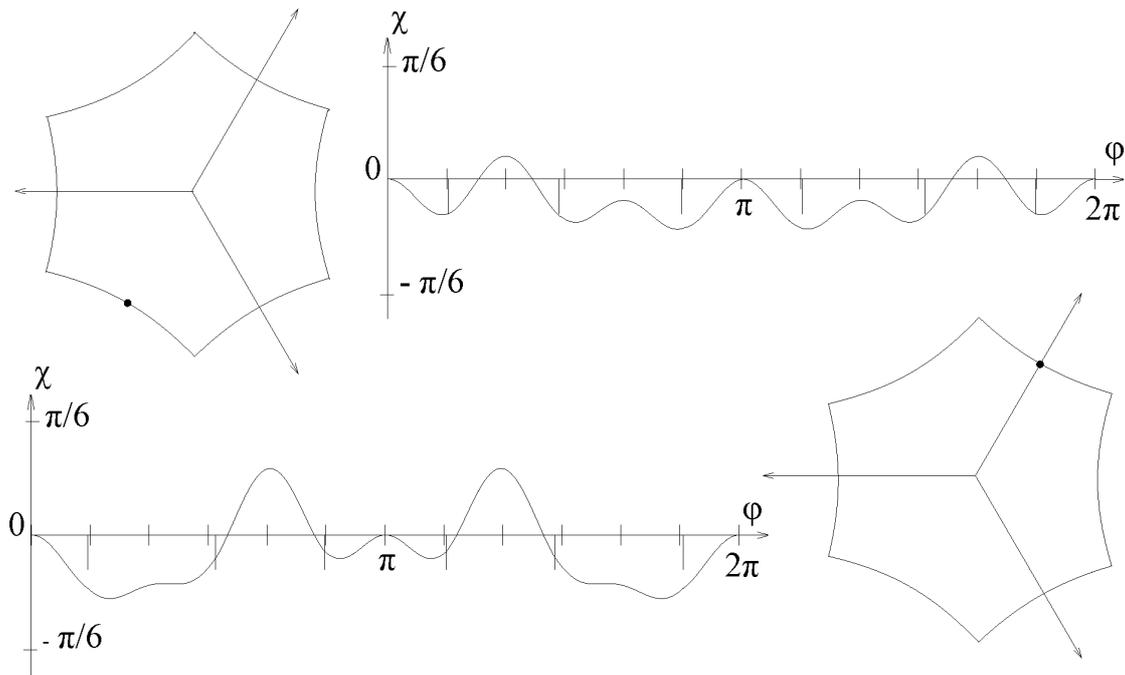


Рис. 3. Растяжение–сжатие (вверху) и сжатие–растяжение (внизу).

для триклинного материала Мурнагана. Головные программы комплексов выполняют процедуры численного моделирования нагружений согласно соотношениям (1–2); построения новых точек двухмерного подпространства $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\}$ при обходах по поверхности девиаторного сечения в трех трехмерных подпространствах $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3\}$, $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_4\}$, $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_5\}$, ортогонально проекциям третьей, второй и первой осей соответственно; построение сингулярных точек кривой пластичности в двухмерном подпространстве; построения кривой пластичности; построения графика знакопеременной критериальной функции (5) для проверки полученного критерия разрушения вследствие пластической деформации.

На рис. 2, рис. 3 представлены результаты численного моделирования одноосных нагружений. В качестве идеально упругопластического материала выбран рекристаллизованный вольфрам с постоянными Ламе $\lambda = 163$, $\mu = 137$, $\nu_1 = -429$, $\nu_2 = -258$, $\nu_3 = -267$ (ГПа) [1]. Напряжение текучести при простых растяжении и сжатии взято $\sigma_s = 0.45$ (ГПа). Величина рассеиваемой удельной мощности деформации положена $\alpha = 0.9595$ при одноосном растяжении, $\alpha = 0.9757$ при одноосном сжатии.

Наблюдается полное качественное соответствие результатов численных и физических экспериментов [4] при условии малого отличия кривых пластичности в конце начального активного нагружения (до наступления момента разрушения) и начале последующего активного нагружения. Начальное нагружение одноосного растяжения согласно кривым пластичности (рис. 2) больше действует в смысле упрочнения на последующее простое растяжение, а начальное нагружение одноосного сжатия меньше действует на последующее простое сжатие. Появление пластической анизотропии отражено в изменениях кривых пластичности.

На рис. 3 показано численное моделирование простых сжатия, растяжения и дальнейших соответственно простых растяжения, сжатия в противоположном направлении с возвращением к первоначальным размерам опытного образца. Согласно экспериментам Бриджмена материал становится другим - анизотропным (рис. 1), и зависит от истории нагружения. Установлено, что близость материала к состоянию разрушения большая на пути сжатие - растяжение.

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования двухосных нагружений

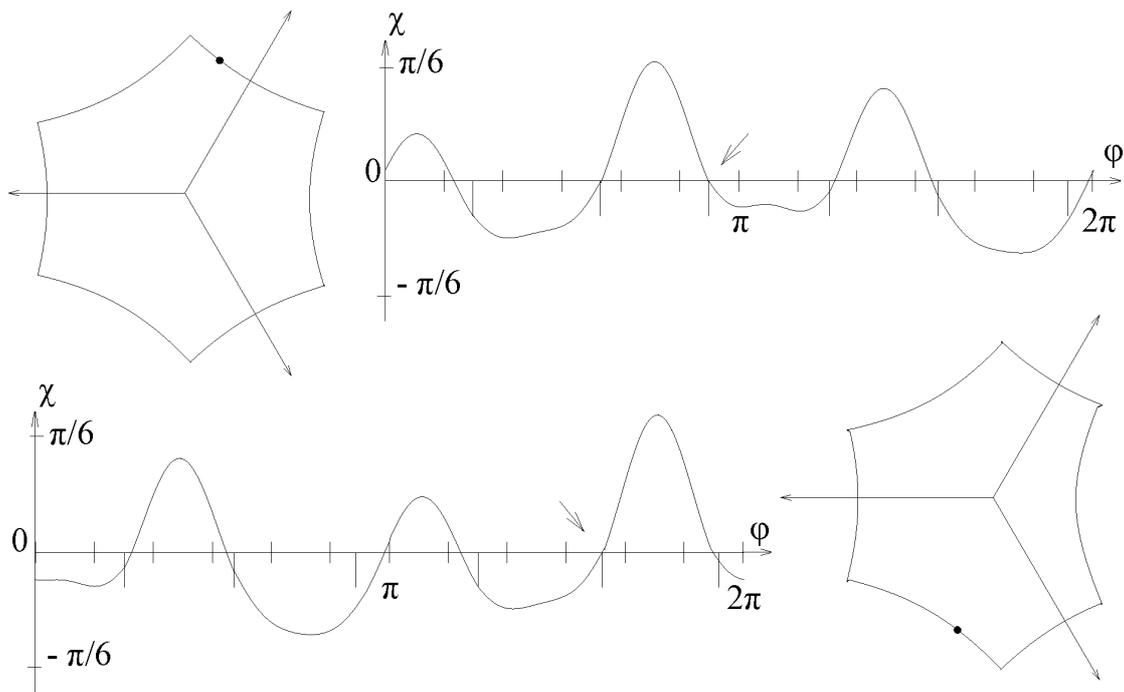


Рис. 4. Двухосное растяжение (вверху) и двухосное сжатие (внизу).

для выбранного материала. Величина рассеиваемой удельной мощности деформации положена $\alpha = 0.992$ при двухосном растяжении, $\alpha = 0.9936$ при двухосном сжатии [3]. При двухосных нагружениях предполагалось, что растяжение и сжатие происходит по второй оси, ортогонально третьей оси приложен гладкий штамп, а ортогональная первой оси поверхность образца является свободной.

Отношение конечных величин параметров упрочнения Р. Шмидта при двухосном нагружении и одноосном нагружении составило 0.25 для растяжения и 0.72 для сжатия. Всего ненулевых параметров упругой анизотропии оказалось 16 для двухосных нагружений и 20 для одноосных нагружений. Также наблюдается полное качественное соответствие результатов численных и физических экспериментов [4] при условии малого отличия кривых пластичности в конце начального активного нагружения (до наступления момента разрушения) и начале последующего активного нагружения. Начальное нагружение двухосного сжатия меньше действует в смысле упрочнения на последующее двухосное сжатие (рис. 4). Этот факт и аналогичные факты, указанные выше для одноосных нагружений согласуются с данными работы [4].

На рис. 5 показаны результаты расчета еще одного простого сжатия.

Деформация на рис. 5 такая же, как на рис. 2. Для трудно деформируемых материалов согласно опытам Бриджмена при деформировании под высоким всестороннем давлением сжатия p существует такое пороговое напряжение p_0 , что при $|p| < |p_0|$ увеличение пластичности материала не происходит. По результатам вычислительных экспериментов оно расположено в интервале $(600\sigma, 500\sigma)$. В последнем численном эксперименте материал остается "почти" изотропным согласно функции разрушения (см. рис. 1). При дальнейшем повышении давления картина ухудшается. Возможно, это значение указывает границу применимости закона Мурнагана.

Установим формальные ограничения при изотропии. Для упругопластического материала требуется возможность численного обращения закона, чтобы вычислять девиаторные сечения поверхности текучести. Необходимым для этого условием является отличие от нуля якобиана

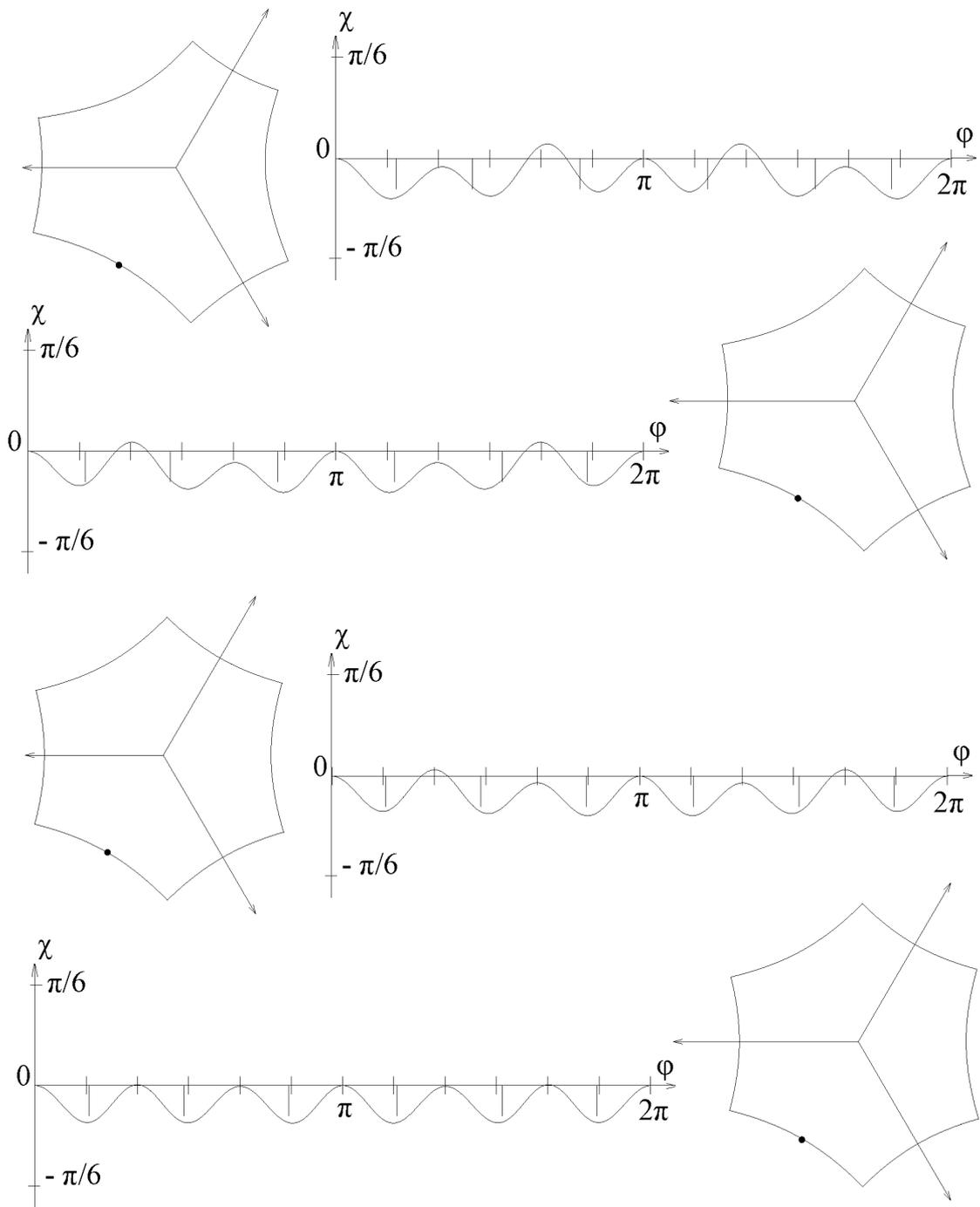


Рис. 5. Простое сжатие при высоком гидростатическом давлении сжатия (сверху вниз): $p = 600\sigma, 1000\sigma, 1500\sigma, 2000\sigma$ ($\sigma = -0.15$ ГПа).

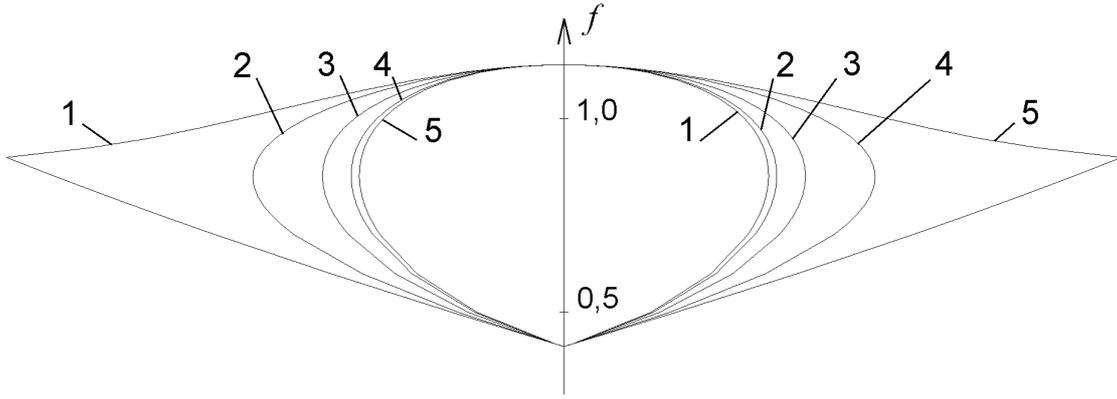


Рис. 6. Совмещенные плоские сечения 1–5 поверхности $J(f_1, f_2, f_3) = 0$.

отображения $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F})$. Пусть выполняется $\mathbf{T} = t_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + t_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + t_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3$; $\mathbf{F} = f_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + f_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + f_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3$, \mathbf{c}_i — собственные векторы тензоров \mathbf{T} и \mathbf{F} . С точностью до ненулевого постоянного множителя вычисляем согласно (2) якобиан $J = \left| \frac{\partial t_k}{\partial f_i} \right|_{k,l=1,2,3}$:

$$\begin{aligned}
 J = & a_1 \sum f_i^6 + a_2 \sum_{i \neq k} f_i f_k^5 + a_3 \sum_{i \neq k} f_i^2 f_k^4 + a_4 f_1 f_2 f_3 \sum_{i \neq k} f_i f_k^2 + a_5 (f_1 f_2 f_3)^2 + a_6 f_1 f_2 f_3 \sum f_i^3 + \\
 & + a_7 \sum_{i \neq k} (f_i f_k)^3 + a_8 \sum f_i^5 + a_9 \sum_{i \neq k} f_i f_k^4 + a_{10} \sum_{i \neq k} f_i^2 f_k^3 + a_{11} \sum_{l \neq i, l \neq k, i \neq k} f_l f_i^2 f_k^2 + \\
 & + a_{12} f_1 f_2 f_3 \sum f_i^2 + a_{13} \sum f_i^4 + a_{14} \sum_{i \neq k} f_i f_k^3 + a_{15} f_1 f_2 f_3 \sum f_i + a_{16} \sum_{i \neq k} (f_i f_k)^2 + \\
 & + a_{17} \sum f_i^3 + a_{18} f_1 f_2 f_3 + a_{19} \sum_{i \neq k} f_i f_k^2 + a_{20} \sum f_i^2 + a_{21} \sum_{i \neq k} f_i f_k + a_{22} \sum f_i + a_{23}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где $a_i = a_i(\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ($l, i, k \in \{1, 2, 3\}$). Для вольфрама они имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_1 = & 2^{-10} \cdot 5,955583725, \quad a_2 = 2^{-9} \cdot 34,580198835, \quad a_3 = 2^{-10} \cdot 137,683252035, \\
 a_4 = & -2^{-8} \cdot 36,517858965, \quad a_5 = 2^{-9} \cdot 160,347539817, \quad a_6 = 2^{-9} \cdot 42,557106375, \\
 a_7 = & -2^{-8} \cdot 82,533078171, \quad a_8 = -2^{-9} \cdot 3,801777525, \quad a_9 = -2^{-9} \cdot 99,779252625, \\
 a_{10} = & -2^{-8} \cdot 147,683920437, \quad a_{11} = 2^{-8} \cdot 33,1029306765, \quad a_{12} = -2^{-7} \cdot 53,142401025, \\
 a_{13} = & -2^{-10} \cdot 191,972925765, \quad a_{14} = -2^{-8} \cdot 263,121227373, \quad a_{15} = -2^{-8} \cdot 655,625977059, \\
 a_{16} = & -2^{-10} \cdot 2849,976779631, \quad a_{17} = 2^{-8} \cdot 253,662908645, \quad a_{18} = 2^{-7} \cdot 1974,551887127, \\
 a_{19} = & 2^{-8} \cdot 1510,038432355, \quad a_{20} = -2^{-10} \cdot 1154,1366579437, \quad a_{21} = -2^{-9} \cdot 1670,715533033, \\
 a_{22} = & -2^{-9} \cdot 1289,425458373, \quad a_{23} = 2^{-10} \cdot 2567,413523557. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Исходная плоскость с кривой 1 натянута на направляющий вектор $\mathbf{W}_0 = (\sqrt{3})^{-1} \mathbf{E}$ шаровой оси, обозначенный на рис. 6 стрелкой, и ортогональный ему вектор $\text{dev } \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i (\text{dev } \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \cdot \text{dev } \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i)^{-\frac{1}{2}}$, направленный влево от оси. Плоскость расположена в векторном пространстве меры \mathbf{F} и последовательно поворачивается на угол $\frac{\pi}{12}$. В повернутых плоскостях расположены кривые 2–5. При дальнейших поворотах в силу изотропии кривые повторяются в обратном порядке от кривой 5 до кривой 1. Угол общего поворота составляет $\frac{2\pi}{3}$. Вектор направленный влево от шаровой оси будет теперь вектор проекции на девиаторную плоскость следующей базисной диады $\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k$, $k = i + 1; i, k \in \{1, 2, 3\}$ с учетом круговой перестановки индексов.

Масштабы на рис. 6 по горизонтали и вертикали совпадают.

Внутренняя область, ограниченная поверхностью $J(f_1, f_2, f_3) = 0$ (6)–(7), задает формальную область определения закона Мурнагана при изотропии. Необходимое условие $f_i > 0$ имеет место. На шаровой оси выполняется $f_1 = f_2 = f_3 = f$, $f_- \leq f \leq f_+$, $f_- \approx 0.412$, $f_+ \approx 1.139$. На шаровой оси в пространстве напряжений выполняется $t_1 = t_2 = t_3 = t$, $t_- = t(f_-) \leq t \leq t(f_+) = t_+$, $t_- \approx -1065$ ГПа, $t_+ \approx 25.6$ ГПа. При $f = 1$ получается $t(f) = 0$. Найденное значение $p = -300$ ГПа (рис.5) соответствует значению $f_-^0 \approx 0.688$. Можно предположить, что рабочая область на шаровой оси согласно численному эксперименту будет составлять $f_-^0 < f < f_+^0 < f_+$, где величина f_+^0 подлежит определению. Уравнение $f = f(t)$ не имеет физически правильного решения при $t > t_+$. Рабочая область для упруго-пластического материала Мурнагана в трехмерном пространстве меры Фингера образуется окрестностью отрезка шаровой оси $[f_-^0, f_+^0]$, которая определится физическими опытами в сочетании с вычисленными экспериментами, для которых потребуются разработанные комплексы программ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнена проверка результатов численного моделирования с использованием экспериментальных данных Бриджмена и уточнение программных модулей. Эксперименты состояли из начальной и последующей деформаций. Начальная деформация включает двухосные сжатие, растяжение, простые растяжение, сжатие. Последующая деформация включает простые сжатие, растяжение в ортогональном направлении, а также в обратном направлении. Наблюдается полное качественное соответствие результатов численных и физических экспериментов при указанных условиях. Явление увеличения пластичности материала при всестороннем равномерном сжатии описывается естественным образом – без привлечения дополнительных предположений и показывается на примере простого сжатия. Рассматриваются формальные ограничения в пространстве меры Фингера на область существования отображения Мурнагана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1980. — 512 с.
2. Murnaghan, F. D. Finite deformation of an elastic solid / F. D. Murnaghan. — N. Y. John Wiley, 1951. — 140 p.
3. Швед, О. Л. Модель упругопластического материала Мурнагана / О. Л. Швед // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 1. — С. 158–172.
4. Бриджмен, П. В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П. В. Бриджмен. — М. : Изд-во ин. лит., 1955. — 444 с.
5. Швед, О. Л. Учет роста упругой анизотропии в модели триклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Сборник трудов Международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики”, 18–20 декабря 2017 г. — Воронеж, 2017. — С. 1298–1305.
6. Швед, О. Л. Вычисление изменения состояния упругопластического материала Мурнагана в условиях течения при известных скоростях перемещений / О. Л. Швед // Информатика. — 2018. — Т. 15, № 4. — С. 59–70.
7. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованёва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 145–157.
8. Об адаптации метода конечных элементов для модели колебаний струны с разрывными решениями / Ж. И. Бахтина, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 106–117.

REFERENCES

1. Lurie A.I. Nonlinear theory elasticity. [Lur'e A.I. Nelineynaya teoriya uprugosti]. Moscow, 1980, 512 p.
2. Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. N.Y. John Wiley, 1951, 140 p.
3. Shved O.L. Model of the Murnaghan elastic-plastic Material. [Shved O.L. Model' uprugoplasticheskogo materiala Murnagana]. *Prikladnaya matematika i mexanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 83, no. 1, pp. 158–172.
4. Bridgman P.V. The study of large plastic deformation and fracture. [Bridzhmen P.V. Issledovanie bol'shix plasticheskix deformatsiy i razryva]. Moscow, 1955, 444 p.
5. Shved O.L. Accounting for the growth of elastic anisotropy in the model of triclinic elastic-plastic material. [Shved O.L. Uchet rosta uprugoyj anizotropii v modeli triklinnogo uprugoplasticheskogo materiala]. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference «Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics», December 18–20, 2017, Voronezh, pp. 1298–1305.
6. Shved O.L. Calculation of the change in the state of the Murnaghan elastic-plastic material under flow conditions at known movement speeds. [Shved O.L. Vychislenie izmeneniya sostoyaniya uprugoplasticheskogo materiala Murnagana v usloviyax techeniya pri izvestnyx skorostyax peremeshheniy]. *Informatika — Computer science*, 2018, no. 4 (15), pp. 59–70.
7. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovaneva F.V. Adaptation of the finite element method for different order mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovanyova F.V. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya raznopolyadkovoyj matematicheskoyj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 145–157.
8. Bakhtina Zh.I., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On the adaptation of the finite elements method for a model of string oscillations with discontinuous solutions. [Baxtina Zh.I., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya modeli kolebaniy struny s razryvnymi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 106–117.

Швед Олег Лаврентьевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
E-mail: swed@newman.bas-net.by

Shved Oleg L., Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
E-mail: swed@newman.bas-net.by

Ткаченко Вадим Викторович, кандидат технических наук, заведующий лабораторией, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
E-mail: tkach@newman.bas-net.by

Tkachenko Vadim V., Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Head of Laboratory, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
E-mail: tkach@newman.bas-net.by