УДК 517.9

АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ

Л. В. Стенюхин

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 18.02.2018 г.

Аннотация. Равновесные устойчивые и неустойчивые формы капель и капиллярных трубок исследовались в работах H. Wente, R. Finn, Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко. Функции, задающие эти формы, являются решениями уравнения капиллярности и обычно находятся итерационными методами, имея представление в виде рядов. Однако, если размеры форм достаточно большие, либо фирмы подвергаются воздействию потенциала, то нарушается сходимость итераций или полученные решения начинают противоречить физическим экспериментам. При этом, разрешимость уравнения капиллярности в классах обобщённых функций была доказана Н. Н. Уральцевой.

Капиллярное уравнение возникает из вариационного принципа минимизации энергетического функционала, состоящего из энергии поверхностного натяжения, потенциальной энергии силы тяжести и энегрии объёмных связей. Энергия поверхностного натяжения определяется функционалом площади, исследованию которого посвящены работы А. Ю. Борисовича, Л. В. Стенюхина. Экстремали функционала площади определяют минимизацию энергии поверхностного натяжения.

Настоящая работа посвящается исследованию существования решений капиллярного уравнения при воздействии внешнего потенциала, приводящего к перестройкам поверхности. Вариационный принцип в банаховых и гильбертовых пространствах и операторный подход позволяют находить такие решения, критические значения параметров и соответствующие формы капель и трубок.

Ключевые слова: задача капиллярности; число Бонда; бифуркация; особое решение.

ANALYSIS OF THE EXISTENCE OF SPECIAL SOLUTIONS TO THE CAPILLARITY PROBLEM

L. V. Stenyukhin

Abstract. Equilibrium stable and unstable forms of droplets and capillary tubes were investigated by H. Wente, R. Finn, Dao Chong Thi, A. T. Fomenko. The functions specifying these forms are solutions of the capillarity equation and are usually found by iterative methods, having a representation in the form of series. However, if the sizes of the forms are large enough, or firms are exposed to the potential, then the convergence of the iterations is violated or the resulting solutions begin to contradict physical experiments. In this case, the solvability of the capillarity equation in classes of generalized functions was proved by N. N. Uraltseva.

The capillary equation arises from the variational principle of minimizing the energy functional, consisting of the energy of surface tension, the potential energy of gravity, and the energy of volume bonds. The surface tension energy is determined by the area functional, the investigation of which is discussed by A. Yu. Borisovich and L. V. Stenyukhin. The extremals of the area functional determine the minimization of surface tension energy.

The present work is devoted to the investigation of the existence of solutions of the capillary equation under the action of an external potential, which leads to surface rearrangements. The variational principle in Banach and Hilbert spaces and the operator approach allow us to find such solutions, critical values of the parameters, and the corresponding forms of droplets and tubes.

Keywords: capillarity problem; Bond number; bifurcation; special solution.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КОММЕНТАРИИ К ПРЕДМЕТУ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим связную каплю жидкости заданного объёма V, лежащую на горизонтальной плоскости Π в поле силы тяжести, направленном вертикально вниз. Предположим, что материал жидкости однороден, так что угол контакта жидкости с плоскостью γ постоянен, $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$. Как показал H.C. Wente [1], при этих условиях равновесная поверхность будет поверхностью вращения с осью перпендикулярной плоскости Π.

Задача о лежащей малой капле на поверхности является следствием минимизации следующих энергий:
1) энергии поверхностного натяжения;
2) потенциальной энергии силы тяжести;
3) энергии объёмных связей (постоянства объёма V).
Полная энергия определяется функционалом

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega} \Upsilon \rho u\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u\, dx,$$

E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, σ — поверхностное натяжение, Υ — потенциальная энергия на единицу массы, ρ — плотность, λ – множитель Лагранжа, отвечающий за объём.

В точках верхней части свободной поверхности P капли высота $u(x,y)$ поверхности P над Π удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} Tu = \chi u + \lambda, \tag{1.1}$$

где

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u,\ \nabla u = (u_x, u_y), \tag{1.2}$$

$\chi = \frac{\rho g}{\sigma}$. Для нижней части свободной поверхности знак $\operatorname{div} Tu$ надо заменить на обратный. Граничное условие задачи с постоянным углом контакта γ имеет вид

$$\overline{n}\ Tu = \cos\gamma, \tag{1.3}$$

$\overline{n}$ — единичная нормаль.

Замена $u = -v - (1/\chi)\lambda$ переводит уравнение (1.1) в уравнение

$$\operatorname{div} Tv = \chi v, \tag{1.4}$$

которое является уравнением свободной поверхности в капиллярной трубке. Каждому уравнению (1.1) с высотой капли в центре u_0 соответствует решение уравнения (1.4) с высотой подъёма жидкости в центре $v_0 = -(u_0 + \lambda/\chi)$. В [10] показано, что симметричные решения уравнения (1.4) однозначно определяются высотой подъёма жидкости в центре. Поэтому, каждой симметрично лежащей капле отвечает единственная капиллярная поверхность, которая (локально) геометрически конгруэнтна границе капли. Обратно, каждой симметричной капиллярной поверхности соответствует лежащая капля, определенная с точностью до аддитивной константы.

Множество всех симметричных капиллярных поверхностей является однопараметрическим семейством с параметром центральной высоты u_0 поверхности. Из принципа соответствия вытекает, что множество всех симметрично лежащих капель может быть описано с помощью однопараметрического семейства кривых.

С учётом вышеизложенного, уравнение (1.1) можно записать в безразмерной форме

$$\operatorname{div} Tu = Bu, \tag{1.5}$$

B — число Бонда, $B = \frac{\rho g a^2}{\sigma}$, характеризующее размер конфигурации. Граничное условие (1.3) остаётся.

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ

В [10] показано, что для симметрично лежащей капли, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и малого числа Бонда B, уравнение (1.5) можно записать так

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = Bu - 2\sin\gamma_0. \tag{2.1}$$

Решение ищется на круге Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ и капля постоянного объёма V_0. Если капля подвергается воздействию внешнего потенциала φ, то

$$V_0 = \frac{\pi(2+\cos\gamma_0)(1-\cos\gamma_0)^2}{3\sin^3\gamma_0}, \tag{2.2}$$

$$\cos\gamma_0 = \cos\gamma + \frac{\varphi}{\sigma}. \tag{2.3}$$

Потенциал φ может быть, например, температурой вещества капли или давлением, воздействующим изнутри капли, либо температурой и давлением одновременно. Действие потенциала приводит к изменению формы капли, в частности, к изменению угла контакта с плоскостью Π, (2.3). При этом γ_0 является единственным решением уравнения (2.2). Дальнейшее воздействие потенциала φ приведёт к изменению числа Бонда B и к перестройке (бифуркации) самой капли.

Для описания дальнейших состояний капли положим в уравнении (2.1) $B = 0$.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях и $B = 0$, существует точное решение уравнения (2.1)*

$$u_0 = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - r^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}. \tag{2.4}$$

Решение (2.4) проверяется непосредственной проверкой. Это решение послужит отправной точкой для отыскания дальнейших состояний капли, подверженной воздействию потенциала φ.

Для ненулевых чисел B положим, что решение уравнения (2.1) примет вид

$$u = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1-(r-r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}, \tag{2.5}$$

r_0 — радиус кольца по центру, $|r - r_0| \leqslant 1$.

Непосредственным вычислением получим, что функция (2.5) является точным решением уравнения

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \frac{r_0\sin\gamma_0}{r} - 2\sin\gamma_0 \tag{2.6}$$

с нулевым граничным условием.

Найдём условия, при которых задача (2.6) эквивалентна задаче (2.1). Для этого

$$Bu = \frac{r_0\sin\gamma_0}{r}, \tag{2.7}$$

то есть

$$\frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1-(r-r_0)^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0} = \frac{r_0\sin\gamma_0}{Br}. \tag{2.8}$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$\left(1+\frac{\sin^2\gamma_0}{B^2r^2}\right)r_0^2 - 2\left(r-\frac{\cos\gamma_0}{Br}\right)r_0 + r^2 - 1 = 0. \tag{2.9}$$

Разрешим уравнение (2.9) относительно r_0, как гарант кольцеобразного состояния.

$$D_1 = \left(\frac{\cos\gamma_0}{B} - 1\right)^2 + \frac{1-r^2}{B^2r^2}. \tag{2.10}$$

В решении (2.4) безразмерного уравнения (2.1) полярная координата r меняется в пределах $0 \leqslant r \leqslant 1$, значит, с увеличением потенциала φ, у деформированной капли значение $r = 1$ тоже существует. Равенство нулю выражения (2.10) для $r = 1$ порождает условие

$$B = \cos\gamma_0. \tag{2.11}$$

Таким образом, получается следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие (2.11), то существует точное аналитическое решение задачи (2.1) типа (2.5) с граничным условием (1.3).*

3. РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ ИЗ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОЩАДИ

Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u) = \int\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dx + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Upsilon\rho u\,dx + \lambda\int\limits_{\Omega}u\,dx. \tag{3.1}$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 – экстремаль (3.1). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0. Это приведет к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0+\eta\bar{n}),\bar{n}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta\eta}(\eta) = 0, \tag{3.2}$$

где $\frac{\delta S}{\delta u}$ — функциональная производная функционала площади, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности u_0. Из уравнения (3.2) определяется нормальная координата $\eta = \eta(x,y)$.

Теорема 3. *Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\frac{\delta S}{\delta\eta}(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру*

$$S(u) = \int\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dxdy, \tag{3.3}$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G). \tag{3.4}$$

Здесь E,G,F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A=\sum_{p=1}^{6}a_{ijk}\eta_x^i\eta_x^j\eta^k+1,\ B=\sum_{p=1}^{6}b_{ijk}\eta_x^i\eta_y^j\eta^k,\ C=\sum_{p=1}^{6}c_{ijk}\eta_y^i\eta_y^j\eta^k+1,$$

$$G=\sum_{p=2}^{7}g_{ijk}\eta_x^i\eta_y^j\eta^k+g\eta,$$

где i,j,k — целые неотрицательные числа, $p=i+j+k$. Все коэффициенты $a_{ijk},b_{ijk},c_{ijk},g_{ijk},g$ — являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей

$$g=(\bar n,\bar n_{xx}+\bar n_{yy})+\frac{4}{E}\left[(\bar n,u_{xx})^2+(\bar n,u_{yy})^2\right]. \tag{3.5}$$

Линейная часть оператора $A\eta_{xx}-2B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+G$ равна

$$\Delta\eta+g\eta, \tag{3.6}$$

где Δ — лапласиан.

Первая вариация функционала энергии (3.1) равна

$$\frac{\delta E}{\delta\eta}(\eta)=\frac{\delta S}{\delta\eta}(\eta)+(\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}+\lambda)\eta=E^3(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(A\eta_{xx}-2B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+G)+(\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}+\lambda)\eta.$$

Линейная часть первой вариации равна

$$L\eta=E^3(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(\Delta\eta+g\eta)+(\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}+\lambda)\eta,$$

где g определена равенством (3.5). Соотношение $\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$ определяет число Бонда, $B=\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$. Поэтому линеаризованная задача имеет вид

$$\begin{cases}\Delta\eta+(g+E^{-3}(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}(B+\lambda))\eta=0,\\ \eta\Big|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{3.7}$$

Линейный оператор (3.7) действует из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и самосопряжён в $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Приведём пример из параграфа 2. В задаче (2.1) — (2.3) функция (2.4) является её решением при нулевых чисел Бонда. Задача (3.7) в данном случае имеет вид

$$\Delta\eta=\left(\frac{\sqrt{(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^3}}{(1-y^2\sin^2\gamma_0)^3}B-g\right)\eta+\left(\frac{\sqrt{(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^3}}{(1-y^2\sin^2\gamma_0)^3}\right)\lambda\eta\,, \tag{3.8}$$

$$g=\frac{\sin^4\gamma_0(3x^2+3y^2-3x^2y^2\sin^2\gamma_0+3x^3y\sin^2\gamma_0+y(x+y)(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0))}{(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^5}+$$

$$+\frac{4\sin^2\gamma_0(1+(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^2)}{(1-y^2\sin^2\gamma_0)(1-(x^2+y^2)\sin^2\gamma_0)^2}\,,$$

$$\eta|_{\partial\Omega}=0.$$

Здесь Ω — единичный двумерный диск.

На малом диске $\Omega_\varepsilon = \{x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon\}$ около центра области Ω

$$g = 8\sin^2\gamma_0 + o(x,y),$$

и задача (3.8) соответствует задаче

$$\Delta\eta = (B - 8\sin^2\gamma_0 + \lambda)\eta,$$

$$\eta|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0.$$

В результате получается следующая

Теорема 4. *Если*

$$B - 8\sin^2\gamma_0 = \mu_n,$$

μ_n — собственное значение лапласиана Δ на области Ω_ε, то капиллярная поверхность вблизи начала координат задаётся функцией

$$u_n = u_0 + \varepsilon\eta_n,$$

где u_0 – функция (2.4), η_n — собственная функция, отвечающая собственному значению μ_n.

4. ЗАДАЧА КАПИЛЛЯРНОСТИ В КОНФОРМНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть поверхность капли $u(x,y) = (u_1(x,y),u_2(x,y),u_3(x,y))$ задана в конформных координатах, $E = G, F = 0$. Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям $u_x^2 = u_y^2, u_x u_y = 0$. В этом случае функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \int\limits_\Omega \frac{E+G}{2}\,dx + \int\limits_\Omega Bu\,dx + \lambda\int\limits_\Omega u\,dx. \tag{4.1}$$

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta E}{\delta u}(\eta) = \Delta\eta + (B+\lambda)\eta.$$

Получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta\eta + (B+\lambda)\eta = 0, \\ \eta\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Теорема 5. *Собственные значения оператора $\Delta + B + \lambda$ задачи (4.2) являются $\widetilde{\lambda}_n = \lambda_n + B + \lambda$, где λ_n — собственные значения оператора Δ с нулевым граничным условием.*

Таким образом, переход к конформным координатам упрощает нахождение спектра и собственных функций оператора капиллярности. Поверхность (2.4) стереографически спроецируем на $\mathbb{R}^2$. Пусть $\widetilde{u}_0(r)$ соответствующая функция после проецирования,

$$\widetilde{u}_0(r) = \frac{u_0(0)r}{u_0(0) - u_0(r)},\; u_0(r) = \frac{-\cos\gamma_0 + \sqrt{1 - r^2\sin^2\gamma_0}}{\sin\gamma_0}, \tag{4.3}$$

$\widetilde{\eta}_n$ — собственные функции для $\widetilde{\lambda}_n$ оператора задачи (4.2). Тогда возмущения вида $\widetilde{u}_n(r) = \widetilde{u}_0(r) + \varepsilon\widetilde{\eta}_n(r)$ порождают совокупность капиллярных поверхностей

$$u_n(r) = u_0(0)\frac{\widetilde{u}_n(r) - r}{\widetilde{u}_n(r)}. \tag{4.4}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wente, H. C. The Symmetry of Sessile and Pendent Drops / H. C. Wente // Pasific Journal of Mathematics. — 1980. — V. 88, № 2. — P. 387–397.

2. Борисович, А. Ю. Оператор Плато и бифуркации двумерных минимальных поверхностей / А. Ю. Борисович // Глобальный анализ и математическая физика. — 1987. — С. 142–155.

3. Дао Чонг Тхи. Минимальные поверхности и проблема Плато / Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко. — М. : Наука, 1987. — 312 с.

4. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов/ Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царёв // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

5. Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. — М. : Мир, 1977. — 232 с.

6. Стенюхин, Л. В. Об особых решениях задачи капиллярности с круговой симметрией / Л. В. Стенюхин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 242–245.

7. Стенюхин, Л. В. Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией / Л. В. Стенюхин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. : Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 2. — С. 77–83.

8. Стенюхин, Л. В. О минимальных поверхностях с ограничениями типа неравенств / Л. В. Стенюхин // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 11. — С. 51–59.

9. Уральцева, Н. Н. Решение задачи капиллярности / Н. Н. Уральцева // Вестник ЛГУ. — 1973. — Т. 19. — С. 54–64.

10. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн; под. ред. А. Т. Фоменко. — М. : Мир, 1989. — 310 с.

REFERENCES

1. Wente H.C. The Symmetry of Sessile and Pendent Drops. Pasific Journal of Mathematics, 1980, vol. 88, no. 2, pp. 387–397.

2. Borisovich A.Yu. Plateau Operator and Bifurcations of Two-Dimensional Minimal Surfaces. [Borisovich A.Yu. Operator Plato i bifurkacii dvumernyx minimal'nyx poverxnosteyj]. *Global'nyy analiz i matematicheskaya fizika — Global Analysis and Mathematical Physics*, 1987, pp. 142–155.

3. Dao Trong Thi, Fomenko A.T. Minimum Surfaces and the Plateau Problem. [Dao Chong Txi, Fomenko A.T. Minimal'nye poverxnosti i problema Plato]. Moscow, 1987, 312 p.

4. Darinskii B.M., Sapronov Yu.I., Tsarev S.L. Bifurcations of Extremals of Fredholm Functionals. [Darinskii B.M., Sapronov Yu.I., Tsarev S.L. Bifurkacii ekstremaleyj fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

5. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. [Nirenberg L. Lekcii po nelineyjnomu funkcional'nomu analizu]. Moscow, 1977, 232 p.

6. Stenyukhin L.V. On Special Solutions of the Capillary with Circular Symmetry. [Stenyuxin L.V. Ob osobyx resheniyax zadachi kapillyarnosti s krugovoyj simmetrieyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 242–245.

7. Stenyukhin L.V. Bifurcation analysis of the problem of capillarity with circular symmetry. [Stenyuxin L.V. Bifurkacionnyyj analiz zadachi kapillyarnosti s krugovoyj simmetrieyj]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling,*

Programming and Computer Software, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 77–83.

8. Stenyukhin L.V. Minimal Surfaces with Constraints of Inequality Type. [Stenyuxin L.V. O minimal'nyx poverxnostyax s ogranicheniyami tipa neravenstv]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2012, no. 11, pp. 51–59.

9. Uraltseva N.N. Solution of the capillarity problem. [Ural'ceva N.N. Reshenie zadachi kapillyarnosti]. *Vestnik LGU — Vestnik LSU*, 1973, vol. 19, pp. 54–64.

10. Finn R. Equilibrium capillary surface. Mathematical theory. Edited by A.T Fomenko. [Finn, R. Ravnovesnye kapillyarnye poverxnosti. Matematicheskaya teoriya. pod. red. A. T. Fomenko]. Moscow, 1989, 310 p.

Стенюхин Леонид Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и механики, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: stenyuhin@mail.ru

Stenyukhin Leonid Vitalevich, PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: stenyuhin@mail.ru