УДК 517.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НА НЕСИММЕТРИЧНОМ ГРАФЕ

Ф. О. Найдюк

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2018 г.

Аннотация. Исследуется задача распространения колебаний на несимметричном геометрическом объекте — геометрическом графе с сингулярностями. При этом основной целью в исследовании является описание решения через начальные данные посредством конечного числа арифметических операций, элементарных функций, квадратур и простых преобразований независимого аргумента (аналог метода Даламбера для задач на отрезке). Рассматриваемая задача при этом осложнена своей несимметричностью и наличием сингулярностей двух типов.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, сингулярность, открытый, связный геометрический граф, аналог формулы Даламбера.

INVESTIGATION OF THE WAVE EQUATION WITH SINGULARITY ON A NON-SYMMETRIC GRAPH

F. O. Naydyuk

Abstract. This paper deals with study of the problem of propagation of oscillations on an asymmetric geometric object — a geometric graph with singularities. In this case, the main goal of the study is to describe the solution through the initial data by means of a finite number of arithmetic operations, elementary functions, quadratures, and simple transformations of an independent argument (analogue of the d'Alembert method for problems on a segment). In this case, the problem under consideration is complicated by its asymmetry and the presence of singularities of two types.

Keywords: hyperbolic equation, the geometric graph, vibration of the string, singularities, D'Alambert's method.

1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА СЕТИ

Тематика исследования эволюционных задач не нова, но от этого интерес к изучению задач этого типа нисколько не ослабевает. Этот интерес продиктован прежде всего тем обстоятельством, что к эволюционным уравнениям приводят задачи моделирования самых разных явлений. Огромное число работ посвящено как исследованию существования (единственности) решений эволюционных уравнений, так и нахождению этих решений. Результатов изучения дифференциальных уравнений на отрезке и геометрических графах (пространственных сетях) на сегодняшний момент получено достаточно много в работах различных математиков, из которых отдельно можно было бы выделить публикации Ильина В. А., Знаменской Л. Н., Покорного Ю. В., Боровских А. В., Пенкина О. М. ([1–4]). Основной целью исследования в данной работе было обоснование существования и единственности решения задачи для волнового уравнения на геометрическом графе с соизмеримыми рёбрами и получения представления решения в форме аналога Даламбера-Эйлера наподобие того, что было получено для задачи $S(\ell; k_1; k_2; \varphi(y))$ на отрезке $[0,\ell]$:

$$\begin{cases} u_{yy}(y,t) = u_{tt}(y,t) & (0 < y < \ell,\ t > 0) \\ u_y(0,t) - k_1 u(0,t) = 0 & \\ u_y(\ell,t) + k_2 u(\ell,t) = 0 & (t > 0) \\ u(y,0) = \varphi(y),\ u_t(y,0) = 0 & (0 \leqslant y \leqslant \ell) \end{cases}.$$

Пусть исследуемая задача в общем виде представляет из себя модель колебаний сетки струн описываемая уравнением гиперболического типа:

$$u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma, t > 0), \tag{1}$$

в котором Γ — геометрический граф, а коэффициент $q(x)$ есть конечная линейная комбинация δ и δ' функций с носителями в точках из Γ

$$q(x) = \sum_{z \in \mathcal{J}(\Gamma)\setminus Y} k_z \delta(x - z) + \sum_{y \in Y} \widetilde{k}_y \delta'(x - y)$$

(здесь в множестве внутренних вершин $\mathcal{J}(\Gamma)$ графа Γ введено некоторое его подмножество Y). Для уравнения (1) далее рассматривается следующая смешанная задачу:

$$u(x + 0 \cdot h,t) = 0 \quad (x \in \partial\Gamma, h \in D(x), t \geqslant 0), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \overline{\Gamma}), \tag{3}$$

где $\varphi(x) \in \widetilde{C}^2(R(\Gamma))$, причём для $x \in \partial\Gamma$: $\varphi(x) = 0$, $\varphi^{++}_{hh}(x) = 0$, для любой $z \in \mathcal{J}(\Gamma)\setminus Y$ и любых $h, h_1 \in D(z)$: $\varphi^{++}_{hh}(z) = \varphi^{++}_{h_1 h_1}(z)$, для $z \in \mathcal{J}(\Gamma)\setminus Y$: $\sum\limits_{h \in D(z)} \varphi^{+}_{h}(z) - k_z\varphi(z) = 0$, и наконец, для $y \in Y$: $\varphi_h(y + 0 \cdot h) = \sum\limits_{\eta \in D(y)\setminus\{\eta\}} \widetilde{k}_y \Big(\varphi(y + 0 \cdot h) - \varphi(y + 0 \cdot \eta)\Big)$.

Уравнение (1) понимается также как в [2] и/или [5].

Среди таких задач выделяются два класса задач сокращённо обозначенные сходным образом с $S(\ell; k_1; k_2; \varphi(y))$, а именно: $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$ и $V_{2m}(\ell; Y; k_1,k_2,k_3; \varphi(x))$.

При этом под $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$ понимается смешанная задача (1)-(3) на графе-звезде с m рёбрами длины ℓ ($m \geqslant 2$), где k_1 — коэффициент из представления $q(x)$, определенный для узла степени m, который обозначается через a (случай $k_1 = +\infty$ исключается из рассмотрения), а k_2 — коэффициент из представления $q(x)$, определенный для всех остальных вершин графа-звезды Γ степени 1, обозначаемых через $b_1,b_2,\ldots,b_m$ (случай $k_2 = +\infty$ допускается). Под $V_{2m}(\ell; Y; k_1,k_2,k_3; \varphi(x))$ понимается смешанная задача (1)-(3) на графе с $2m$ рёбрами ($m \geqslant 2$) длиной ℓ и $(m + 2)$ вершинами, две из них имеют степень равную m (именуются как a_1 и a_2), а остальные — степень два (указаны символами $b_1,b_2,\ldots,b_m$); при этом k_1 и k_2 есть коэффициенты из представления $q(x)$, определенные для вершин a_1 и a_2 соответственно, а k_3 есть коэффициент из представления $q(x)$, определенный для всех вершин $b_1,b_2,\ldots,b_m$ (случаи $k_1 = +\infty$ и/или $k_2 = +\infty$ и/или $k_3 = +\infty$ не рассматриваются).

Замечание. Классы начальных данных (3) для задач $B_m(\ell; Y; k_1; k_2; \varphi(x))$ и $V_{2m}(\ell; Y; k_1,k_2,k_3; \varphi(x))$ обозначаются соответственно $K^B_m(\ell; Y; k_1; k_2)$ и $K^V_m(\ell; Y; k_1,k_2,k_3)$

Замечание. Геометрический граф для задачи $V_{2m}(\ell; Y; k_1,k_2,k_3; \varphi(x))$ кратко будем называть графом-веретеном.

Замечание. Геометрический граф Γ в (1) есть граф с $(m+4)$ рёбрами причём: $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. При этом подграфы Γ_1 и Γ_2 представляют собой: Γ_1 — граф-веретено с четырьмя рёбрами длины $\dfrac{\ell}{2}$, а Γ_2 — граф-звезда с m рёбрами одинаковой длины ℓ. Предполагается, что

$\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \{a_2\}$ (где $R(\Gamma_2) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (a_2,b_i)$, $R(\Gamma_1) = (a_2,\widetilde{b}_1) \bigcup (\widetilde{b}_1,a_1) \bigcup (a_1,\widetilde{b}_2) \bigcup (\widetilde{b}_2,a_2)$). А так же, предполагается: $Y = \{a_1\}$ и в вершинах $\{\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2,b_1,b_2,\dots,b_m\}$ функция $q(x)$ $(x \in \Gamma)$ представима с коэффициентами $\{0,0,\dots,0\}$, а в вершинах a_1 и a_2 — с коэффициентами k_1 $(k_1 > 0)$ и k_2 $(k_2 \geqslant 0)$ соответственно.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ Γ

Для реализации обозначенной выше цели, в работе обосновывается единственность решения задачи (1)–(3) на графе $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ и предъявляется в качестве существования это решение через начальные данные задачи (1)–(3) посредством конечного числа арифметических операций, элементарных функций, квадратур и простых преобразований независимого аргумента (аналог метода Даламбера для задач на отрезке).

Графическое представление исследуемой задачи (1)–(3) может быть смоделировано в виде системы из $(m+2)$ растянутых струн с общим концом, подпружиненным в кольце, который может скользить (без трения) по вертикальной (несгибающейся) спице; два соседних конца струн соединены с колечками посредством пружины, причём оба колечка могут перемещаться в вертикальной плоскости по несгибаемым спицам (без трения) и оставшиеся m концов соединены с колечками, которые могут двигаться (без трения) в вертикальной плоскости по (несгибающимся) спицам (расположение в горизонтальной плоскости — положение равновесия системы) представлено на рисунке 1.

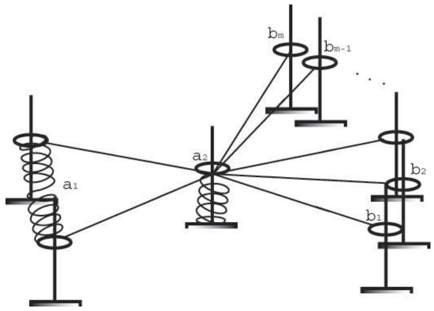

Рис. 1.

Теорема. *Пусть существует $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) на графе $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ с $(m+4)$ рёбрами. Тогда оно единственно.*

Доказательство. Непосредственно вытекает при анализе полной энергии задачи (1)–(3) в предположении противного.

Замечание. В исследуемой задаче ниже далее удобно будет интерпретировать каждую пару ребер $(a_2,\widetilde{b}_i)$ и $(\widetilde{b}_i,a_1)$ $(i = 1,2)$ как одно ребро (a_2,a_1) длиной ℓ.

На рассматриваемом графе Γ установим следующую ориентацию:

$$h_1 = \frac{1}{\|a_1 - \widetilde{b}_1\|}(a_1 - \widetilde{b}_1) = \frac{1}{\|\widetilde{b}_1 - a_2\|}(\widetilde{b}_1 - a_2), h_2 = \frac{1}{\|a_1 - \widetilde{b}_2\|}(a_1 - \widetilde{b}_2) = \frac{1}{\|\widetilde{b}_2 - a_2\|}(\widetilde{b}_2 - a_2),$$

$$h_{j+2} = \frac{1}{\|b_j - a_2\|}(b_j - a_2), 2h_1 = 2h_2 = h_{j+2}\,(j = 1,m).$$

Введём в рассмотрение два вспомогательных оператора определяемых на $\varphi : \Gamma \to R^1$:

$$(\Phi\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big(\varphi(a_2 + 2\|x - a_2\|h_1) + \varphi(a_2 + 2\|x - a_2\|h_2)\Big) & x \in \Gamma_1 \backslash Y, \\ \varphi(x), & x \in \overline{\Gamma_2}, \end{cases} \qquad (4)$$

$$(\mathrm{H}\varphi)(x) = (\Phi\varphi)(x) - \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Функция φ, удовлетворяя условиям (2) – (3) исследуемой задачи, при этом характеризуется: $\sum\limits_{h\in D(a_2)} \varphi_h^+(a_2) - k_2\,\varphi(a_2) = 0$, $\varphi_{hh}^{++}(a_2) = \varphi_{h_1h_1}^{++}(a_2)$ (для любых $h,h_1 \in D(a_2)$), а так же $\varphi^+_{-h_{j+2}}(b_j) = 0\ \forall(j = \overline{1,m})$ и $\varphi_{-h_p}(a_1 - 0\cdot h_p) = k_1\left(\varphi(a_1 - 0\cdot h_p) - \varphi(a_1 - 0\cdot h_q)\right)$ $(p \neq q \in \{1,2\})$.

Лемма. *Если функция φ удовлетворяет обозначенным выше условиям, тогда: функции $(\Phi\varphi)(x)$ и $(\mathrm{H}\varphi)(x)$ принадлежат $\widetilde{C}^2(R(\Gamma))$ и удовлетворяют тем же условиям, что и φ, причём $(\mathrm{H}\varphi)(a_2) = 0$, $(\mathrm{H}\varphi)_{hh}^{++}(a_2) = 0\ \forall(h \in D(a_2))$.*

Доказательство. Действительно, в узле $(\Phi\varphi)(x)$ и $(\mathrm{H}\varphi)(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{h\in D(a_2)} (\Phi\varphi)_h^+(a_2) - k_2\,(\Phi\varphi)(a_2) = \frac{1}{2}\big(\varphi_{h_1}^+(a_2) + \varphi_{h_2}^+(a_2)\big) + \frac{1}{2}\big(\varphi_{h_1}^+(a_2) +$$

$$+\varphi_{h_2}^+(a_2)\big) + \sum_{i=3}^{m} \varphi_{h_i}^+(a_2) - k_2\,\varphi(a_2) = \sum_{h\in D(a_2)} \varphi_h^+(a_2) - k_2\,\varphi(a_2) = 0,$$

$$\sum_{h\in D(a_2)} (\mathrm{H}\varphi)_h^+(a_2) - k_2\,(\mathrm{H}\varphi)(a_2) = \sum_{h\in D(a_2)} \big((\Phi\varphi)_h^+(a_2) - k_2\,\varphi_h^+(a_2)\big) - k_2\,\big((\Phi\varphi)(a_2) - \varphi(a_2)\big) =$$

$$= \Bigg(\sum_{h\in D(a_2)} (\Phi\varphi)_h^+(a_2) - k_2\,(\Phi\varphi)(a_2)\Bigg) - \Bigg(\sum_{h\in D(a_2)} \varphi_h^+(a_2) - k_2\,\varphi(a_2)\Bigg) = 0,$$

кроме того, т. к. $(\Phi\varphi)(a_2) = \varphi(a_2)$, то, во-первых, $(\mathrm{H}\varphi)(a_2) = (\Phi\varphi)(a_2) - \varphi(a_2) = 0$, во-вторых, (т. к. $\varphi_{hh}^{++}(a_2) = \varphi_{h_1h_1}^{++}(a_2)\ \forall(h,h_1 \in D(a_2))$) $(\Phi\varphi)_{hh}^{++}(a_2) = (\Phi\varphi)_{h_1h_1}^{++}(a_2)$ и $(\mathrm{H}\varphi)_{\mathrm{hh}}^{++}(\mathrm{a}_2) = (\Phi\varphi)_{\mathrm{hh}}^{++}(\mathrm{a}_2) - \varphi_{\mathrm{hh}}^{++}(\mathrm{a}_2) = \varphi_{\mathrm{hh}}^{++}(\mathrm{a}_2) - \varphi_{\mathrm{hh}}^{++}(\mathrm{a}_2) = 0$.

В остальных вершинах $(\Phi\varphi)(x)$ и $(\mathrm{H}\varphi)(x)$ удовлетворяют условиям:

$$(\Phi\varphi)_{-h_p}(a_1 - 0\cdot h_p) - k_1\left((\Phi\varphi)(a_1 - 0\cdot h_p) - (\Phi\varphi)(a_1 - 0\cdot h_q)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\varphi_{-h_1}(a_1 - 0\cdot h_1) + \varphi_{-h_2}(a_1 - 0\cdot h_2)\Bigg) - k_1\Bigg(\frac{1}{2}\big(\varphi(a_1 - 0\cdot h_1) +$$

$$+\varphi(a_1 - 0\cdot h_2)\big) - \frac{1}{2}\big(\varphi(a_1 - 0\cdot h_1) + \varphi(a_1 - 0\cdot h_2)\big)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\varphi_{-h_1}(a_1 - 0\cdot h_1) - k_1\left(\varphi(a_1 - 0\cdot h_1) - \varphi(a_1 - 0\cdot h_2)\right) +$$

$$+\varphi_{-h_2}(a_1 - 0\cdot h_2) - k_1\left(\varphi(a_1 - 0\cdot h_2) - \varphi(a_1 - 0\cdot h_1)\right)\Bigg) = 0$$

$\forall(p \neq q \in \{1,2\}, h_p,h_q \in D(a_1))$ (из данных выкладок, так же можно заметить, что $(\Phi\varphi)_{-h_p}(a_1 - 0\cdot h_p) = 0$, т. е. $k_1\left((\Phi\varphi)(a_1 - 0\cdot h_p) - (\Phi\varphi)(a_1 - 0\cdot h_q)\right) = 0$ при любом k_1),

$$(\mathrm{H}\varphi)_{-h_p}(a_1 - 0\cdot h_p) - k_1\left((\mathrm{H}\varphi)(a_1 - 0\cdot h_p) - (\mathrm{H}\varphi)(a_1 - 0\cdot h_q)\right) =$$

$$= (\Phi\varphi)_{-h_p}(a_1 - 0\cdot h_p) - \Bigg(\varphi_{-h_1}(a_1 - 0\cdot h_1) - k_1\left(\varphi(a_1 - 0\cdot h_1) - \varphi(a_1 - 0\cdot h_2)\right)\Bigg) = 0$$

$\forall(p \neq q \in \{1,2\},\ h_p,h_q \in D(a_1))$; $(\mathrm{H}\varphi)^+_{-h_{j+2}}(b_j) = \varphi^+_{-h_{j+2}}(b_j) = 0\ \forall(j = \overline{1,m})$, т. к. $(\mathrm{H}\varphi)(x) \equiv 0$ (следует из (3.5.11) и (3.5.12)) на $\overline{\Gamma_2}$, то $(\mathrm{H}\varphi)^+_{-h_{j+2}}(b_j) = 0$.

Таким образом функции $(\Phi\varphi)(x)$ и $(\mathrm{H}\varphi)(x)$ удовлетворяют тем же условиям, поставленной задачи, что и функция $\varphi(x)$.

Утверждение. *$u^{\varphi}(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) на $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ можно представить в виде:*

$$u^{\varphi}(x,t) = u^{(\Phi\varphi)}(x,t) + u^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t), \tag{4}$$

причём функции $u^{(\Phi\varphi)}(x,t)$ и $u^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t)$ существуют и являются, в свою очередь, решениями других задач (1)–(3) на соответствующих геометрических графах, а именно: $u^{(\Phi\varphi)}(x,t)$ — решение задачи $B_{m+2}(\ell; \varnothing; k_2; 0; (\Phi\varphi)(x))$, а

$$u^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t) = \begin{cases} u_1^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t), & \Gamma_1 \\ 0, & \Gamma_2 \end{cases}$$

причём $u_1^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t)$ является решением задачи $V_4(\frac{\ell}{2}; \{a_1\}; k_1, 0, 0; (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(\mathrm{x}))$.

Доказательство. Пусть $v(x,t)$ — существующее решение задачи $B_{m+2}(\ell; \varnothing; k_2; 0; (\Phi\varphi)(x))$, покажем, что функция $f(x) = (\Phi\varphi)(x) \in K^B_{m+2}(\ell; \varnothing; k_2; 0)$.

1) $f(x) \in \widetilde{C}^2(R(\Gamma_3))$ (Γ_3 — граф-звезда с одинаковыми $m+2$ ребрами);

2) $\sum\limits_{h \in D(a_2)} f_h^+(a_2) - k_2\, f(a_2) = \sum\limits_{h \in D(a_2)} (\Phi\varphi)_h^+(a_2) - k_2\,(\Phi\varphi)(a_2) = 0$;

3) $f_{hh}^{++}(a_2) = (\Phi\varphi)_{hh}^{++}(a_2) = (\Phi\varphi)_{h_1h_1}^{++}(a_2) = f_{h_1h_1}^{++}(a_2)$ для любых $h, h_1 \in D(a_2)$;

4) если обозначить за $c_1, c_2, \ldots, c_{m+2}$ — вершины полученного графа-звезды (с $m+2$ рёбрами одинаковой длины ℓ), отличные от узловой, тогда $f^+_{-h_i}(c_i) = \begin{cases} (\Phi\varphi)_{-h_j}(a_1 - 0 \cdot h_j), & c_i = a_1 \in Y,\, j \in \{1,2\} \\ (\Phi\varphi)_{-h_{j+2}}(b_j), & c_i = b_j,\, j = \overline{1,m} \end{cases} = 0.$

В силу теоремы единственности $v(x,t) = u^{(\Phi\varphi)}(x,t)$ на Γ_3 при любом $t > 0$.

Пусть $w(x,t)$ — решение задачи $V_4(\frac{\ell}{2}; \{a_1\}; k_1, 0, 0; (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(\mathrm{x}))$; оно существует, для этого покажем, что $g(x) = (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(\mathrm{x}) \in \mathrm{K}_4^{\mathrm{V}}(\frac{\ell}{2}; \{\mathrm{a}_1\}; \mathrm{k}_1, 0, 0)$.

1) $g(x) \in \widetilde{C}^2(R(\Gamma_1))$;

2) $g(a_2) = (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(a_2) = 0$, $g_{hh}^{++}(a_2) = (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})_{hh}^{++}(a_2) = 0$;

3) если ввести в рассмотрение вершины $\widetilde{b}_1 = a_2 + \frac{\|a_1 - a_2\|}{2} h_1$ и $\widetilde{b}_2 = a_2 + \frac{\|a_1 - a_2\|}{2} h_2$, то в итоге получим

$$\sum_{h \in D(\widetilde{b}_i)} g_h^+(\widetilde{b}_i) = g_{h_i}^+(\widetilde{b}_i) + g_{-h_i}^+(\widetilde{b}_i) = (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})_{h_i}^+(\widetilde{b}_i) + (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})_{-\mathrm{h_i}}^+(\widetilde{\mathrm{b}}_\mathrm{i}) = 0,$$

$g_{hh}^{++}(\widetilde{b}_i) = g_{\eta\eta}^{++}(\widetilde{b}_i)$ $\forall (h, \eta \in D(\widetilde{b}_i))$ $(i = 1,2)$ (по определению $\widetilde{C}^2(R(\Gamma_1))$, т. к. $(\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(x) \in \widetilde{C}^2(R(\Gamma_1))$, а $\widetilde{b}_i \in R(\Gamma_1)$ по построению);

4) $g_{-h_p}(a_1 - 0 \cdot h_p) - k_1\big(g(a_1 - 0 \cdot h_p) - g(a_1 - 0 \cdot h_q)\big) = (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})_{-h_p}(a_1 - 0 \cdot h_p) - k_1\big((\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(a_1 - 0 \cdot h_p) - (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(a_1 - 0 \cdot h_q)\big) = 0$ $(p \neq q \in \{1,2\})$;

5) $\sum\limits_{h \in D(a_2)} g_h^+(a_2) = \sum\limits_{h \in D(a_2)} (\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})_h^+(a_2) - k_2\,(\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(\mathrm{a}_2) = 0$ (т. к. $(\mathrm{H}\varphi\big|_{\Gamma_1})(a_2) = 0$).

В силу ранее предъявленной теоремы единственности $w(x,t) = u_1^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t)$.

Функция $u^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t) = \begin{cases} u_1^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t), & \Gamma_1 \\ 0, & \Gamma_2 \end{cases}$ является решением задачи (1)–(3) с функцией $(\mathrm{H}\varphi)(x)$, так как она удовлетворяет волновому уравнению на Γ и принадлежит $\widetilde{C}^2(R(\Gamma))$ (в силу того, что $u_1^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t)$ удовлетворяет волновому уравнению на Γ_1 и $u_1^{(\mathrm{H}\varphi)}(\cdot,t) \in \widetilde{C}^2(R(\Gamma_1))$ для любого $t > 0$, а $u^{(\mathrm{H}\varphi)}(x,t) \equiv 0$ на Γ_2), а так же по построению удовлетворяет краевым условиям в вершинах.

Замечание. Доказанное представление решения исследуемой задачи (1)–(3) в виде (4) позволяет утверждать, что обозначенная цель работы достигнута, так как оно (согласно [5–6]) в итоге предоставляет возможность описать решение посредством конечного числа арифметических операций, элементарных функций, квадратур и простых преобразований независимого аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса / В. А. Ильин, В. В. Тихомиров // Диф. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 5. — С. 692–704.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Пенкин, О. М. О краевой задаче на графе / О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 4. — С. 701–703.

4. Покорный, Ю. В. Волновое уравнение на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 1. — С. 16–18.

5. Найдюк, Ф. О. О волновой задаче на геометрическом графе / Ф. О. Найдюк // Межвузовский сборник научных трудов : Исследование нелинейных динамических систем. — 2013. — № 3. — С. 132–138.

6. Найдюк, Ф. О. Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода / Ф. О. Найдюк, В. Л. Прядиев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 115–122.

7. Голованева, Ф. В. Аналог формулы интегрирования по частям на геометрическом графе / Ф. В. Голованева, Е. В. Лылов, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 82–86.

8. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

9. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованёва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 145–157.

10. Об адаптации метода конечных элементов для модели колебаний струны с разрывными решениями / Ж. И. Бахтина, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 106–117.

REFERENCES

1. Ilyin V.A., Tikhomirov V.V. The wave equation with boundary control on two ends and the problem of complete damping of the oscillatory process. [Il'in V.A., Tixomirov V.V. Volnovoe uravnenie s granichnym upravleniem na dvux koncax i zadacha o polnom uspokoenii kolebatel'nogo processa]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 692–704.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Penkin O.M., Pokornyi Yu.V. About a boundary value problem on a graph. [Penkin O.M., Pokornyyj Yu.V. O kraevoyj zadache na grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 4, pp 701–703.

4. Pokorny Yu.V.,Pryadiev V.L., Borovskikh A.V. The wave equation on a spatial network. [Pokornyyj Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskix A.V. Volnovoe uravnenie na prostranstvennoyj seti].

Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics, 2003, vol. 388, no. 1, pp. 16–18.

5. About the wave problem on a geometric graph. [Nayjdyuk F.O. O volnovoyj zadache na geometricheskom grafe]. *Mezhvuzovskiyj sbornik nauchnyx trudov: Issledovanie nelineyjnyx dinamicheskix sistem — Interuniversity collection of scientific works: Investigation of nonlinear dynamical systems*, 2013, no. 3, pp. 132–138.

6. Naydyuk F.O., Pryadiev V.L. The formula for the continuation of the initial data in the d'Alembert solution for the wave equation with the third kind boundary condition. [Nayjdyuk F.O., Pryadiev V.L. Formula prodolzheniya nachal'nyx dannyx v reshenii Dalambera dlya volnovogo uravneniya na otrezke s kraevym usloviem tret'ego roda]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 1, pp. 115–122.

7. Golovaneva F.V., Lilov E.V., Shabrov S.A. The analogue of the formula of integration by parts on geometric graph. [Golovaneva F.V., Lylov E.V., Shabrov S.A. Analog formuly integrirovaniya po chastyam na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 82–86.

8. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lilov E.V. About the adaptation of the method of finite elements for the solution of a boundary value problem with Stieltjes differentials on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya resheniya granichnoyj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

9. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovaneva F.V. Adaptation of the finite element method for different order mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovanyova F.V. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya raznoporyadkovoyj matematicheskoyj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 145–157.

10. Bakhtina Zh.I., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On the adaptation of the finite elements method for a model of string oscillations with discontinuous solutions. [Baxtina Zh.I., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya modeli kolebaniyj struny s razryvnymi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 106–117.

Найдюк Ф. О., кандидат физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: xakepph@yandex.ru

Naidyuk F. O., candidate of physics and mathematics. Sci., Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: xakepph@yandex.ru