УДК 517.9

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ИМПУЛЬСНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С КАУЗАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

М. М. Кулманакова, В. В. Обуховский, Е. Л. Ульянова

ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина";
Воронежский государственный педагогический университет;
Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова;
Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 31.01.2020 г.

Аннотация. Рассматривается задача существования интегрального решения нелокальной начальной задачи для полулинейного каузального дифференциального включения в банаховом пространстве при наличии импульсных эффектов. Для решения задачи строится разрешающий многозначный оператор и исследуются его свойства. На этой основе доказываются две теоремы существования интегральных решений, причем в первой из них устанавливается также компактность множества решений.

Ключевые слова: каузальный оператор, нелокальная начальная задача, импульсное воздействие, полулинейное дифференциальное включение, каузальное включение, мера некомпактности, уплотняющий оператор, неподвижная точка, топологическая степень.

ON A NONLOCAL COUCHY PROBLEM FOR A SEMILINEAR IMPULSE DIFFERENTIAL INCLUSION WITH A CAUSAL OPERATOR IN A BANACH SPACE

M. M. Kulmanakova, V. V. Obukhovskii, E. L. Ulianova

Abstract. We consider the problem of existence of mild solution to a nonlocal initial value problem for a semilinear causal differential inclusion in a Banach space at the presence of impulse effects. To do this, we construct the resolving multivalued operator and study its properties. On that base, we prove two theorems on the existence of mild solutions and prove the compactness of the solution set in the first of them.

Keywords: causal operator, nonlocal initial problem, impulse effect, semilinear differential inclusion, causal inclusion, measure of noncompactness, condensing operator, fixed point, topological degree.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы активно изучаются дифференциальные, функционально-дифференциальные и операторные уравнения и включения с каузальными операторами. Понятие каузального (или вольтеррового по А. Н. Тихонову [1]) оператора возникло в тридцатые годы прошлого века (см. также [2]) в связи с решением задач математической физики и

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009). Результаты В. В. Обуховского в разделе 4 получены при поддержке Российского Научного Фонда (грант no. 20–11–20131) в Институте проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова.

инженерии и с тех пор оказалось весьма эффективным и унифицирующим средством в дифференциальных уравнениях, интегро-дифференциальных уравнениях, функционально-дифференциальных уравнениях с конечным и бесконечным запаздыванием, интегральных уравнениях Вольтерра, функциональных уравнениях нейтрального типа и др. (см., например, монографию [3]). Различные проблемы, связанные с существованием решений различных типов, их единственностью, топологическими свойствами и приложениями рассматривались для функционально-дифференциальных и операторных уравнений и включений с каузальными операторами в работах [4–14] и других.

В настоящей работе исследуется существование интегральных решений нелокальной начальной задачи для полулинейных дифференциальных включений в банаховом пространстве с многозначным каузальным оператором при наличии импульсных эффектов. Отметим, что импульсные дифференциальные уравнения и включения моделируют скачкообразные изменения в непрерывной динамике исследуемого объекта и в этой связи они также находят широкие применения в физике, экономике, популяционной динамике и других разделах современного естествознания. Изучению импульсных дифференциальных уравнений и включений посвящены монографии [15–17] и многие работы (см., например, [4, 11, 18, 19]). В то же время, начиная со статьи [20], в очень большом числе работ исследовались нелокальные задачи Коши типа рассмотренной в настоящей статье для дифференциальных уравнений и включений в банаховом пространстве (см., например, [18–19], [21–22] и др.)

Структура работы такова. В следующем разделе собраны необходимые сведения из теории мер некомпактности и уплотняющих многозначных отображений. В Разделе 3 мы даем определение многозначного каузального оператора и приводим примеры. В следующем разделе формулируется основная задача существования интегрального решения нелокальной задачи Коши для полулинейного каузального дифференциального включения с импульсным воздействием, определяется разрешающий многозначный оператор этой задачи и исследуются его свойства. Показано, в частности, что этот оператор является уплотняющим относительно специальной меры некомпактности в функциональном пространстве (Теорема 4.2). На этой основе доказываются два утверждения о существовании интегральных решений (Теоремы 4.3 и 4.5), причем в первой из этих теорем показана компактность множества решений. В последнем разделе работы в качестве примеров приводятся теоремы о существовании интегральных решений нелокальной импульсной задачи Коши для функционально-дифференциального включения с запаздыванием и интегро-дифференциального включения Вольтерра.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нам понадобятся некоторые сведения из многозначного анализа и теории топологической степени для уплотняющих отображений (см., например, [23–26]).

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, символом $P(Y)$ обозначим совокупность всех непустых подмножеств Y. Обозначим

$$C(Y) = \{W \in P(Y) : W \text{ замкнутое множество}\};$$

$$Cv(Y) = \{W \in C(Y) : W \text{ выпуклое множество}\};$$

$$K(Y) = \{W \in P(Y) : W \text{ компактное множество}\};$$

$$Kv(Y) = \{W \in K(Y) : W \text{ выпуклое множество}\}.$$

Отображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ будем называть многозначным (или мультиотображением) и будем обозначать его также $\mathcal{F} : X \multimap Y$.

Определение 2.1. $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ *называется*

(i) *полунепрерывным сверху (пн.св.), если* $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset \mathcal{V}\}$ *является открытым подмножеством* X *для каждого открытого множества* $\mathcal{V} \subset Y$;

(ii) *замкнутым, если его график* $G_{\mathcal{F}} = \{(x,y) : x \in X, y \in \mathcal{F}(x)\}$ *является замкнутым подмножеством* $X \times Y$.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство.

Лемма 2.1. ([26], Теорема 1.1.12). *Пусть замкнутое мультиотображение* $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ *является квазикомпактным, т.е. для каждого компактного множества* $K \subset X$ *множество* $\mathcal{F}(K) = \cup_{x \in K}\mathcal{F}(x)$ *относительно компактно в* Y. *Тогда мультиотображение* $\mathcal{F}$ *полунепрерывно сверху.*

Пусть подмножество $[a,b] \subset \mathbb{R}$ снабжено мерой Лебега.

Определение 2.2. *Мультифункция* $\mathcal{F} : [a,b] \to K(Y)$ *называется измеримой, если множество* $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V})$ *измеримо для каждого открытого множества* $\mathcal{V} \subset Y$.

Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant 0)$ — некоторое частично упорядоченное множество, $\mathcal{E}$ — банахово пространство.

Определение 2.3. *Отображение* $\beta : P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ *называется мерой некомпактности (МНК) в* $\mathcal{E}$, *если для любого* $\Omega \in P(\mathcal{E})$ *выполнено*

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{co}$ *обозначает замыкание выпуклой оболочки множества.*

Мера некомпактности β *называется:*

1) *монотонной, если из* $\Omega_1, \Omega_2 \in P(\mathcal{E})$ *и* $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ *вытекает, что* $\beta(\Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_2)$;

2) *несингулярной, если для любых* $\Omega \in P(\mathcal{E})$, $a \in \mathcal{E}$ *выполнено* $\beta(\Omega \cup \{a\}) = \beta(\Omega)$;

3) *инвариантной относительно объединения с компактным множеством, если для любых* $\Omega \in P(\mathcal{E})$ *и* K — *относительно компактного подмножества* $\mathcal{E}$ *выполнено* $\beta(\Omega \cup K) = \beta(\Omega)$;

4) *полуаддитивной, если* $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\beta(\Omega_0),\beta(\Omega_1)\}$ *для всех* Ω_0, $\Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;

5) *инвариантной относительно отражения в нуле, если* $\beta(-\Omega) = \beta(\Omega)$ *для каждого* $\Omega \in P(\mathcal{E})$;

6) *вещественной, если* $\mathcal{A} = [0,+\infty]$ *с естественным порядком и для любого ограниченного множества* $\Omega \in P(\mathcal{E})$ *выполнено* $\beta(\Omega) < \infty$.

Если $\mathcal{A}$ — *конус в нормированном пространстве, то МНК* β *называется:*

7) *алгебраически полуаддитивной, если* $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ *для всех* Ω_0, $\Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;

8) *правильной (регулярной), если* $\beta(\Omega) = 0$ *равносильно относительной компактности* Ω.

Мерой некомпактности, для которой выполнены все вышеприведенные свойства, является МНК Хаусдорфа

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon- \text{ сеть}\}.$$

Отметим следующее свойство МНК Хаусдорфа, которое мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathfrak{L} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — *ограниченный линейный оператор. Тогда для любого ограниченного множества* $\Omega \subset \mathcal{E}$ *выполнено:*

$$\chi_{\mathcal{E}}(\mathfrak{L}\Omega) \leqslant \|\mathfrak{L}\| \, \chi_{\mathcal{E}}(\Omega).$$

Рассмотрим следующие вещественные меры некомпактности, определенные в пространстве непрерывных функций $C([a,b];E)$ со значениями в банаховом пространстве E :

1) модуль равностепенной непрерывности:

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\max_{|t_1-t_2|<\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\|_E;$$

2) модуль послойной некомпактности:

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]}\chi_E(\Omega(t)),$$

где $\Omega(t) = \{x(t) : x \in \Omega\}$;

3) затухающий модуль послойной некомпактности

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} e^{-Lt}\chi_E(\Omega(t)),$$

где $L > 0$ — некоторая константа.

Для данных мер некомпактности выполняются все вышеприведенные свойства кроме правильности.

Пусть X — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$, β — МНК в $\mathcal{E}$.

Определение 2.4. *Пн. св. мультиотображение $\mathcal{F}\colon X\to K(\mathcal{E})$ или пн. св. семейство мультиотображений $\Psi\colon X\times[0,1]\to K(\mathcal{E})$ называются β-уплотняющими, если для любого $\Omega\subset X$, которое не является относительно компактным, мы имеем, соответственно,*

$$\beta\left(\mathcal{F}\left(\Omega\right)\right) \ngeq \beta\left(\Omega\right)$$

или

$$\beta\left(\Psi\left(\Omega\times[0,1]\right)\right) \ngeq \beta\left(\Omega\right).$$

Пусть теперь β — монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{E}$ - непустое выпуклое замкнутое множество и $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$ — непустое ограниченное относительно открытое подмножество $\mathcal{D}$. Далее, пусть $\mathcal{F} : \overline{\mathfrak{U}}_{\mathcal{D}} \to Kv(\mathcal{D})$ — β-уплотняющее мультиотображение такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x\in\partial\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$, где $\overline{\mathfrak{U}}_{\mathcal{D}}$ и $\partial\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$ обозначают замыкание и границу множества $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$ в относительной топологии пространства $\mathcal{D}$.

Тогда для соответствующего многозначного векторного поля (мультиполя) $i-\mathcal{F}$ определена целочисленная характеристика

$$deg_{\mathcal{D}}\left(i-\mathcal{F},\overline{\mathfrak{U}}_{\mathcal{D}}\right),$$

называемая относительной топологической степенью (см. [26]). Эта характеристика обладает всеми стандартными свойствами топологической степени, в частности, ее отличие от нуля влечет существование по крайней мере одной неподвижной точки $x\in\mathfrak{U},\ x\in\mathcal{F}(x)$.

В качестве следствия этой теории топологической степени мы получаем следующие принципы неподвижной точки, которые будут использованы в дальнейшем.

Предложение 2.1. (см. [26], Свойство 3.2.1 и Теорема 3.3.2) *Пусть β — монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{E}$ — непустое выпуклое замкнутое множество и $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$ — непустое ограниченное выпуклое относительно открытое подмножество $\mathcal{D}$. Пусть $\Psi\colon\overline{\mathfrak{U}}_{\mathcal{D}}\times[0,1]\to Kv(\mathcal{D})$ — β-уплотняющее семейство мультиотображений такое, что $x\notin\Psi(x,\lambda)$*

для всех $x \in \partial\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$, $\lambda \in [0,1]$ *и* $\Psi(\partial\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}, 0) \subset \overline{\mathfrak{U}}_{\mathcal{D}}$. *Тогда множество неподвижных точек мультиотображения* $\Psi(\cdot, 1)$,

$$Fix\Psi(\cdot, 1) = \{x\colon x \in \Psi(x, 1)\}$$

— непустое компактное подмножество $\mathfrak{U}_{\mathcal{D}}$.

Предложение 2.2. (см. [26], Следствие 3.3.1) *Пусть* β *— несингулярная мера некомпактности в* $\mathcal{E}$, $\mathfrak{M}$ *— непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{F} : \mathfrak{M} \to Kv(\mathfrak{M})$ *—* β*-уплотняющее мультиотображение. Тогда* $\mathcal{F}$ *имеет хотя бы одну неподвижную точку* $x_\star \in \mathfrak{M}, x_\star \in \mathcal{F}(x_\star)$.

3. КАУЗАЛЬНЫЕ МУЛЬТИОПЕРАТОРЫ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, для заданного $T > 0$ пусть $L^1\left([0,T]; E\right)$ – банахово пространство всех суммируемых по Бохнеру функций $f : [0,T] \to E$ с обычной нормой

$$\|f\|_1 = \int_0^T \|f(s)\|_E \, ds.$$

При $E = \mathbb{R}$ в обозначении пространства будем опускать этот символ, а конус неотрицательных суммируемых функций в этом пространстве будем обозначать $L^1_+[0,T]$.

Для заданных точек $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < T$ и $h \geqslant 0$ обозначим $PC([-h,T]; E)$ пространство кусочно-непрерывных функций $y\colon [-h,T] \to E$, которые непрерывны при $t \in [-h,T] \backslash \{t_1,...,t_m\}$, непрерывны слева при $t = t_k$, $k = 1,...,m$ и имеют конечный правый предел $y(t_k^+)$, $k = 1,..., m$. Пространство $PC([-h,T]; E)$ с нормой равномерной сходимости

$$\|y\|_{PC} := \sup_{-h \leqslant t \leqslant T} \|y(t)\|_E$$

- банахово. Аналогичным образом определяется пространство $PC([0,T]; E)$.

Для произвольного подмножества $\mathcal{N} \subset L^1\left([0,T]; E\right)$ и $\tau \in (0,T)$ обозначим

$$\mathcal{N} \mid_{[0,\tau]} = \{f \mid_{[o,\tau]}\colon f \in \mathcal{N}\}$$

сужение $\mathcal{N}$ на $[0,\tau]$.

Определение 3.1. *Мультиотображение* $\mathcal{Q} : PC\left([-h,T]; E\right) \multimap L^1\left([0,T]; E\right)$ *будем называть каузальным мультиоператором, если для каждого* $\tau \in (0,T)$ *и для любых* $v(\cdot), w(\cdot) \in PC\left([-h,T]; E\right)$ *условие* $v \mid_{[-h,\tau]} = w \mid_{[-h,\tau]}$ *влечет* $\mathcal{Q}(v) \mid_{[0,\tau]} = \mathcal{Q}(w) \mid_{[0,\tau]}$.

Рассмотрим несколько примеров каузальных операторов. Для $h > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство кусочно-непрерывных функций $c\colon [-h,0] \to E$ с конечным числом точек разрыва первого рода, снабженное нормой

$$\|c\|_{\mathcal{C}} = \frac{1}{h}\int_{-h}^0 \|c(t)\|_E dt. \tag{1}$$

Отметим, что для любого $y \in PC([-h,T]; E)$ функция $\pi\colon [0,T] \to \mathcal{C}$, заданная как $\pi(t) = y_t$, где $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\theta \in [-h,0]$ является непрерывной.

Пример 3.1. Предположим, что мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{C} \to Kv\left(E\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ F суперпозиционно селектируемо, т.е. для любой непрерывной функции $q\colon [0,T] \to \mathcal{C}$ мультифункция $t \in [0,T] \multimap F\left(t,q(t)\right)$ допускает измеримое сечение (см., например, [24]);

$(F2)$ для любого $r > 0$ найдется функция $\alpha_r \in L^1_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,c)\|_E := \sup\{\|z\|_E : z \in F(t,c)\} \leqslant \alpha_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|c\|_{\mathcal{C}} \leqslant r$.

Из условий $(F1)-(F2)$ вытекает, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : PC([-h;T];E) \to P(L^1([0,T];E))$, заданный как

$$\mathcal{P}_F(y) = \{f \in L^1([0,T];E) : f(t) \in F(t,y_t) \text{ п.в. } t \in [0,T]\}$$

корректно определен. Очевидно, что мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

Пример 3.2. Пусть $F : [0,T] \times \mathcal{C} \to Kv(E)$ — мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(F1)-(F2)$ Примера 3.1. Предположим, что $\{K(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ является непрерывным по норме семейством ограниченных линейных операторов в E и $m \in L^1([0,T];E)$ заданная функция.

Рассмотрим интегральный мультиоператор Вольтерра $\mathcal{V} : PC\left([-h,T];E\right) \multimap L^1\left([0,T];E\right)$, определенный как

$$\mathcal{V}(y)(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)F(s,y_s)ds,$$

т.е.$\mathcal{V}(y) = \{z \in L^1\left([0,T];E\right) : z(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F(y)\}$. Также очевидно, что мультиоператор $\mathcal{V}$ является каузальным.

Будем предполагать, что каузальный оператор $\mathcal{Q} : PC\left([-h,T];E\right) \to C\left(L^1\left([0,T];E\right)\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(\mathcal{Q}1)$ $\mathcal{Q}$ является слабо замкнутым в следующем смысле: условия $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset PC\left([-h,T];E\right)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1\left([0,T];E\right)$, $f_n \in \mathcal{Q}(y_n)$, $n \geqslant 1$, $y_n \to y_0$, $f_n \rightharpoonup f_0$ влекут $f_0 \in \mathcal{Q}(y_0)$;

$(\mathcal{Q}2)$ для любого $r > 0$ найдется функция $\delta_r(\cdot) \in L^1_+\left([0,T]\right)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(y)(t)\|_E \leqslant \delta_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|y\|_{PC} \leqslant r$.

$(\mathcal{Q}3)$ существует функция $k(\cdot) \in L^1_+([0,T])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Delta \subset PC\left([-h,T];E\right)$ выполнено

$$\chi_E\left(\mathcal{Q}\left(\Delta\right)(t)\right) \leqslant k(t) \sup_{-h \leqslant s \leqslant t} \chi_E(\Delta(s)) \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

4. ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ КАУЗАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $A : D(A) \subseteq E \to E$ — замкнутый линейный оператор, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At} (см., например, [26]).

Пусть $\mathcal{Q} : PC\left([-h,T];E\right) \to Cv\left(L^1\left([0,T];E\right)\right)$ – каузальный оператор, удовлетворяющий условиям $(\mathcal{Q}1)$-$(\mathcal{Q}3)$.

Пусть заданы импульсные отображения $I_k : E \to E$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяющие условию:

$(I1)$ каждое отображение I_k вполне непрерывно.

Пусть $C([-h,0];E)$ — пространство непрерывных функций $\varphi\colon [-h,0] \to E$ с нормой равномерной сходимости $\|\varphi\|_C$. Пусть отображение $g : PC\,([-h,T];E) \to C\,([-h,0];E)$ удовлетворяет условиям:

$(g1)$ g вполне непрерывно;

$(g2)$ $g(u)(0) = 0$ для всех $u \in PC\,([-h,T];E)$.

Рассматривается задача существования интегрального решения $y \in PC([-h,T];E)$ следующей импульсной нелокальной краевой задачи

$$y'(t) \in Ay(t) + \mathcal{Q}(y)(t), \qquad t \in [0,T]\backslash\{t_1,...,t_m\}, \tag{2}$$

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y(t_k)), \quad k = 1,...,m, \tag{3}$$

$$y(\tau) + g(y)(\tau) = \psi(\tau), \qquad \tau \in [-h,0], \tag{4}$$

где $\psi \in C\,([-h,0];E)$ — заданная функция.

Определение 4.1. *Функция $y \in PC\,([-h,T];E)$ называется интегральным решением задачи (2)–(4), если она удовлетворяет на отрезке $[-h,0]$ соотношению (4), а на отрезке $[0,T]$ имеет вид*

$$y(t) = e^{At}(\psi(0) - g(y)(0)) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds + \sum_{0<t_k<t} e^{A(t-t_k)} I_k(y(t_k)),$$

где $f \in \mathcal{Q}(y)$.

Для исследования решений данной задачи рассмотрим оператор Коши $\mathcal{L}\colon L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$, определенный следующим образом (см. [26]):

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Для описания основного свойства этого оператора нам понадобится следующее понятие.

Определение 4.2. *Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ называется полукомпактной, если она интегрально ограничена, т.е. существует функция $\zeta \in L^1_+([0,T])$ такая, что*

$$\|f_n(t)\|_E \leqslant \zeta(t) \text{ для п.в. } t \in [0,T],\ n = 1,2...$$

и множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,T]$.

Лемма 4.1. ([26], Предложение 4.2.1.) *Каждая полукомпактная последовательность слабо компактна в $L^1([0,T];E)$.*

Лемма 4.2. ([26], Теорема 5.1.1.) *Для каждой полукомпактной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $L^1([0,T];E)$ последовательность $\{\mathcal{L}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна в $C([0,T];E)$ и, более того, слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f_0$ влечет $\mathcal{L}f_n \to \mathcal{L}f_0$.*

Рассмотрим теперь мультиоператор $G\colon PC([-h,T];E) \multimap C([0,T];E)$, заданный как

$$G(y) = \mathcal{L} \circ \mathcal{Q}(y).$$

Отметим следующее важное свойство мультиоператора G.

Теорема 4.1. *Мультиоператор G является пн.св. мультиотображением с выпуклыми компактными значениями.*

Доказательство.

Покажем, что мультиоператор G является замкнутым. Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset PC([-h,T];E)$, $y_n \to y_0$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$, $z_n \in G(y_n)$, $n \geqslant 1$, и $z_n \to z_0$. Возьмем произвольную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ такую, что $f_n \in \mathcal{Q}(y_n)$, $z_n = \mathcal{L}(f_n)$, $n \geqslant 1$. Из условия $(\mathcal{Q}2)$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрально ограничена. Условие $(\mathcal{Q}3)$ означает, что

$$\chi_E(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant k(t) \sup_{-h \leqslant s \leqslant t} \chi_E(\{(y_n(s)\}_{n=1}^{\infty}) = 0$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и следовательно последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна.

Из Леммы 4.1 следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо компактна, значит мы можем предположить, без ограничения общности, что $f_n \rightharpoonup f_0$. Лемма 4.2 влечет $z_n = \mathcal{L}f_n \to \mathcal{L}f_0 = z_0$. С другой стороны, применяя условие $(\mathcal{Q}1)$ получаем $f_0 \in \mathcal{Q}(y_0)$ и таким образом $z_0 \in \mathcal{L} \circ \mathcal{Q}(y_0) = G(y_0)$, т.е. мультиоператор G замкнут.

Для заданного $y \in PC(([-h,T];E)$ рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G(y)$. Пусть $z_n = \mathcal{L}(f_n)$, $n \geqslant 1$, где $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{Q}(y)$. Из условий $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$ вытекает, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна, а тогда из Лемм 4.1 и 4.2 следует, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна. Компактность множества $G(y)$ следует из его замкнутости, а выпуклость — из выпуклости значений мультиотображения $\mathcal{Q}$ и линейности оператора $\mathcal{L}$.

Более того, из аналогичных рассуждений следует, что если мы рассмотрим сходящуюся последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset PC([-h,T];E)$, то любая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E,)$ такая, что $z_n \in G(y_n), n \geqslant 1$ относительно компактна. Это означает, что мультиотображение G квазикомпактно и применяя Лемму 2.1 мы заключаем, что оно пн.св. □

Обозначим теперь через $\mathcal{D}$ множество функций $u \in PC([0,T];E)$, удовлетворяющих начальному условию

$$u(0) = \psi(0).$$

Нетрудно видеть, что из условий, наложенных на отображение g вытекает, что $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое подмножество $PC([0,T];E)$.

Для функции $u \in \mathcal{D}$ обозначим $y[u] \in PC([-h,T];E)$ функцию, заданную формулой

$$y[u](t) = \begin{cases} \psi(t) - g(u)(t), & t \in [-h,0], \\ u(t), & t \in [0,T]., \end{cases}$$

Ясно. что отображение $\iota\colon \mathcal{D} \to PC([-h,T];E)$, $\iota(u) = y[u]$ непрерывно.

Рассмотрим теперь разрешающий мультиоператор $\Gamma\colon \mathcal{D} \multimap \mathcal{D}$ задачи (2)-(4) определенный как

$$\Gamma(u) = j(u) + \mathcal{G}(u),$$

где

$$j(u)(t) = e^{At}\psi(0) + \sum_{0<t_k<t} e^{A(t-t_k)} I_k(u(t_k)), \quad t \in [0,T],$$

$$\mathcal{G}(u) = G(y[u]).$$

Нетрудно видеть, что если $u \in \mathcal{D}$ есть неподвижная точка Γ, то функция $y = y[u] \in PC([-h,T];E)$ является интегральным решением задачи (2) — (4).

Так как отображение j очевидно непрерывно и $\mathcal{G}(u) = G(\iota(u))$, используя свойства непрерывности композиции и суммы многозначных отображений (см., например, [24], Теоремы

1.3.11 и 1.3.19) и Теорему 4.1. мы можем сделать вывод о том, что мультиоператор Γ имеет выпуклые компактные значения и полунерерывен сверху.

Нашей задачей теперь будет являться доказательство того факта. что мультиоператор Γ будет являться уплотняющим относительно соответствующей МНК в пространстве $PC([0,T];E)$.

Нам понадобится следующее утверждение (см. [26], Лемма 4.2.1 и Теорема 4.2.2).

Лемма 4.3. *Пусть последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$, *интегрально ограничена и существует функция* $\upsilon \in L^1_+([0,T])$ *такая, что*

$$\chi_E\left(\{f_n\left(t\right)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant \upsilon(t) \text{ для п.в. } t \in [0,T].$$

Тогда

$$\chi_E\left(\{\mathcal{L}f_n\left(t\right)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant 2D\int_0^t \upsilon(s)ds \tag{5}$$

для всех $t \in [0,T]$, *где*

$$D = \max_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|. \tag{6}$$

Определим теперь модифицированный модуль равностепенной непрерывности mod_{PC} в пространстве $PC([0,T];E)$ следующим образом. Положим $t_{m+1} = T$ и пусть для произвольного множества $\Omega \subset PC([0,T];E)$:

$$\Omega_1 = \{y|_{[0,t_1]} : y \in \Omega\}$$

и

$$\Omega_i = \{z \in C([t_{i-1},t_i];E) \colon z(t_{i-1}) = y(t_{i-1}^-), z(t) = y(t), t_{i-1} < t \leqslant t_i \ : y \in \Omega\},\ 2 \leqslant i \leqslant m+1.$$

Нетрудно видеть, что относительная компактность множества Ω равносильна относительной компактности всех множеств Ω_i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$.

Пусть $\Omega \subset PC([0,T];E)$ - ограниченное множество. Положим

$$mod_{PC}(\Omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant m+1} mod_C(\Omega_i).$$

Зададим теперь затухающий модуль послойной некомпактности в пространстве $PC([0,T];E)$

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi_E(\Omega(t)),$$

где константа $L > 0$ выбрана так, что

$$q = \sup_{t\in[0,T]} \left[2D\int_0^t e^{-L(t-s)}k(s)ds\right] < 1. \tag{7}$$

Здесь D определено формулой (6), а k — функция из условия ($\mathcal{Q}3$).

Рассмотрим меру некомпактности ν_{PC} в пространстве $PC([0,T];E)$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$. На ограниченном подмножестве $\Omega \subset PC([0,T];E)$ значения ν_{PC} определим следующим образом:

$$\nu_{PC}(\Omega) = \left(\gamma\left(\Omega\right), mod_{PC}\left(\Omega\right)\right).$$

Легко видеть, что МНК ν_{PC} монотонна, несингулярна и алгебраически полуаддитивна. Из теоремы Арцела-Асколи следует, что она также правильна.

В силу условий, наложенных на операторы g и I_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, оператор j, согласно теореме Арцела–Асколи, будет вполне непрерывным. Таким образом, для решения поставленной задачи нам достаточно доказать уплотняемость мультиоператора $\mathcal{G}$.

Теорема 4.2. *Мультиоператор $\mathcal{G}$ является ν_{PC}-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ ограниченное множество, такое, что

$$\nu_{PC}\left(\mathcal{G}\left(\Omega\right)\right) \geqslant \nu_{PC}\left(\Omega\right). \tag{8}$$

Покажем, что тогда множество Ω является относительно компактным.

В силу сепарабельности пространства E мы можем без ущерба для общности считать, что множества Ω и $\mathcal{G}(\Omega)$ счетны: $\Omega = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{G}(\Omega) = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и, более того, $z_n \in \mathcal{G}(u_n)$ для всех $n \geqslant 1$. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ такова, что $f_n \in \mathcal{Q}(y[u_n])$ и $z_n = \mathcal{L}(f_n)$ для всех $n \geqslant 1$. Заметим, что в силу условия $(g1)$ последовательность $\{y[u_n]|_{[-h,0]}\}_{n=1}^{\infty} \subset C([-h,0];E)$ относительно компактна.

Неравенство (8) означает, что

$$\gamma(\{\mathcal{L}f_n\}_{n=1}^{\infty}) \geqslant \gamma(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}). \tag{9}$$

Применяя условие $(\mathcal{Q}3)$ получаем для п.в. $t \in [0,T]$

$$\chi_E\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant k(t) \sup_{s\in[-h,t]} \chi_E\left(\{(y[u_n])(s)\}_{n=1}^{\infty}\right) = k(t)\varphi\left(\{u_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right) =$$

$$= k(t)e^{Lt}e^{-Lt}\varphi\left(\{u_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant k(t)e^{Lt}\gamma\left(\{u_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant$$

$$\leqslant k(t)e^{Lt}\gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant k(t)e^{Lt} \cdot \gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right).$$

По Лемме 4.3 мы имеем для каждого $t \in [0,T]$:

$$\chi_E\left(\{\mathcal{L}f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant 2D\int_0^t k(s)e^{Ls}ds \cdot \gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \leqslant 2D\int_0^t e^{Ls}k(s)ds \cdot \gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right). \tag{10}$$

Теперь из неравенств (9) и (10) следует, что

$$\gamma(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}) \leqslant 2D \sup_{t\in[0,h]} \int_0^t e^{-L(t-s)}k(s)ds \cdot \gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = q \cdot \gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right),$$

то есть

$$\gamma\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0,$$

откуда получаем, что для почти всех $t \in [0,T]$:

$$\chi_E\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0.$$

Из условия $(\mathcal{Q}2)$ тогда вытекает, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна, и значит, по Лемме 4.2, относительно компактна последовательность $\{\mathcal{L}f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Но это означает, что

$$\nu_{PC}\left(\mathcal{G}\left(\Omega\right)\right) = \nu_{PC}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = (0,0),$$

и из (8) мы имеем

$$\nu_{PC}(\Omega) = (0,0),$$

завершая доказательство. □

Для того, чтобы получить теорему существования решения задачи (2) — (4) наложим на каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$ более тонкое условие локальной интегральной ограниченности. Введем в пространстве $\mathcal{C}$ норму равномерной сходимости

$$\|c\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{-h\leqslant t\leqslant 0} \|c(t)\|_E.$$

Заметим, что

$$\|c\|_{\mathcal{C}} \leqslant \|c\|_{\mathcal{PC}}, \quad \forall c \in \mathcal{C}, \tag{11}$$

где $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ - интегральная норма в $\mathcal{C}$, определенная формулой (1).

Рассмотрим следующее условие подлинейного роста:

($\mathcal{Q}2'$) существует функция $\alpha \in L^1_+(0,T)$ такая что

$$\|\mathcal{Q}(y)(t)\|_E \leqslant \alpha(t)\,(1 + \|y_t\|_{\mathcal{PC}}) \quad \text{п.в. } t \in [0,T]$$

для всех $y \in C([-h,T];E)$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* ($\mathcal{Q}1$), ($\mathcal{Q}2'$), ($\mathcal{Q}3$), ($I1$), ($g1$) − ($g2$), *а также следующие условия ограниченности:*

($I2$) *существуют* $b_k > 0$, $k = 1,2,...,m$ *такие, что* $\|I_k(x)\|_E \leqslant b_k, \forall x \in E$;

($g3$) *существует* $K > 0$ *такое, что* $\|g(u)\|_C \leqslant K$, $\forall u \in PC\left([-h,T];E\right)$.

Тогда множество интегральных решений задачи (2) − (4) *непусто и компактно.*

Доказательство. Покажем, что множество всех возможных решений $u \in \mathcal{D}$ однопараметрического семейства включений

$$u \in j(u) + \lambda\mathcal{G}(u), \quad \lambda \in [0,1] \tag{12}$$

априори ограничено. Действительно, любое решение включения (12) имеет вид

$$u(t) = e^{At}\psi(0) + \sum_{0<t_k<t} e^{A(t-t_k)} I_k(u(t_k)) + \lambda\int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

где $f \in \mathcal{Q}(y[u])$ и следовательно, согласно ($\mathcal{Q}2'$), удовлетворяет оценке

$$\|f(t)\|_E \leqslant \alpha(t)\,(1 + \|(y[u])_t\|_{\mathcal{PC}})\,, \quad \text{п.в. } t \in [0,T].$$

Но тогда из представления (13) мы получаем для каждого $t \in [0,T]$ оценку

$$\|u(t)\|_E \leqslant D\|\psi\|_C + Db + D\int_0^t \|f(s)\|\,ds, \tag{14}$$

где $b = \sum_{k=1}^m b_k$. Далее получаем

$$\|u(t)\|_E \leqslant D\left(\|\psi\|_C + b\right) + D\int_0^t \alpha(s)\left(1 + \|(y[u])_s)\|_{\mathcal{PC}}\right)\,ds$$

$$\leqslant D\left(\|\psi\|_C + b\right) + D\int_0^t \alpha(s)\left(1 + \|\psi\|_C + K + \sup_{0\leqslant\tau\leqslant s}\|u(\tau)\|_E\right)ds.$$

Последнее выражение является неубывающей функцией от t, поэтому мы получаем

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|_E \leqslant D\left(\|\psi\|_C + b\right) + D\int_0^t \alpha(s)\left(1+\|\psi\|_C + K + \sup_{0\leqslant\tau\leqslant s}\|u(\tau)\|_E\right) ds.$$

Это означает, что кусочно-непрерывная функция $v(t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|_E$ удовлетворяет оценке

$$v(t) \leqslant D\Big(\|\psi\|_C + b\Big) + D\Big(1+\|\psi\|_C + K\Big)\|\alpha\|_{L^1} + D\int_0^t \alpha(s)v(s)\,ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла (см., например, [27]), получаем желаемую априорную оценку

$$\|u\|_{PC} \leqslant Ne^{D\|\alpha\|_{L^1}},$$

где $N = D\Big(\|\psi\|_C + b + (1+\|\psi\|_C + K)\|\alpha\|_{L^1}\Big)$.

Возьмем теперь замкнутый шар $B(0,R) \subset PC([0,T];E)$ радиуса $R > Ne^{D\|\alpha\|_{L^1}}$, тогда выпуклое замкнутое множество $\mathcal{D}_B = \mathcal{D} \cap B(0,R)$ непусто, так как оно содержит внутри себя (в относительной топологии пространства $\mathcal{D}$) функции $j(u), \forall u \in \mathcal{D}$. С другой стороны оно априори содержит внутри себя все неподвижные точки семейства мультиотображений $\Psi\colon \mathcal{D}_B \times [0,1] \multimap \mathcal{D}$,

$$\Psi(u,\lambda) = j(u) + \lambda\mathcal{G}(u).$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что мультиотображение Ψ имеет выпуклые компактные значения, полунепрерывно сверху и является ν_{PC}-уплотняющим. Это означает, что мультиотображение Ψ удовлетворяет условиям Предложения 2.1 и, следовательно множество неподвижных точек $Fix\Psi(\cdot,1) = Fix\Gamma$ непусто и компактно. Но тогда, в силу непрерывности отображения ι, непустым и компактным является и множество решений задачи $(2)-(4)$: $\Sigma = \iota(Fix\Gamma)$. □

Отметим теперь, что если мы рассматриваем задачу Коши, не являющуюся нелокальной (то есть при $g \equiv 0$), то аналогичная теорема существования может быть получена при следующем условии ограниченности на импульсные функции:

$(I2')$ существуют $b_k > 0$, $k = 1,2,...,m$ такие, что $b = \sum_{k=1}^m b_k < \frac{1}{D}$ и

$$\|I_k(x)\|_E \leqslant b_k\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* $(\mathcal{Q}1)$, $(\mathcal{Q}2')$, $(\mathcal{Q}3)$, $(I1)$, $(I2')$. *Тогда множество интегральных решений задачи*

$$y'(t) \in Ay(t) + \mathcal{Q}(y)(t), \qquad t \in [0,T]\backslash\{t_1,...,t_m\}, \tag{15}$$

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y(t_k)), \quad k = 1,...,m, \tag{16}$$

$$y(\tau) = \psi(\tau), \qquad \tau \in [-h,0], \tag{17}$$

непусто и компактно.

Доказательство. В данном случае любое решение операторного включения (12) имеет вид

$$u(t) = e^{At}\psi(0) + \sum_{0<t_k<t} e^{A(t-t_k)}I_k(u(t_k)) + \lambda\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{18}$$

где $f \in \mathcal{Q}(y[u])$. Получаем следующую оценку для каждого $t \in [0,T]$:

$$\|u(t)\|_E \leqslant D\|\psi(0)\|_E + D\sum_{0<t_k<t}\|I_k(u(t_k))\|_E + D\int_0^t \|f(s)\|_E\,ds$$

$$\leqslant D\|\psi(0)\|_E + D\sum_{0<t_k<t} b_k\|u(t_k)\|_E + D\int_0^t \alpha(s)\left(1+\|(y[u])_s)\|_{\mathcal{PC}}\right)ds$$

$$\leqslant D\|\psi(0)\|_E + Db\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(t)\|_E + D\int_0^t \alpha(s)\left(1+\|\psi\|_C+\sup_{0\leqslant\tau\leqslant s}\|u(\tau)\|_E\right)ds.$$

Как и прежде, замечаем что последнее выражение является неубывающей функцией от t, в силу чего для функции $v(t)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|u(\tau)\|_E$ мы получаем оценку

$$v(t)\leqslant D\|\psi\|_C + Dbv(t) + D\Big(1+\|\psi\|_C\Big)\|\alpha\|_{L^1} + D\int_0^t \alpha(s)v(s)\,ds,$$

откуда

$$v(t)\leqslant \frac{D}{1-Db}\Big(\|\psi\|_C + (1+\|\psi\|_C)\|\alpha\|_{L^1} + \int_0^t \alpha(s)v(s)\,ds\Big).$$

Применяя к функции v неравенство Гронуолла, мы получим априорную оценку для решения u и далее доказательство идет по той же схеме, что и в предыдущей теореме. □

Еще одну теорему существования решения нелокальной импульсной задачи мы получим, если будем использовать для каузального оператора $\mathcal{Q}$ следующее асимптотическое условие интегральной ограниченности:

($\mathcal{Q}2''$) найдется последовательность функций $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^1_+(0,T)$ такая. что

$$\sup_{\|y\|_{PC}\leqslant n}\|\mathcal{Q}(y)(t)\|_E\leqslant \xi_n(t)\quad \text{для п.в.}\quad t\in[0,T]$$

и

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|\xi_n\|_{L^1}=0.$$

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия* ($\mathcal{Q}1$), ($\mathcal{Q}2''$), ($\mathcal{Q}3$), *(*$I1$*)*, ($g1$), ($g2$), *а также следующие условия для функций* I_k *и* g :

($I2''$) $\lim\limits_{\|x\|_E\to+\infty}\frac{\|I_k(x)\|_E}{\|x\|_E}=0,\quad k=1,...,m;$

($g3'$) $\lim\limits_{\|u\|_{PC}\to+\infty}\frac{\|g(u)\|_C}{\|u\|_{PC}}=0.$

Тогда задача $(2)-(4)$ *имеет интегральное решение.*

Доказательство. Покажем, что существует замкнутый шар $B(0,R)\subset PC([0,T];E)$ достаточно большого радиуса $R>0$ такой, что $\Gamma(\mathcal{D}_B)\subset\mathcal{D}_B$. В предположении противного мы будем иметь последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty},\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}$, $z_n\in\Gamma(u_n)$ такие, что $\|u_n\|_{PC}\leqslant n$, но $\|z_n\|_{PC}>n$ для достаточно больших n.

Заметим, что если n достаточно велико, то условие $\|u_n\|_{PC}\leqslant n$ влечет $\|y[u_n]\|_{PC}\leqslant n$. Действительно, если последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то тогда, в силу условия ($g1$), последовательность $\{g(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ также ограничена: $\|g(u_n)\|_C\leqslant N$ и тогда для выполнения указанной импликации достаточно взять $n>\|\psi\|_C+N$. Если же последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то тогда для достаточно больших n будет выполнено соотношение

$$\|\psi\|_C+\|g(u_n)\|_C\leqslant\|u_n\|_{PC}. \tag{19}$$

Действительно, в противном случае мы имели бы подпоследовательность (будем ее обозначать по-прежнему как $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$), такую, что $\|u_n\|\to+\infty$, для которой будет выполнено

$$\|\psi\|_C+\|g(u_n)\|_C>\|u_n\|_{PC},$$

то есть
$$\frac{\|\psi\|_C}{\|u_n\|_{PC}} + \frac{\|g(u_n)\|_C}{\|u_n\|_{PC}} > 1,$$
что противоречит условию $(g3')$. Ясно, из условия (19) также вытекает данная импликация.

Тогда из представления
$$z_n(t) = e^{At}(\psi(0) - g(u_n)(0)) + \sum_{0<t_k<t} e^{A(t-t_k)} I_k(u_n(t_k)) + \int_0^t e^{A(t-s)} f_n(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$
где $f_n \in \mathcal{Q}(y[u_n])$, согласно $(\mathcal{Q}2'')$, получаем для достаточно больших n оценку
$$\|z_n\|_{PC} \leqslant D(\|\psi\|_C + \|g(u_n)\|_C) + D\sum_{k=1}^{m} \|I_k(u_n(t_k))\| + D\int_0^T \|f_n(s)\|_E\,ds$$
$$\leqslant D(\|\psi\|_C + \|g(u_n)\|_C) + D\sum_{k=1}^{m} \|I_k(u_n(t_k))\| + D\|\xi_n\|_{L^1}.$$
Но тогда
$$1 < \frac{\|z_n\|_{PC}}{n} \leqslant D\Big(\frac{\|\psi\|_C}{n} + \frac{\|g(u_n)\|_C}{n}\Big) + D\sum_{k=1}^{m}\frac{\|I_k(u_n(t_k))\|}{n} + D\frac{1}{n}\|\xi_n\|_{L^1}. \qquad (20)$$
Из условия $(\mathcal{Q}2'')$ следует, что найдется подпоследовательность последовательности $\{\frac{1}{n}\|\xi_n\|_{L^1}\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю. Для простоты будем обозначать ее тем же символом. Тогда, если соответствующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то, как уже отмечалось, последовательность $\{g(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ также ограничена, поэтому
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|g(u_n)\|_C}{n} = 0.$$
Если же эта последовательность неограничена, то без ущерба для общности мы можем считать, что $\|u_n\|_{PC} \to \infty$ и тогда мы имеем, согласно условию $(g3')$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|g(u_n)\|_C}{n} \leqslant \lim_{\|u_n\|_{PC}\to\infty} \frac{\|g(u_n)\|_C}{\|u_n\|_{PC}} = 0.$$
Аналогичным образом, используя условия $(I1)$ и $(I2'')$, мы можем убедиться в том, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|I_k(u_n(t_k))\|_E}{n} = 0, \quad k = 1,...,m.$$
Но тогда переход к пределу в соотношении (20) приводит к противоречию.

Доказательство завершает применение Предложения 2.2 к мультиотображению $\Gamma\colon \mathcal{D}_B \multimap \mathcal{D}_B$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики / А. Н. Тихонов // Бюлл. Моск. ун-та. Секц. А. — 1938. — Т. 1, вып. 8. — С. 1–25.

2. Tonelli, L. Sulle equazioni funzionali di Volterra / L. Tonelli // Bull. Calcutta Math. Soc. — 1930. — V. 20. — P. 31–48.

3. Corduneanu, C. Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16. Taylor and Francis / C. Corduneanu. — London, 2002.

4. Булгаков, А. И. Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами / А. И. Булгаков, А. А. Григоренко, Е. А. Пансенко // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. — 2012. — Вып. 1 (39). — С. 17–20.

5. Булгаков, А. И. Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами / А. И. Булгаков, В. П. Максимов // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 8. — С. 1362–1374.

6. Жуковский, Е. С. К теории уравнений Вольтерра / Е. С. Жуковский // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 9. — С. 1599–1605.

7. Жуковский, Е. С. Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве / Е. С. Жуковский // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2005. — № 10. — С. 17–28.

8. Жуковский, Е. С. Абстрактные вольтерровы операторы / Е. С. Жуковский, М. Ж. Алвеш // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2008. — № 3. — С. 3–17.

9. Кулманакова, М. М. О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием / М. М. Кулманакова, Е. Л. Ульянова // Вестник российских университетов. Математика. — 2019. — Т. 24, № 127. — С. 293–315.

10. Drici, Z. Differential equations with causal operators in a Banach space / Z. Drici, F. A. McRae, J. Vasundhara Devi // Nonlinear Anal. — 2005. — V. 62, № 2. — P. 301–313.

11. Impulsive evolution equations with causal operators / T. Jabeen, R. P. Agarwal, V. Lupulescu, D. O'Reagan // Symmetry. — 2020. — V. 12, № 48.

12. Jankowski, T. Boundary value problems with causal operators / T. Jankowski // Nonlinear Anal. — 2008. — V. 68, № 12. — P. 3625–3632.

13. Lupulescu, V. Causal functional differential equations in Banach spaces / V. Lupulescu // Nonlinear Anal. — 2008. — V. 69, № 12. — P. 4787–4795.

14. Obukhovskii, V. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Anal. — 2011. — V. 74, № 8. — P. 2765–2777.

15. Benchohra, M. Impulsive Differential Equations and Inclusions. Contemporary Mathematics and Its Applications, 2 / M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas. — New York : Hindawi Publishing Corporation, 2006.

16. Lakshmikantham, V. Theory of Impulsive Differential Equations. Series in Modern Applied Mathematics, 6 / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989.

17. Differential Equations with Impulse Effects. Multivalued Right-Hand Sides with Discontinuities. De Gruyter Studies in Mathematics, 40 / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. Berlin : Walter de Gruyter, 2011.

18. Benedetti, I. Evolution fractional differential problems with impulses and nonlocal conditions / I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2020. — V. 13, № 7. P. 1899–1919.

19. Liang, J. Nonlocal impulsive Cauchy problems for evolution equations / J. Liang, Z. Fan // Adv. Difference Equ. — 2011, Art. ID 784161. — 17 p.

20. Byszewski, L. Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem / L. Byszewski // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — V. 162. — P. 494–505.

21. Anh, C. T. On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces / C. T. Anh, T. D. Ke // Fixed Point Theory. — 2014. — V. 15, № 2. — P. 373–392.

22. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J-C. Yao // Fixed Point Theory Appl. — 2019. — № 2. — 21 p.

23. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений /

Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Успехи матем. наук. — 1980. — Т. 35, № 1. — С. 59–126.

24. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М. : ЛИБРОКОМ, 2011.

25. Arutyunov, A. V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics, De Gruyter Graduate / A. V. Arutyunov, V. Obukhovskii. — Berlin : De Gruyter, 2017.

26. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2001.

27. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. On Volterra-type functional equations and their applications to some problems of mathematical physics. [Tixonov A.N. O funkcional'nyx uravneniyax tipa Vol'terra i ix primeneniyax k nekotorym zadacham matematicheskoyj fiziki]. *Byull. Mosk. un-ta — Bulletin of the Moscow University*, 1938, sec. A, vol. 1, iss. 8, pp. 1–25.

2. Tonelli L. Sulle equazioni funzionali di Volterra. Bull. Calcutta Math. Soc., 1930, vol. 20, pp. 31–48.

3. Corduneanu C. Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16. Taylor and Francis, London, 2002.

4. Bulgakov A.I., Grigorenko A.A., Panasenko E.A. Perturbations of Volterra inclusions by impulse operators. [Bulgakov A.I., Grigorenko A.A., Pansenko E.A. Vozmushhenie vol'terrovyx vklyucheniyj impul'snymi operatorami]. *Izvestiya In-ta matem. i inform. UdGU — Izvestiya In-ta matem. and inform. UdGU*, 2012, iss. 1 (39), pp. 17–20.

5. Bulgakov A.I., Maksimov V.P. Functional and functional-differential inclusions with Voltaire operators. [Bulgakov A.I., Maksimov V.P. Funkcional'nye i funkcional'no-differencial'nye vklyucheniya s vol'terrovymi operatorami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1981, vol. 17, no. 8, pp. 1362–1374.

6. Zhukovsky E.S. On the theory of Volterra equations. [Zhukovskiyj E.S. K teorii uravneniyj Vol'terra]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 9, pp. 1599–1605.

7. Zhukovsky E.S. Nonlinear Volterra equation in a Banach functional space. [Zhukovskiyj E.S. Nelineyjnoe uravnenie Vol'terra v banaxovom funkcional'nom prostranstve]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2005, no. 10, pp. 17–28.

8. Zhukovsky E.S., Alvesh M.Zh. Abstract Volterra operators. [Zhukovskiyj E.S., Alvesh M.ZH. Abstraktnye vol'terrovy operatory]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2008, no. 3, pp. 3–17.

9. Kulmanakova M.M., Ulyanova E.L. On the solvability of causal functional inclusions with infinite delay. [Kulmanakova M.M., Ul'yanova E.L. O razreshimosti kauzal'nyx funkcional'nyx vklyucheniyj s beskonechnym zapazdyvaniem]. *Vestnik rossiyjskix universitetov. Matematika — Bulletin of Russian Universities. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 293–315.

10. Drici Z., McRae F.A., Vasundhara Devi J. Differential equations with causal operators in a Banach space. Nonlinear Anal., 2005, vol. 62, no. 2, pp. 301–313.

11. Jabeen T., Agarwal R.P., Lupulescu V., O'Reagan D. Impulsive evolution equations with causal operators. Symmetry, 2020, vol. 12, no. 48.

12. Jankowski T. Boundary value problems with causal operators. Nonlinear Anal., 2008, vol. 68, no. 12, pp. 3625–3632.

13. Lupulescu V. Causal functional differential equations in Banach spaces. Nonlinear Anal., 2008, vol. 69, no. 12, pp. 4787–4795.

14. Obukhovskii V., Zecca P. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces. Nonlinear Anal., 2011, vol. 74, no. 8, pp. 2765–2777.

15. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive Differential Equations and Inclusions. Contemporary Mathematics and Its Applications, 2. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

16. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations. Series in Modern Applied Mathematics, 6. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989. 0] Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential Equations with Impulse Effects. Multivalued Right-Hand Sides with Discontinuities. De Gruyter Studies in Mathematics, 40. Walter de Gruyter, Berlin, 2011

17. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. Evolution fractional differential problems with impulses and nonlocal conditions. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2020, vol. 13, no. 7, pp. 1899–1919.

18. Liang J., Fan Z. Nonlocal impulsive Cauchy problems for evolution equations. Adv. Difference Equ. 2011, Art. ID 784161, 17 pp.

19. Byszewski L. Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem. J. Math. Anal. Appl., 1991, vol. 162, pp. 494–505.

20. Anh C.T., Ke T.D. On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces. Fixed Point Theory, 2014, vol. 15, no. 2, pp. 373–392.

21. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J-C. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions. Fixed Point Theory Appl., 2019, no. 2, 21 pp.

22. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovsky V.V. Topological methods in the theory of fixed points of multivalued maps. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskiyj V.V. Topologicheskie metody v teorii nepodvizhnyx tochek mnogoznachnyx otobrazheniyj]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, no. 1, pp. 59–126.

23. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovsky V.V. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions. [Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuxovskiyj V.V. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyx otobrazheniyj i differencial'nyx vklyucheniyj]. Moscow, 2011.

24. Arutyunov A.V., Obukhovskii V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics, De Gruyter Graduate. De Gruyter, Berlin, 2017.

25. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.

26. Hartman F. Ordinary differential equations. [Xartman F. Obyknovennye differencial'nye uravneniya]. Moscow, 1970.

Кулманакова Марина Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математики, ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина", Воронеж, Россия
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Kulmanakova Marina Michailovna, MESC AF "N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy", Candidate of Physical and mathematical sciences, Docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, физико-математический факультет, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж; Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, Москва, Россия
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Obukhovskii Valerii Vladimirovich, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh; V.A. Trapeznikov Institute of Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Ульянова Елена Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: ulhelen@mail.ru

Ulianova Elena Leonidovna, Candidate of physical and mathematical sciences, Docent, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ulhelen@mail.ru