УДК 517.922, 955

РЕШЕНИЕ ПОЛУГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. П. Зубова, А. Х. Мохамад

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.03.2018 г.

Аннотация. Рассматривается уравнение с частными производными первого порядка в банаховом пространстве с постоянными вырожденными операторными коэффициентами. Для искомой функции ставятся условия при нулевых значениях разных независимых переменных (полуграничная задача). Один из операторных коэффициентов в уравнении является фредгольмовым. Рассматривается случай регулярного операторного пучка, что позволяет ввести в рассмотрение вспомогательный оператор, обладающий более сильным свойством, чем фредгольмовость: его нулевое собственное число является нормальным собственным числом. В таком случае исходное уравнение при некотором дополнительном условии расщепляется на два уравнения в непересекающихся подпространствах для поиска проекций исходной неизвестной функции в подпространствах. В каждом подпространстве выявляются начальные условия для искомых функций. Решаются поставленные задачи. Выявляются условия согласования для параметров задачи, выполнение которых необходимо для решения исходной задачи. Выписывается решение исходной задачи. Приводится пример.

Ключевые слова: банахово пространство, вырожденное уравнение, фредгольмов оператор, регулярный случай, краевые условия.

SOLUTION OF THE SEMI-BOUNDARY PROBLEM FOR THE DESCRIPTOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

S. P. Zubova, A. H. Mohamad

Abstract. A first-order partial differential equation with constant degenerate operator coefficients in a Banach space is considered. The conditions at zero values of different independent variables for the desired function are given (semi-boundary problem). One of the operator coefficients in the equation is Fredholm. We consider the case of a regular operator pencil, which allows us to introduce into consideration an auxiliary operator with a stronger property than Fredholm's property: its zero eigenvalue is a normal eigenvalue. In this case, the original equation is split into two equations in disjoint subspaces (with some additional condition); this allows one to search for projections of the original unknown function in subspaces. The initial conditions for the required functions in each subspace are established. The problems are solved. The conditions for matching the parameters of the problem are identified, the fulfillment of which is necessary to solve the original problem. The solution to the original problem is written out. An example is given.

Keywords: Banach space, degenerate system, Fredholm operator, regular case, boundary conditions.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = B\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + Cu(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

где $A : E_1 \to E_2$; E_1, E_2 — банаховы пространства; A — линейный замкнутый фредгольмов оператор [1] с нулевым индексом, $\overline{\mathrm{dom}\, A} = E_1$; $B,C \in L(E_1,E_2)$, B— необратимый; $(t,x) \in T \times X$, $T = [0,t_k]$, $X = [0,x_k]$; $f(t,x)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2; $u = u(t,x)$ — искомая вектор-функция.

Ставятся условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in X, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции.

Такие уравнения называют алгебро-дифференциальными, дифференциально-алгебраическими, дескрипторными.

Задачи (1)-(3) возникают при исследовании процессов вязкости, пластичности и ползучести материалов [2], при изучении процессов влагопереноса в почве [3]. В частности, оператор A может быть матрично-дифференциальным по независимой переменной s , и тогда уравнение (1) — это система дифференциальных уравнений в частных производных по трем переменным [4].

Задача (1)-(3) в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $C \neq 0$ с постоянными и переменными коэффициентами исследовалась в работах Чистякова В.Ф, в частности, в [5], в которых получены определенные условия разрешимости задачи, построено частное решение.

Задача (1)-(3) в случае $C = 0$, с оператором A, имеющим число 0 нормальным [6] собственным числом, решена в работе [7].

Рассматривается регулярный случай, то есть операторный пучок $A - \lambda B$ является обратимым при λ достаточно малых по модулю не равных нулю $\big(\lambda \in \dot{U}(0) \cap \mathbb{C})\big)$.

В настоящей работе оператор A более общий, чем в [7] и $C \neq 0$. Используется тот факт, что в регулярном случае оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A : \mathrm{dom}\ \ A \to E_1$ имеет число 0 нормальным собственным числом [8-11], то есть имеет место разложение E_1 в прямую сумму

$$E_1 = M \oplus N, \tag{4}$$

где N — корневое подпространство для A_λ, M инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\widetilde{A_\lambda}$ оператора A_λ на M имеет обратный $\widetilde{A_\lambda}^{-1}$.

Это дает возможность при выполнении некоторого условия расщепить уравнение (1) на уравнения в подпространствах M и N, и в каждом подпространстве решать задачу с одним из условий (2) или (3).

Однако, задача (1)-(3) имеет решение не при любых гладких $\varphi(x)$ и $\psi(t)$, требуется еще определить условия согласования для $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$, необходимые и достаточные для решения задачи (1)-(3).

Цель настоящей работы получить условия разделения поставленной задачи на задачи в подпространствах, решить задачи в подпространствах, выявить условия согласования для заданных вектор-функций, получить решение задачи (1)-(3).

1. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть P — проектор на подпространство N, Q — проектор на M, отвечающие разложению (4). Тогда

$$u(t,x) = Qu(t,x) + Pu(t,x). \tag{5}$$

Представление $B = \frac{1}{\lambda}(\lambda B - A + A)$ и умножение уравнения (1) слева на $(A - \lambda B)^{-1}$ приводит к уравнению

$$A_\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - I)\frac{\partial u}{\partial x} + (A - \lambda B)^{-1}Cu + (A - \lambda B)^{-1}f(t,x). \tag{6}$$

Подстановка соотношения (5) в (6) дает:

$$A_\lambda \frac{\partial (P+Q)u}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - I)\frac{\partial (P+Q)u}{\partial x} + (P+Q)(A - \lambda B)^{-1}C(P+Q)u + (P+Q)(A - \lambda B)^{-1}f(t,x),$$

и поскольку M и N инвариантны относительно A_λ, то слагаемые в последнем уравнении расщепляются на слагаемые в подпространстве M с искомой функцией $Qu(t,x)$ и в подпространстве N с искомой функцией $Pu(t,x)$ все, кроме слагаемого $(P+Q)(A-\lambda B)^{-1}C(P+Q)u$. Мы будем искать решение задачи (1)-(3) в случае, когда $Q(A - \lambda B)^{-1}CP = 0$.

Теперь уравнение в подпространстве M:

$$\widetilde{A}_\lambda \frac{\partial Qu}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(\widetilde{A}_\lambda - Q)\frac{\partial Qu}{\partial x} + Q(A - \lambda B)^{-1}CQu + Q(A - \lambda B)^{-1}f(t,x) \tag{7}$$

и уравнение в подпространстве N:

$$A_\lambda \frac{\partial Pu}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - P)\frac{\partial Pu}{\partial x} + P(A - \lambda B)^{-1}Cu + P(A - \lambda B)^{-1}f(t,x). \tag{8}$$

Таким образом, уравнение (1) эквивалентно системе, состоящей из алгебраического уравнения (5) и двух дифференциальных уравнений (7), (8), в этом смысле уравнение (1) является алгебро-дифференциальным, дескрипторным.

Из (5) следует:

$$u(0,x) = Qu(0,x) + Pu(0,x) = Q\varphi(x) + P\varphi(x),$$

$$u(t,0) = Qu(t,0) + Pu(t,0) = Q\psi(t) + P\psi(t),$$

следовательно,

$$Qu(0,x) = Q\varphi(x), \quad Qu(t,0) = Q\psi(t), \tag{9}$$

$$Pu(0,x) = P\varphi(x), \quad Pu(t,0) = P\psi(t). \tag{10}$$

2. ОПИСАНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

За счет фредгольмовости оператора A пространства E_1 и E_2 расщепляются в прямые суммы

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Ker} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{11}$$

где Coim A — прямое дополнение к ядру Ker A в E_1, Coker A — дефектное подпространство; сужение $\widetilde{A}$ оператора A на Coim A имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$ [1].

Проекторы на Ker A и Coker A, отвечающие разложению (11), обозначаются через P_0 и Q_0 соответственно; через I обозначается единичный оператор в соответствующем пространстве; через A^- обозначается $\widetilde{A}^{-1}(I - Q_0)$; A^- называется полуобратным оператором.

Справедлива [8]

Лемма 1. *Равенство*

$$Ay = z, \quad y \in E_1 \cap \mathrm{dom} A, z \in E_2,$$

эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &Q_0 z = 0, \\ &y = A^- z + P_0 y, \quad \forall P_0 y \in \mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{dom}\, A. \end{aligned}$$

При построении оператора $(A - \lambda B)^{-1}$, при исследовании свойств оператора $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1} A$ возникают [8-11] операторы

$$\begin{gathered} S_0 = Q_0 B, \quad T_0 = A_0^- B, (A_0^- = A^-), \quad A_j = S_{j-1} P_{j-1}, \\ S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - A_j^- S_{j-1} T_{j-1}, \quad j = 1,2, \ldots ,p, \end{gathered} \tag{12}$$

где p — максимальная длина цепочек B-присоединенных элементов для оператора A. Операторы A_j : Ker $A_{j-1} \to$ Coker A_{j-1} — конечномерные операторы с соответствующими квадратными матрицами, следовательно, являются фредгольмовым операторами, тогда

$$\mathrm{Ker}\, A_{j-1} = \mathrm{Coim}\, A_j \oplus \ \mathrm{Ker}\, A_j, \quad \mathrm{Coker}\, A_{j-1} = \mathrm{Im}\, A_j \oplus \mathrm{Coker}\, A_j, \tag{13}$$

$j = 1,2,3, \ldots ,p-1$. Операторы P_j и Q_j в (12) — это проекторы на Ker A_j и Coker A_j, соответственно, отвечающие этим разложениям; $A_j^- = \widetilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)$.

Лемма 2. *Пучок* $(A - \lambda B)$ *регулярен в том и только том случае, когда* $\exists q \in \mathbb{N}$ *такое, что оператор* A_q *обратим.*

Число p — есть минимальное из таких q [8–11].

Лемма 3. *Для оператора* A_λ *число* 0 *является нормальным собственным числом. Справедливо представление* E_1 *в виде* (4)*, где*

$$M = \{y \in E_1 : S_i y = 0, \ i = 0,1, \ldots ,p-1\}. \tag{14}$$

Сужение $\widetilde{A}_\lambda$ *оператора* A_λ *на* M *имеет ограниченный обратный оператор* $\widetilde{A}^{-1}$:

$$\widetilde{A}_\lambda^{-1} = Q - \lambda T_p. \tag{15}$$

Формулы для построения проекторов Q и P на подпространстве M и N, соответственно, описаны в [8,9].

Введем обозначения: dim Ker $A = n$, N — есть прямая сумма подпространств N_j, $j = 1, 2 \ldots n$, $P = \sum_{j=1}^n P_j$, P_j — проектор в N на N_j, $N_j = \mathrm{lin}\{v_i^j\}$, v_i^j — элементы B-жордановых цепочек к элементам v_1^j ядра оператора A, то есть

$$Av_1^j = 0, \, Av_i^j = Bv_{i-1}^j, \, j = 2, 3 \ldots p_j, \tag{16}$$

и уравнения $Az = Bv_{p_j}$ неразрешимы относительно z.

Заметим, p_j при разных j могут быть равными.

Известно [8,9], что

$$S_r v_i^j = 0, \quad r = 0, 1 \ldots p-1, \quad r + i \leqslant p. \tag{17}$$

В конечномерном подпространстве N в качестве базиса берутся линейно независимые элементы v_i^j и вводится скалярное произведение $< (\cdot),(\cdot) >$ так, чтобы базис стал ортонормированным. Теперь проектор P на подпространство N не зависит от λ, следовательно, и проектор Q на подпространство M от λ не зависит.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ M

За счет обратимости оператора A_λ в подпространстве M уравнение (7) разрешается относительно производной по t:

$$\frac{\partial Qu}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(Q - \widetilde{A_\lambda}^{-1})\frac{\partial Qu}{\partial x} + \widetilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQu + g, \tag{18}$$

где $g = \widetilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) \in M$. Для $Qu = Qu(t,x)$ заданы условия (9):

$$Qu|_{t=0} = Q\varphi(x), \quad Qu|_{x=0} = Q\psi(t). \tag{19}$$

Заметим, в уравнение (18) формально входит параметр λ. Возникает вопрос: зависит ли от λ решение Qu задачи (18), (19)?

3.1. О влиянии параметра λ на решение уравнения (18)

Коэффициент $\dfrac{1}{\lambda}(Q - \widetilde{A_\lambda}^{-1})$ от λ не зависит, это следует из (15). И если операторный коэффициент $\widetilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}$ в уравнении (18) не зависит от λ, то и Qu от λ не зависит.

Лемма 4. *Оператор* $\widetilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}$ *не зависит от* λ.

Для доказательства рассмотрим равенство

$$\widetilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}z = Qw, \tag{20}$$

где $z \in E_1$ от λ не зависит. Применив последовательно к равенству (20) слева операторы $\widetilde{A_\lambda}$, $A-\lambda B$ и заменив проектор Q на $I-P$, приходим к равенству

$$(A-\lambda B)P(A-\lambda B)^{-1}z = z - AQw. \tag{21}$$

Далее проведем доказательство леммы в случае, когда подпространство N состоит из элементов одной B-жордановой цепочки: $N = \text{lin}\,\{v_i\}$,

$$Av_1 = 0, Av_i = Bv_{i-1}, i = 1,2\ldots p, \tag{22}$$

и $\nexists v_{p+1}$. Из (17) следует:

$$S_r v_i = 0, \quad r = 0,1\ldots p-1,\, r+i \leqslant p. \tag{23}$$

Обозначим компоненты $P(A-\lambda B)^{-1}z$ через $z_i(\lambda)$: $P(A-\lambda B)^{-1}z = \sum_{i=1}^p z_i(\lambda)v_i$. Подставив это выражение в (21) и воспользовавшись (22), получаем:

$$A\Big(\sum_{i=2}^p \big(z_i(\lambda) - \lambda z_{i-1}(\lambda)\big)v_i - Qw\Big) = \lambda z_p(\lambda)\,Bv_p + z. \tag{24}$$

Последнее равенство в силу леммы 1 эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\lambda z_p(\lambda)QBv_p + Qz = 0,\\ &\sum_{i=2}^p \big(z_i(\lambda) - \lambda z_{i-1}(\lambda)\big)v_i - Qw = \lambda z_p(\lambda)A^-Bv_p + A^-z + c(\lambda)v_1 \end{aligned} \tag{25}$$

с произвольным скаляром $c(\lambda)$. Из первого равенства этой системы следует: выражение $\lambda z_p(\lambda)$ не зависит от λ. Применяя ко второму равенству в (25) последовательно S_i, $i = 0, 2 \dots p-1$, и учитывая свойства (23) и (14), получаем: выражения $z_i(\lambda) - \lambda z_{i-1}(\lambda)$ от λ не зависят.

Из равенства (25) имеем:

$$Qw = Q^2 w = Q\Big(\sum_{i=2}^{p}\big(z_i(\lambda) - \lambda z_{i-1}(\lambda)\big)v_i\Big) - Q\big(\lambda z_p(\lambda) A^- B v_p + A^- z\big),$$

откуда видно, что Qw не зависит от λ. Из равенства (20) теперь следует независимость оператора $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}$ от λ.

Лемма 4 в случае $\dim \operatorname{Ker}\ A = n > 1$ доказывается для каждой B -жордановой цепочки аналогично. ■

Замечание 1. При доказательстве леммы 4 выявлен также следующий результат.

Если $P(A-\lambda B)^{-1} z = \sum\limits_{i=1}^{p} z_i(\lambda) v_i$, $\forall z \in E_1$, то $z_i(\lambda) - \lambda z_{i-1}(\lambda)$ и $\lambda z_p(\lambda)$ от λ не зависят.

Кроме того, оператор $(A-\lambda B)P(A-\lambda B)^{-1}$ также не зависит от λ, поскольку $\forall z \in E_1$ имеем $(A-\lambda B)P(A-\lambda B)^{-1} z = A\Big(\sum\limits_{i=2}^{p}\big(z_i(\lambda) - \lambda z_{i-1}(\lambda)\big)v_i\Big) - \lambda z_p(\lambda)\, B v_p$.

Таким образом, в уравнении (18) $g = g(t,x)$, $Qu = Qu(t,x)$.

3.2. О дополнительных условиях

Уравнение (18) разрешимо относительно Qu при выполнении некоторых условий. Одним из условий является коммутируемость операторов T_p и $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1} CQ$, для чего достаточно выполнения условия 1*:

1*. Операторы $Q(A-\lambda B)^{-1} AQ$ и $Q(A-\lambda B)^{-1} CQ$ коммутируют.

Лемма 5. *Если выполнено условие* 1*, *то коммутируют и операторы* T_p *и* $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1} CQ$.

Из формулы (15) следует, что достаточно доказать коммутируемость операторов $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q$ и $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1} CQ$. По условию леммы $\widetilde{A_\lambda}\, Q(A-\lambda B)^{-1} CQ = Q(A-\lambda B)^{-1} CQ\, \widetilde{A_\lambda} Q$, откуда $Q(A-\lambda B)^{-1} CQ = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1} CQ\, \widetilde{A_\lambda} Q$. Умножение последнего равенства справа на $\widetilde{A_\lambda}^{-1} Q$ приводит к доказательству результата леммы 5. ■

Другим условием разрешимости задачи (18), (19) является условие 2*:

2*. Функции $g(t,x)$ и $Q\varphi(x)$ являются аналитическими по x, $x \in X$, $g(t,x)$ непрерывна по t, $t \in T$.

3.3. Решение уравнения (18) с условием $\mathbf{Qu(0,x) = Q\varphi(x)}$

Имеем: $T_P \in L(M,M)$. Пусть Γ- замкнутый спрямляемый контур, окружающий спектр оператора $xQ + (t-s)T_p$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При выполнении условий* 1*, 2* *и* $Q(A-\lambda B)^{-1} CP = 0$ *решение уравнения (18) с условием* $Qu(0,x) = Q\varphi(x)$ *существует и равно*

$$\begin{gathered} Qu(t,x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} e^{\tilde{C}t}\Big(tT_p + (x-\mu)Q\Big)^{-1} Q\varphi(\mu)d\mu - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_0^t \oint\limits_{\Gamma} e^{\widetilde{C}(t-s)}\Big((t-s)T_p + (x-\mu)Q\Big)^{-1} g(s,\mu)ds d\mu, \end{gathered} \tag{26}$$

где $\widetilde{C} = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$.

Теорема доказывается непосредственной подстановкой выражения (26) в (18). Легко проверяется выполнение условия $Qu(0,x) = Q\varphi(x)$.

3.4. Решение уравнения (18) с условиями (19)

Из формулы (26) при $x=0$ следует:

$$\begin{gathered} Q\psi(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} e^{\widetilde{C}t}\Big(tT_p - \mu Q\Big)^{-1} Q\varphi(\mu)d\mu - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_0^t \oint\limits_{\Gamma} e^{\widetilde{C}(t-s)}\Big((t-s)T_p - \mu Q\Big)^{-1} g(s,\mu)dsd\mu. \end{gathered} \tag{27}$$

Это условие согласования для вектор-функций $\varphi(x)$, $\psi(t)$ и $f(t,x)$, необходимое для решения задачи (1)-(3) в подпространстве M.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1^*, 2^*, (27) *и* $Q(A-\lambda B)^{-1}CP = 0$. *Решение задачи* (18), (19) *существует, единственно и имеет вид* (26).

Единственность решения $Qu(t,x)$ доказывается с помощью преобразования Лапласа [12] $\widetilde{z}(t,y)$ функции $z(t,x)$, равной разности двух преполагаемых решений $Qu_1(t,x)$ и $Qu_2(t,x)$. За счет условий $z(t,0) = 0$ и $z(0,x) = 0$ преобразование $\widetilde{z}(t,y) \equiv 0$, следовательно, $z(t,x) \equiv 0$ и $Qu_1(t,x) \equiv Qu_2(t,x)$. ■

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В КОРНЕВОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

Решается уравнение (8)

$$A_\lambda \frac{\partial Pu}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(A_\lambda - P)\frac{\partial Pu}{\partial x} + P(A-\lambda B)^{-1}C(Pu+Qu) + P(A-\lambda B)^{-1}f(t,x). \tag{28}$$

с условием (10)

$$Pu|_{t=0} = P\varphi(x), \quad Pu|_{x=0} = P\psi(x). \tag{29}$$

Далее будет показано, что Pu не зависит от λ, то есть $Pu = Pu(t,x)$.

4.1. Решение задачи в случае $\mathbf{dim\ Ker\ A = 1}$ и $\mathbf{Pu(t,0) = P\psi(t)}$

Обозначим

$$\begin{gathered} Pu = \sum_{i=1}^{p} u_i(t,x)v_i, \quad , P(A-\lambda B)^{-1}CP = \big(c_{ij}(\lambda)\big) : p\times p, \\ P(A-\lambda B)^{-1}\big(CQu + f(t,x)\big) = h(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{p} h_i(t,x,\lambda)v_i, \end{gathered} \tag{30}$$

$$P\varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)v_i,\ P\psi(t) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(t)v_i. \tag{31}$$

Воспользуемся следующим результатом.

Лемма 6. *Имеет место связь*

$$A_\lambda v_i = -\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{\lambda^{i-k}}v_k, \quad i = 2,3,\dots p. \tag{32}$$

Действительно, $Av_{i-1} = (A - \lambda B)v_{i-1} + \lambda Bv_{i-1}$, или $Av_{i-1} = (A - \lambda B)v_{i-1} + \lambda Av_i$, то есть $A_\lambda v_{i-1} = v_{i-1} + \lambda A_\lambda v_i$, или

$$A_\lambda v_i = \frac{1}{\lambda} A_\lambda v_{i-1} - \frac{1}{\lambda} v_{i-1},$$

откуда следует равенство (32). ■

Подставив (30) в (28) и использовав (32), получаем

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial u_k}{\partial t} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{i-k}\, v_i = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial u_k}{\partial x} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{i-k} v_i + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u_i}{\partial x}\, v_i - \sum_{i=1}^{p} \big(\sum_{k=1}^{p} c_{ik}\, u_k \big) v_i - \sum_{i=1}^{p} h_i v_i.$$

Приравнивая в последнем соотношении коэффициенты при v_i с одинаковыми индексами, получаем для нахождения искомых функций $u_i(t,x)$ уравнения, которые образуют систему

$$\frac{\partial Pu}{\partial x} = J \frac{\partial Pu}{\partial t} + (\lambda I - J)P(A - \lambda B)^{-1} C\, Pu + (\lambda I - J)h(t,x,\lambda), \tag{33}$$

где $J = \big(a_{ij}\big) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $a_{ij} = 1$ при $j = i + 1$ и $a_{ij} = 0$ при $j \neq i + 1$.

Замечание 2. Матрица $(\lambda I - J)P(A - \lambda B)^{-1} C\, P$ — это матрица $(\lambda I - J)\big(c_{ij}\big)_{p \times p}$. Компоненты последней матрицы — это $\lambda c_{ij} - c_{i+1 j}$ и λc_{pj}. В силу замечания 1 эти компоненты не зависят от λ. Также и компоненты вектора $(\lambda I - J)h(t,x,\lambda) = (\lambda I - J)P(A - \lambda B)^{-1}(CQu + f)$ в силу замечания 1 не зависят от λ. Следовательно, в уравнении (33) параметр λ отсутствует. Таким образом, Pu от λ не зависит, $Pu = Pu(t,x)$.

Построим решение Pu системы (33) в предположении

3*. Матрица $P(A - \lambda B)^{-1} C$ является верхнетреугольной, то есть $c_{ij} = 0$ при $i > j$; $i,j = 1, 2, \ldots, p$.

В этом случае матрица $(\lambda I - J)P(A - \lambda B)^{-1} CP$ также является верхнетреугольной. Система (33) приобретает тогда вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p-1} (\lambda c_{1i} - c_{2i}) u_i + \lambda c_{1p} u_p + (\lambda h_1 - h_2),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \sum_{i=2}^{p-1} (\lambda c_{2i} - c_{3i}) u_i + \lambda c_{2p} u_p + (\lambda h_2 - h_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{p-1}}{\partial x} = \frac{\partial u_p}{\partial t} + (\lambda c_{p-1\, p-1} - c_{p\, p-1}) u_{p-1} + \lambda c_{p-1\, p} u_p + (\lambda h_{p-1} - h_p),\\
&\frac{\partial u_p}{\partial x} = \lambda c_{p\, p} u_p + \lambda h_p.
\end{aligned} \tag{34}$$

Из последнего уравнения этой системы и условия $u_p(t,0) = \psi_p(t)$ находится компонента $u_p(t,x)$

$$u_p(t,x) = e^{\lambda c_{pp} x} \psi_p(t) + \lambda \int_0^x e^{\lambda c_{pp}(x - s)} h_p(t,s) ds.$$

для чего достаточно непрерывности по t вектор-функций $f(t,x)$ и $\psi(t)$.

Соответственно

$$u_i(t,x) = e^{(\lambda c_{ii} - c_{i+1\, i}) x} \psi_i(t) +$$

$$+ \int_0^x e^{(\lambda c_{ii} - c_{i+1\, i})(x - s)} \big(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t} + \sum_{k=i+1}^{p-1} (\lambda c_{i\, k+1} - c_{i+1\, k+1}) u_k + \lambda c_{ip} u_p + (\lambda h_i - h_{i+1}) \big) ds,$$

для чего достаточно непрерывной дифференцируемости $p - 1$ раз по t вектор-функций $f(t,x)$ и $\psi(t)$.

4.2. Решение задачи в случае $\dim \mathrm{Ker}\ \mathbf{A} = \mathbf{n}$ и $\mathbf{Pu(t,0) = P\psi(t)}$

Теперь

$$Pu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j} u_i^j(t,x)v_i^j, \quad P(A-\lambda B)^{-1}CP = \big(c_{ik}^j(\lambda)\big) : p_j \times p_j,$$

$$P(A-\lambda B)^{-1}\big(CQu + f(t,x)\big) = h(t,x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j} h_i^j(t,x,\lambda)v_i^j,$$

$$P\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j}\varphi_i^j(x)v_i^j, \; P\psi(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j}\psi_i^j(t)v_i^j.$$

Решение Pu есть сумма решений в подпространствах N_j и для каждой B — жордановой цепочки получаем

$$u_{p_j}^j(t,x) = e^{\lambda c_{p_j\,p_j}^j x}\psi_{p_j}^j(t) + \lambda\int_0^x e^{\lambda c_{p_j\,p_j}^j(x-s)}h_{p_j}^j(t,s)ds. \tag{35}$$

$$u_i^j(t,x) = e^{(\lambda c_{ii}^j - c_{i+1\,i}^j)x}\psi_i^j(t) +$$
$$+\int_0^x e^{(\lambda c_{ii}^j - c_{i+1\,i}^j)(x-s)}\Big(\frac{\partial u_{i+1}^j}{\partial t} + \sum_{k=i+1}^{p_j-1}(\lambda c_{i\,k+1}^j - c_{i+1\,k+1}^j)u_k^j + \lambda c_{i\,p_j}^j u_p^j + (\lambda h_i^j - h_{i+1}^j)\Big)ds, \tag{36}$$

Таким образом, при построенной в п. 3 вектор-функции $Qu(t,x)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если $\psi(t)$ и $f(t,x)$ непрерывно дифференцируемы $p-1$ раз по t и матрица $P(A-\lambda B)^{-1}CP$ верхнетреугольная, то решение уравнения* (28) (*то есть* (8)) *с условием $Pu(t,0) = P\psi(t)$ существует, единственно и равно сумме вектор-функций $u_i^j v_i^j$, $j = 1,2,\dots,n$; $i = p_j, p_{j-1},\dots,1$, где u_i^j имеют вид* (35), (36)

4.3. Решение задачи в корневом подпространстве с условиями (29)

Для того, чтобы вектор-функция $Pu(t,x)$, построенная в п. 4.2, удовлетворяла условию $Pu|_{t=0} = P\varphi(x)$, требуется выполнение условий согласования, следующих из (35), (36):

$$u_{p_j}^j(0,x) = e^{\lambda c_{p_j\,p_j}^j x}\psi_{p_j}^j(0) + \lambda\int_0^x e^{\lambda c_{p_j\,p_j}^j(x-s)}h_{p_j}^j(0,s)ds. \tag{37}$$

$$u_i^j(0,x) = e^{(\lambda c_{ii}^j - c_{i+1\,i}^j)x}\psi_i^j(0) +$$
$$+\int_0^x e^{(\lambda c_{ii}^j - c_{i+1\,i}^j)(x-s)}\Big(\frac{\partial u_{i+1}^j}{\partial t} + \sum_{k=i+1}^{p_j-1}(\lambda c_{i\,k+1}^j - c_{i+1\,k+1}^j)u_k^j + \lambda c_{i\,p_j}^j u_p^j + (\lambda h_i^j - h_{i+1}^j)\Big)\Big|_{t=0}ds. \tag{38}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если $\psi(t)$ и $f(t,x)$ непрерывно дифференцируемы $p-1$ раз по t, матрица $P(A-\lambda B)^{-1}CP$ верхнетреугольная и выполняются условия согласования* (37), (38), *то решение $Pu(t,x)$ уравнения* (8) *с условиями* (10) *существует, единственно и равно $Pu(t,x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j} u_i^j(t,x)\, v_i^j$ с функциями $u_i^j(t,x)$, описываемыми формулами* (35), (36).

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

В процессе решения задачи (1)-(3) в подпространствах M и N были введены следующие ограничения:

1) $Q(A-\lambda B)^{-1}CP = 0$;

1*. Операторы $Q(A-\lambda B)^{-1}AQ$ и $Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ коммутируют;

2) функции $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ являются аналитическими по x, $x \in X$, и $f(t,x)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы $p-1$ раз по t.

3*. Матрица $P(A-\lambda B)^{-1}C$ является верхнетреугольной.

3) выполняются условия согласования (27), (37), (38).

Заметим, условия аналитичности в 2) можно ослабить, заменив их на 2*, и дифференцируемость по t требуется от разных компонент $f(t,x)$ и $\psi(t)$ разная, не превышающая p.

На основании результатов, полученных в п. 3-4 справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* 1*, 3* *и* $1)-3)$. *Решение* $u(t,x)$ *задачи* $(1)-(3)$ *существует, единственно и* $u(t,x) = Qu(t,x) + Pu(t,x)$, *где* $Qu(t,x)$ *имеет вид* (26), $Pu = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{p_j} u_i^j(t,x)v_i^j$, $u_i^j(t,x)$ *находятся по формулам* (35), (36).

Пример 1. В пространстве функций $u(t,s) \in \ell_2$, $(t,x) \in T \times X$ решаются уравнения

$$\begin{gathered}
0 = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \sum_{i=3}^{\infty} u_i(t,x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \frac{\partial u_{i+3}}{\partial x} + u_2(t,x), \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sum_{i=3}^{\infty} u_i(t,x), \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + u_j(t,x),
\end{gathered} \tag{39}$$

$j = 4,6,...$, с условиями $Qu(0,x) = Q\varphi(x)$, $Pu(t,0) = P\psi(t)$.

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2^{-1} & 2^{-2} & ... \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & \end{pmatrix}.$$

Пучок $A - \lambda B$ регулярен, так как цепочка $v_1, v_2, ...$, такая, что $Av_1 = 0, Av_i = Bv_{i-1}, i = 2,3,...$, конечна. Действительно, $v_1 = (1,0,0,0,...)$, $v_2 = (0,0,1,0,...)$ и v_3 не существует. Следовательно, $n = 1$, $\dim N = 2$, $p = 2$. Далее: $A_\lambda = (A-\lambda B)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{\lambda}{1-\lambda} & -a_5 & -a_6 & ... \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda}{1-\lambda} & a_5 & a_6 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} & \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} & \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^3} & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} & \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$, где $a_i = \sum\limits_{j=1}^{i-3} \frac{1}{2^{i-j-3}} \frac{\lambda^j}{(1-\lambda)^j}$.

Элементы w пространства ℓ_2 раскладываются в сумму элементов $w_M + w_N$, $w_M \in M$, $w_N \in N$:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ ... \end{pmatrix} = w_M + w_N = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ 0 \\ w_4 \\ w_5 \\ ... \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ 0 \\ w_3 \\ 0 \\ 0 \\ ... \end{pmatrix},$$

откуда

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & ..... \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и $Q(A-\lambda B)^{-1}CP = 0$. Далее:

$$\widetilde{A_\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \lambda & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2^2} & ... \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2^2} & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -\lambda & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -\lambda & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}, \quad T_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2^2} & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Операторы $Q(A-\lambda B)^{-1}AQ$ и $Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ коммутируют.

Решение задачи в M, построенное по формуле

$$Qu(t,x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{\widetilde{C}t}\Big(tT_p + (x-\mu)Q\Big)^{-1} Q\varphi(\mu)d\mu.$$

с оператором $\widetilde{C} = \widetilde{A_\lambda}^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ имеет компоненты

$$u_2(t,x) = e^t\varphi_2(x) + e^t\Big(\sum_{j=4}^{\infty}\sum_{i=0}^{j-4}(-1)^{i+j}S_{j-i-3}\frac{t^i}{i!}\frac{\partial^i\varphi_j(\xi)}{\partial\xi^i} - \sum_{j=4}^{\infty}(-1)^j S_{j-3}\varphi_j(x)\Big), \tag{40}$$

где $S_k = \dfrac{2^k + (-1)^{k-1}}{3\cdot 2^{k-1}}$, $\xi = t + x$, и

$$u_i(t,x) = e^t\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\frac{\partial^j\varphi_{i+j}(\xi)}{\partial\xi^j}, \quad i = 4,5,.... \tag{41}$$

В подпространстве N уравнения таковы:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = \sum_{i=3}^{\infty} u_i(t,x), \tag{42}$$

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x}=\frac{\partial u_3}{\partial t}-\sum_{i=3}^{\infty}u_i(t,x). \tag{43}$$

Из уравнения (42) и условия $u_3(t,0)=\psi_2(t)$ имеем:

$$u_3(t,x)=e^x\psi_2(t)+e^x\int_0^x e^{-\tau}\sum_{i=4}^{\infty}u_i(t,\tau)d\tau. \tag{44}$$

Из уравнения (43), условия $u_1(t,0)+u_2(t,0)=\psi_1(t)$ и формулы (44) находится сумма $u_1(t,x)+u_2(t,x)$, откуда с учетом (40) определяется $u_1(t,x)$.

Задача (39) с начальными условиями в подпространствах M и N решена при любой непрерывно дифференцируемой функции $\psi(t)$ и аналитической функции $\varphi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский, С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1943. — Т. 7, вып. 3. — С. 147–166.

2. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский. — М. : Физматлит, 2001.

3. Чудновский, А. Ф. Теплофизика почв / А. Ф. Чудновский. — М. : Физ.-мат. лит. наука, 1976.

4. Зубова, С. П. Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных / С. П. Зубова, В. И. Усков // Итоги науки : избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам наук. — 2017. — Т. 31. — С. 3–24.

5. Нгуен, Х. Д. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х. Д. Нгуен, В. Ф. Чистяков // Вестник ЮУрГУ. Сер. : Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 98–111.

6. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука. — 1965.

7. Зубова, С. П. Решение полуграничной задачи для вырожденного уравнения в частных производных первого порядка / С. П. Зубова, А. Х. Мохамад, В. И. Усков // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — Т. 173. — С. 48–57.

8. Зубова, С. П. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышов // Дифференц. уравнения и их применение. — 1976. — Вып. 14. — С. 21–39.

9. Зубова, С. П. Свойства возмущённого фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной / С. П. Зубова // Деп. в ВИНИТИ Воронежский гос. ун-т № 2516—В91. Воронеж. — 1991. — 17 с.

10. Зубова, С. П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной / С. П. Зубова // Доклады АН. — 2009. — Т. 428, № 4. — С. 444–446.

11. Зубова, С. П. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / С. П. Зубова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.

12. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука. — 1967.

13. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

14. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

REFERENCES

1. Nikolsky S.M. Linear equations in normed linear spaces. [Nikol'skiyj S.M. Lineyjnye uravneniya v lineyjnyx normirovannyx prostranstvax]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1943, vol. 7, no. 3, pp. 147–166.

2. Ishlinsky A.Yu. Mathematical theory of plasticity. [Ishlinskiyj A.Yu. Matematicheskaya teoriya plastichnosti]. Moscow, 2001.

3. Chudnovskiy A.N. Thermal physics of soils. [Chudnovskiyj A.F. Teplofizika pochv]. Moscow, 1976.

4. Zubova S.P., Uskov V.I. Application of the matrix differential operator to solving a problem for a partial differential equation. [Zubova S.P., Uskov V.I. Prilozheniya matrichno-differencial'nogo operatora k resheniyu zadach dlya uravneniyj v chastnyx proizvodnyx]. *Itogi nauki: izbrannye trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma po fundamental'nym i prikladnym problemam nauk — Science: selected work of the international symposium on fundamental and common problems of science*, 2017, vol. 31, pp. 3–24.

5. Nguyen H.D., Chistyakov V.F. On modeling using differential-algebraic equations in of partial derivatives. [Nguen X.D., Chistyakov V.F. O modelirovanii s ispol'zovaniem differencial'no-algebraicheskix uravneniyj v chastnyx proizvodnyx]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie — Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 98–111.

6. Gohberg I.C., Krein M.G. Introduction to the theory of linear non-self-conjugated operators. [Goxberg I.C., Kreyjn M.G. Vvedenie v teoriyu lineyjnyx nesamosopryazhyonnyx operatorov]. Moscow, 1965.

7. Zubova S.P., Mohamad A.H., Uskov V.I. Solution of the first order semi-boundary problem for degenerate first-order partial differential equation. [Zubova S.P., Moxamad A.X., Uskov V.I. Reshenie polugranichnoyj zadachi dlya vyrozhdennogo uravneniya v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Itogi nauki i texniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory — Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 173, pp. 48–57.

8. Zubova S.P., Chernyshov K.I. On a linear differential equation with a Fredholm operator at the derivative. [Zubova S.P., Chernyshov K.I. O lineyjnom differencial'nom uravnenii s fredgol'movym operatorom pri proizvodnoyj]. *Differencial'nye uravneniya i ix primenenie — Differential Equations and Their Applications*, 1976, iss. 14, pp. 21–39.

9. Zubova S.P. Properties of a perturbed Fredholm operator. Solution of the differential equation with the Fredholm operator at the derivative. [Zubova S.P. Svoyjstva vozmushhyonnogo fredgol'movskogo operatora. Reshenie differencial'nogo uravneniya s fredgol'movskim operatorom pri proizvodnoyj]. *Dep. v VINITI Voronezhskiyj gos. un-t № 2516–V91. Voronezh. — 1991. — 17 s — Voronezh state. univ. — Voronezh, 1991, Dep. at VINITI 17.06.91, no. 2516–B91, 17 p.*

10. Zubova S.P. Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Noetherian operator at the derivative. [Zubova S.P. Reshenie odnorodnoyj zadachi Koshi dlya uravneniya s neterovym operatorom pri proizvodnoyj]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 4, pp. 444—446.

11. Zubova S.P. Solving problems for descriptor equations by decomposition method. [Zubova S.P. Reshenie zadach dlya deskriptornyx uravneniyj metodom dekompozicii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 134–140.

12. Krein S.G. Linear differential equations in Banah space. [Kreyjn S.G. Lineyjnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow, 1967.

13. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string

oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

14. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

Зубова Светлана Петровна, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: spzubova@mail.ru

Zubova Svetlana Petrovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: spzubova@mail.ru

Мохамад Абдулфтах Хосни, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com

Mohamad Abdulftah Hosni, PhD student, Department of Mathematical Analysis, faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com