УДК 517.958

О РЕШЕНИЯХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДЖЕФФРИСА-ОЛДРОЙДА И ОДНОЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ*

А. С. Арсентьев, Е. Г. Беломытцева, В. Г. Звягин, В. П. Орлов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.10.2020 г.

Аннотация. Установлена эквивалентность слабой разрешимости начально-краевых задач для модели Джеффриса-Олдройда и одной интегродифференциальной системы с памятью. Доказательства утверждений существенно опираются на свойства Регулярных Лагранжевых Потоков.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, уравнения движения, начально-граничная задача, слабое решение.

ON SOLUTIONS OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE JEFFREYS-OLDROYD AND ONE INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEM

A. S. Arsentyev, E. G. Belomytzeva, V. G. Zvyagin, V. P. Orlov

Abstract. The equivalence of weak solvability of initial boundary value problems for Jeffries-Oldroyd models and one integro-differential system with memory is established. The proofs substantially use the properties Regular Lagrangean Flows.

Keywords: viscoelastic medium, the motion equation, initial-boundary-value problem, weak solution.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Модель Джеффриса-Олдройда

Пусть $\Omega \in R^n$, $n = 2,3$, ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $T > 0$ и $Q = [0,T]\times\Omega$. Для модели движения вязкоупругой среды Джеффриса-Олдройда с постоянной плотностью $\rho = 1$ рассматривается начально-краевая задача Z_1:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div}\sigma + f, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\sigma + \lambda_1\Big(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\Big) = 2\eta(\mathcal{E}(v) + \lambda_2\Big(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big), \quad (t,x) \in Q_T; \tag{2}$$

* Исследование выполнено при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 20–01–00051).

$$\operatorname{div} v = 0, (t, x) \in Q_T; \tag{3}$$

$$v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \tag{4}$$

$$v|_{t=0} = v^0, \sigma|_{t=0} = \sigma^0. \tag{5}$$

Здесь $v(t,x)=(v_1(t,x), \dots ,v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ — искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ — плотность внешних сил, $\mathcal{E}(v)$ – тензор скоростей деформаций, т.е. $n \times n$ матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, σ - тензор напряжений. Дивергенция $\operatorname{Div} \sigma$ $(n \times n)$-матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк матрицы σ. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $\eta > 0$ определяют вязкие и упругие свойства среды. Коэффициенты $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, $\eta > 0$ означают время релаксации, время запаздывания и вязкость среды соответственно.

Подробное описание этой модели, проблемы ее разрешимости в слабом и сильном смысле, а также открытые вопросы, связанные с ней, можно найти в [1]. Ниже обсуждаются вопросы, связанные со слабыми решениями.

Важной задачей является нахождение не только поля скоростей v, но и траекторий движения частиц среды, или, что то же, нахождение траекторий поля скоростей v.

Это, в свою очередь, требует решения задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Вопрос о решении этой задачи оказывается тесно связанным с решением задачи Z_1 (см. [2]).

Отметим, что классическая разрешимость задачи Коши требует определенной гладкости поля скоростей v. Однако обычно получаемое слабое решение задачи Z_1 не дает поля v нужной гладкости, и приходится либо проводить регуляризацию поля v, либо использовать более общие понятия решения задачи Коши, а именно, понятие Регулярного Лагранжевого Потока (РЛП).

Нашей целью является доказательство анонсированной в [2] эквивалентности задачи Z_1 и задачи нахождения поля скоростей и траекторий движения частиц среды Джеффриса-Олдройда.

1.2. Интегродифференциальная система с памятью

Рассмотрим теперь другую задачу Z_2:

$$\partial v(t,x)/\partial t + \sum_{i=1}^{n} v_i(t,x)\partial v(t,x)/\partial x_i - \lambda_2\lambda_1^{-1}\Delta v(t,x) - \tag{6}$$

$$2\eta(\lambda_1 - \lambda)_2\lambda_1^{-2}\operatorname{Div} \int_0^t \exp\left((s-t)/\lambda\right)\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))ds + \nabla p(t,x) = f_1(t,x),\ (t,x) \in Q;$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \tag{7}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{8}$$

$$v(0, x) = v^0(x),\ x \in \Omega; \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma = [0, T] \times \partial\Omega. \tag{9}$$

Здесь

$$f_1 = f + \sigma^0 - 2\eta\lambda_2\lambda^{-1}\mathcal{E}(v^0)\exp(-t/\lambda_1) + \exp(-t/\lambda_1)\sigma^0,$$

а (8) является задачей Коши (в интегральной форме) для системы ОДУ (в интегральной форме).

Решение $z(s;t,x)$ задачи Коши (8) дает траектории, по которым движутся частицы среды, а именно, $z(t;0,x)$ описывает траекторию частицы среды, находящейся в момент $t = 0$ в месте x.

Наличие интегрального слагаемого в (6) означает наличие памяти среды вдоль траекторий движения частиц среды.

В случае гладкости всех входящих в Z_1 и Z_2 функций, сравнительно просто показывается, что решение одной задачи порождает естественным образом решение другой, и наоборот. Однако в случае обобщенных (слабых) решений это далеко не очевидное утверждение.

Нашей целью является доказательство эквивалентности слабой разрешимости задач Z_1 и Z_2 .

Структура работы следующая. Ниже (раздел 2) мы приводим необходимые обозначения и определения, в разделе 3 даются ввспомогательные утверждения. Основной результат дается в разделе 4. Доказательства основных результатов даются в разделах 5 и 6 соответственно.

Не зависящие от существенных величин константы в неравенствах и цепочках неравенств обозначаются символом M.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Фунциональные пространства

Пусть $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$. Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)^n$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$. Символами H и V обозначаются замыкания $\mathcal{V}$ в нормах $L_2(\Omega)^n$ и $W_2^1(\Omega)^n$ соответственно Обозначим через $\langle f,v\rangle$ действие функционала f из сопряженного к V пространства V^{-1} на элемент v из V. Отождествление гильбертова пространства H с его сопряженным H^{-1} и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$. При этом для $u \in V$ и $w \in V^{-1}$ справедливо соотношение $\langle u,w\rangle = (u,w)$ со скалярным произведением в H (см., напр., [3], раздел I.1.4).

Обозначим через $R^{n\times n}$ пространство матриц порядка $n \times n$ со скалярным произведением

$$(A,B)_{R_{n\times n}} = A : B = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}B_{ij}, A = (A_{ij}), B = (B_{ij}),$$

а через $R_S^{n\times n}$ — подпространство симметричных матриц.

Через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H, $L_2(\Omega)^n$, $L_2(\Omega)^{n\times n}$, в каких именно — ясно из контекста.

Норма функции u из $L_2(\Omega)$ и H обозначается соответственно символом $|u|_0$, норма функции u из V, $W_2^1(\Omega)^n$ или $W_2^1(\Omega)^{n\times n}$ обозначается соответственно символом $|u|_1$, что именно имеется в виду, ясно из контекста.

2.2. Регулярные Лагранжевы Потоки

В случае $v \in L_1(0,T;C^1(\Omega))$ с нулевым условием на границе задача (8) нелокально однозначно разрешима в классическом смысле (см. [6]). Однако в случае суммируемой вектор-функции v ситуация сильно усложняется, и приходится использовать более широкие понятия решения задачи (8).

Для формулировки определения слабого решения задачи Z_2 нам понадобится обобщение понятия классического решения задачи Коши для системы ОДУ, а именно, понятие регулярного лагранжева потока.

Определение 1. Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau;t,x)$, $(\tau;t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при п.в. x и любом $t \in [0,T]$ функция $\gamma(\tau) = z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (8);

2) для любых $t, \tau \in [0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \Omega$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau;t,B)) = m(B)$;

3) при всех $t_i, \in [0,T]$, $i = 1,2,3$, и п.в. $x \in \overline{\Omega}$

$$z(t_3;t_1,x) = z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x)). \tag{10}$$

Определение РЛП см., например, в [7], [8], [9]. Здесь мы приводим это определение в частном случае ограниченной области Ω и для поля v с $\operatorname{div} v = 0$.

Справедлив следующий результат о существовании регулярного лагранжева потока (см. [9]).

Теорема 2. *Пусть $v \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega)^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\operatorname{div} v(t,x) = 0$ и $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП z, порожденный v.*

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем банаховы пространства

$$W_1(0,T) = \{v: \ v \in L_2(0,T;V) \cap C_w([0,T];H), R_S^{n\times n}), \ \ v' \in L_1(0,T;V^{-1})\},$$

$$W_2(0,T) = \{\sigma \in L_2(0,T;L_2(\Omega,R_S^{n\times n})) \cap C_w([0,T];W_2^{-1}(\Omega,R_S^{n\times n}))\}$$

с естественными нормами пересечений. Здесь через $C_w([0,T];W_2^{-1}(\Omega,R_S^{n\times n}))$ обозначаются пространства слабо непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в $W_2^{-1}(\Omega,R_S^{n\times n})$.

3.1. Слабые решения модели Джеффриса-Олдройда

Определение 3. Слабым решением задачи Z_1 называется пара функций (v,σ), $v \in W_1(0,T)$, $\sigma \in W_2(0,T)$, удовлетворяющая при п.в. t тождествам

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) + (\sigma,\nabla\varphi) - \sum_{i=1}^{n}(v_i v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) = \langle f,\varphi\rangle, \tag{11}$$

$$(\sigma,\Phi) + \lambda_1\frac{d}{dt}(\sigma,\Phi) - \lambda_1\sum_{i=1}^{n}(v_i\sigma, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}) = 2\eta(\mathcal{E}(v),\Phi) + 2\eta\lambda_2(\frac{d}{dt}(\mathcal{E}(v),\Phi) - \sum_{i=1}^{n}(v_i\mathcal{E}(v), \frac{\partial\Phi}{\partial x_i})) \tag{12}$$

для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^{n\times n}$ в смысле распределений на $(0,T)$, и условиям (4), (5).

В [4] установлена

Теорема 4. *Пусть $f \in L_1(0,T;V{-}1)$, $v^0 \in H$, а $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega,R_S^{n\times n})$. Пусть $\sigma^0 - 2\eta\lambda_2\lambda^{-1}\mathcal{E}(v^0) \in W_2^{-1}(\Omega,R_S^{n\times n})$. Тогда задача Z_1 имеет слабое решение (v,σ).*

3.2. Интегродифференциальная система с памятью

Определение 5. Пусть $f \in L_1(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$, а $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega,R_S^{n\times n})$. Пусть $\sigma^0 - 2\eta\lambda_2\lambda^{-1}\mathcal{E}(v^0) \in L_2^{-1}\Omega,R_S^{n\times n})$. Слабым решением задачи Z_2 называется пара функций (v,z), где $v \in W_1$, а z является РЛП, порожденным v, удовлетворяющая при п.в. t уравнению

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(v,\varphi) - \sum_{i=1}^{n}(v_i v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) + \\ \mu_1\int_0^t \exp\left((s-t)/\lambda\right)(\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)),\mathcal{E}(\varphi)(x))\,ds = \langle f_1,\varphi\rangle,\end{gathered} \tag{13}$$

и условию (9) для всех $\varphi \in V$ в смысле распределений на $(0,T)$.

Здесь $\mu_0 = 2\eta\lambda_2\lambda_1^{-1}$, $\mu_1 = \eta(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1^{-2}$.

В [10] установлена

Теорема 6. *Пусть* $f \in L_1(0,T;H)$, $v^0 \in H$, *а* $\sigma^0 \in W_2^{-1}(\Omega, R_S^{n\times n})$. *Пусть* $\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0) \in L_2^{-1}(\Omega, R_S^{n\times n})$. *Тогда задача* Z_2 *имеет слабое решение* (v, z).

4. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 4. Пусть пара* (v,σ) *является слабым решением задачи* Z_1. *Тогда пара* (v,z), *где* z *- РЛП, порожденный* v, *является слабым решением задачи* Z_2.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы 6. Пусть пара* (v,z) *является слабым решением задачи* Z_2. *Тогда пара* (v,σ), *где*

$$\begin{aligned}\sigma(t,x) = \mu_1 \int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds + \mu_0\mathcal{E}(v)(t,x) + \\ \exp(-t)/\lambda_1)(\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0)),\end{aligned} \tag{14}$$

является слабым решением задачи Z_2.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7

Пусть пара (v,σ) является решением слабым задачи Z_1. Тогда (v,σ), $v \in W_1(0,T)$, $\sigma \in W_2(0,T)$, и в силу теоремы 4 существует единственный РЛП z, порожденный v. Покажем, что пара (v,z) является слабым решением задачи Z_2. Для этого достаточно установить тождество (13) или, что то же, справедливость тождества

$$\begin{aligned}-\int\limits_0^T (v,\varphi)\varphi'(t)\,dt - \sum_{i=1}^n \int\limits_0^T (v_i v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i})\varphi(t)\,dt + \mu_0 \int\limits_0^T (\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi))\varphi(t)\,dt + \\ \mu_1 \int\limits_0^T \int_0^t \exp\left((s-t)/\lambda\right)(\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)),\mathcal{E}(\varphi)(x))\,ds\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^T \langle f_1,\varphi\rangle\varphi(t)\,dt\end{aligned} \tag{15}$$

для всех $\varphi \in V$ и $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, и выполнение условия (9).

Для доказательства тождества (15) нам понадобятся следующие факты.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}\bar\sigma(t,x) = \mu_1 \int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds + \\ \mu_0\mathcal{E}(v)(t,x) + \exp(-t/\lambda_1)(\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0))\end{aligned} \tag{16}$$

и покажем, что она удовлетворяет тождеству (12).

Представим $\bar\sigma$ в виде

$$\bar\sigma(t,x) = \mu_1 g_1(t,x) + \mu_0 g_2(t,x) + g_3(t,x), \tag{17}$$

где

$$g_1(t,x) = \int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds, \tag{18}$$

$$g_2(t,x) = \mathcal{E}(v)(t,x), \quad g_3(t,x) = \exp(-t/\lambda_1)(\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0)). \tag{19}$$

Для функций $g_i(t,x)$, $i = 1{,}2{,}3$ справедлива

Лемма 1. *Для функций $g_i(t,x)$, $i = 1{,}2{,}3$, определенных формулами (18)-(19), справедливо соотношения $g_i \in L_2(0{,}T; L_2(\Omega, R_S^{n\times n})$, а, следовательно и соотношение $\bar\sigma(t{,}x) \in L_2(0{,}T; L_2(\Omega, R_S^{n\times n})$.*

Доказательство. Из (18) следует, что

$$\|g(t{,}x)\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega,R_S^{n\times n})} = \int\limits_0^T \|\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds\|^2_{L_2(\Omega,R_S^{n\times n})}\,dt. \tag{20}$$

Пользуясь интегральным неравенством Минковского, имеем

$$\|g_1(t{,}x)\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega,R_S^{n\times n})} \leqslant M\int\limits_0^T\int\limits_0^t\int_\Omega |v_x(s,z(s;t,x))|^2\,dx\,ds\,dt. \tag{21}$$

Сделаем замену переменной $y = z(t;s{,}y)$. Так как якобиан матрицы $y = z_x(t;s{,}y)$ равен единице в силу $\mathrm{div} = 0$, то мы получаем, что

$$\int_\Omega |v_x(s,z(s;t,x))|^2\,dx = \int_\Omega |v_x(s{,}y)|^2\,dy = |v(s{,}\cdot)|_1^2. \tag{22}$$

Здесь через $|v_x|$ обозначена евклидова норма матрицы v_x. Из соотношений (20) и (22) тогда вытекает, что

$$\|g_1(t{,}x)\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega,R_S^{n\times n})} \leqslant M\int\limits_0^T\int\limits_0^t |v(s{,}\cdot)|_1^2\,ds\,dt \leqslant M\|v\|^2_{L_2(0,T;V)} \tag{23}$$

Отсюда следует, что $g_1 \in L_2(0{,}T; L_2(\Omega, R_S^{n\times n})$.

Доказательства аналогичных включений для g_1 и g_2 очевидны. Отсюда вытекает, что $\bar\sigma \in W_2(0{,}T)$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $v \in W_1(0{,}T)$, а z — РЛП, порожденный v. Тогда справедливо соотношение*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(g_1(t{,}x){,}\Phi(x)) = (v(t,x){,}\Phi(x)) + \lambda_1^{-1}\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds{,}\Phi(x)) - \\ \sum_{i=1}^n (v_i(t{,}x)\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds, \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}).\end{gathered} \tag{24}$$

для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^{n\times n}$ в смысле распределений на $(0,T)$.

Лемма 2 для случая гладкой функции v установлена в [11]. В нашем же случае ситуация сложнее, так как функция v принадлежит лишь Соболевскому пространству, а z является РЛП, а не классичеким решением задачи Коши.

Доказательство леммы 2. Сделав замену переменной $x = z(t;0,y)$ в интеграле по Ω (22) при фиксированных t и s, мы получим

$$
\begin{gathered}
(\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\Phi(x)) = \\
\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,(s;t,x)) : \Phi(x)\,dy\,ds = \\
\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;0,y)) : \Phi(z(t;0,y))\,dy\,ds.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Отсюда с помощью интегрирования по частям следует, что для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^n$ и для всех $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ справедливо соотношение

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^T(\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\Phi(x))\varphi'(t)\,dt = \\
-\int\limits_0^T\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;0,y)) : \Phi(z(t;0,y))\,dy\,ds\,dt\varphi'(t)\,dt = \\
\lambda_1^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;0,y)) : \Phi(z(t;0,y))\,dx\,ds\varphi(t)\,dt + \\
\int\limits_0^T\int_\Omega \mathcal{E}(v)(t,z(t;0,y)) : \Phi(z(t;0,y))\,dy\varphi(t)\,dt + \\
\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;0,y))\,ds : \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(z(t;0,y))\,dy\,\varphi(t)\,dt.
\end{gathered}
$$

Сделав в интегралах по Ω замену переменной $y = z(0;t,x)$, мы получаем, что справедливо соотношение

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^T(\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\Phi(x))\varphi'(t)\,dt = \\
\lambda_1^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)) : \Phi(x)\,dx\,ds\varphi(t)\,dt + \\
\int\limits_0^T\int_\Omega \mathcal{E}(v)(t,x) : \Phi(z(x))\,dx\varphi(t)\,dt + \\
\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_0^t \exp((s-t)\lambda_1^{-1})\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds : \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x)\,dx\,\varphi(t)\,dt.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

В силу произвольности φ тождество (26) означает справедливость соотношения (24).
Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функция $\sigma = \bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma}$, определенная формулой (16), удовлетворяет тождеству (12).*

Доказательство состоит в подстановке $\bar{\sigma}$ в (12) вместо σ с использованием леммы 2.
Покажем, что на деле $\bar{\sigma}$ совпадает с σ, определенной парой (v,σ).
Справедлива

Лемма 4. *Пусть пара (v,σ) являктся слабым решением задачи Z_1, а z — РЛП, порожденный v. Тогда функция σ, удовлетворяющая тождеству (12), определяется правой частью формулы (16).*

Доказательство леммы 4. Рассмотрим функцию $\bar{\sigma}$, определенную формулой (16). Из лемм 1, 2 и формулы (16) вытекает, что справедливо неравенство

$$\|\bar{\sigma}(t,x)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega,R_S^{n\times n})} \leqslant M(\|v\|_{L_2(0,T;V)} + |\sigma^0|_0 + |v^0|_1). \tag{27}$$

Сделаем в (12) замену

$$\bar{\tau} = \sigma - \bar{\sigma}. \tag{28}$$

Тогда, если σ удовлетворяет тождеству (12), то τ удовлетворяет тождеству

$$(\bar{\tau},\Phi) + \lambda_1 \frac{d}{dt}(\bar{\tau},\Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n}(v_i\bar{\tau}, \nabla\Phi) = 0 \tag{29}$$

для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, R_S^{n\times n})$ в смысле теории распределений на $(0,T)$, и выполняется начальное условие $\bar{\tau}(0,x) = 0$.

Сделаем в (29) замену

$$\tau = \exp(t/\lambda_1)\bar{\tau}. \tag{30}$$

Тогда, если σ удовлетворяет тождеству (29), то τ удовлетворяет тождеству

$$\frac{d}{dt}(\tau,\Phi) - \sum_{i=1}^{n}(v_i\tau, \nabla\Phi) = 0 \tag{31}$$

для всех $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, R_S^{n\times n})$ в смысле теории распределений на $(0,T)$, и $\tau(0,x) = 0$.

Это означает, что справедливо тождество

$$\int_0^T (\tau(t,x), \partial\Psi(t,x)/\partial t\, dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^T (v_i(t,x)\tau(t,x)\,, \partial\Psi(t,x)/\partial x_i)\, dt = 0, \tag{32}$$

где $\Psi(t,x) = \Phi(x) \times \psi(t)$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^n$, $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$.

где $\Psi(t,x) = \Phi(x) \times \varphi(t)$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^{n\times n}$, $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$.

Из обобщенной формулы Стокса ([3], с. 17) и условия $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$ следует, что в (32) в качестве пробных функций можно брать не только финитные функции $\Psi(t,x) = \Phi(x) \times \varphi(t)$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^{n\times n}$, $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, но и $\Psi \in C_0^\infty(Q_T, R_S^{n\times n})$. Тогда тождество (32) можно считать как определяющее слабое решение задачи Коши

$$\partial\tau(t,x)/\partial t + \sum_{i=1}^{n}\partial(v_i(t,x)\tau(t,x))/\partial x_i = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times R^n,\ \ \tau(0,x) = 0, x \in R^n. \tag{33}$$

В ([7], Sec. II) установлено, что единственным слабым решением задачи (33) является нулевое. Отсюда следует, что единственной функцией, удовлетворяющей тождеству (15) является $\tau = 0$. Из (28) тогда следует, что единственной функцией σ, удовлетворяющей тождеству (12), является σ, определенная правой частью формулы (14).

Лемма 4 доказана.

Подстановка σ, определенной правой частью формулы (14), в тождество (11) дает тождество (13).

Таким образом, пара (v,z) является слабым решением задачи (6)-(9).

Теорема 4 доказана.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8

Пусть пара (v,z) является решением задачи Z_2. Тогда $v \in W_1(0,T)$, а z единственный РЛП, порожденный v.

Рассмотрим функцию σ, определенную формулой (14). Покажем, что пара (v,σ) является решением задачи Z_1.

Для этого достаточно установить, что $\sigma \in W_2(0,T)$ и пара (v,σ) удовлетворяет тождествам (11) и (12).

Установим, что $\sigma \in W_2(0,T)$.

Лемма 5. *Для функции σ, определенной формулой (14), справедливо соотношение $\sigma \in W_2(0,T)$. Кроме того, функция σ удовлетворяет условию (5).*

Доказательство леммы 5. Покажем сначала, что $\sigma \in C_w([0,T]; W_2^{-1}(\Omega, R_S^{n\times n}))$. Для этого достаточно установить непрерывность функции

$$\gamma(t) = \langle \sigma(t,x), \Phi(x)\rangle,$$

где σ определяется формулой (14), по t при любой $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R_S^{n\times n})$.

Пусть сначала Φ является гладкой функцией. Тогда, опуская для простоты множитель с exp и полагая $\mu_0 = \mu_1 = 1$, имеем

$$\begin{gathered}\gamma(t) = \langle \sigma(t,x), \Phi(x)\rangle = \\ (\sigma(t,x), \Phi(x)) = (\int\limits_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)), \Phi(x))\, ds + (\mathcal{E}(v)(t,x), \Phi(x)) = \\ \int\limits_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)) : \Phi(x)\, dx\, ds + \int_\Omega \mathcal{E}(v)(t,x) : \Phi(x)\, dx + \\ \exp(-t/\lambda_1)(\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0), \Phi(x)) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \gamma_3(t).\end{gathered} \tag{34}$$

Делая замену переменной $x = z(t;0,y)$, имеем

$$\gamma_1(t) \equiv \int\limits_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, z(s;0,y)) : \Phi(z(t;0,y))\, dy\, ds. \tag{35}$$

Нетрудно видеть, что

$$\triangle\gamma_1(t) \equiv \gamma_1(t+\triangle t) - \gamma_1(t) = \int\limits_t^{t+\tau} \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s;0,y) : \Phi(z(t+\tau,0,y))\, dy\, ds +$$
$$\int\limits_0^t \int_\Omega (\mathcal{E}(v)(s,z(s;0,y))\, ds : (\Phi(z(t+\tau,0,y)) - \Phi(z(t;0,y)))\, dx = \gamma_{11}(t,\tau) + \gamma_{12}(t,\tau). \quad (36)$$

Оценим слагаемые γ_{1i}, $i = 1{,}2$. Делая замену переменной $y = z(0;t,x)$ и пользуясь неравенством Коши-Буняковского и ограниченностью $\Phi(x)$, имеем

$$|\gamma_{11}(t,\tau)| \leqslant M|\int\limits_t^{t+\tau} \int_\Omega |v_x(s,z(s;0,y))|\, dy\, ds|$$
$$\leqslant M|\int\limits_t^{t+\tau} \int_\Omega |v_x(s,x)|\, dx\, ds \leqslant M|\int\limits_t^{t+\tau} |v(s,x)|_1\, ds| \leqslant |\tau|^{1/2} M|\int\limits_t^{t+\tau} |v(s,x)|_1^2\, ds|^{1/2}. \quad (37)$$

Аналогично получаем

$$|\gamma_{12}(t,\tau) = |\int\limits_0^t \int_\Omega (\mathcal{E}(v(s,z(s;0,y)) : (\Phi(z(t+\tau,0,y)) - \Phi(z(t;0,y)))\, dy\, ds|$$
$$\leqslant M \int\limits_0^t \int_\Omega |v_x(s,z(s;0,y))||\Phi(z(t+\tau,0,y)) - \Phi(z(t;0,y))|\, dy\, ds. \quad (38)$$

Пользуясь гладкостью Φ, получаем, что

$$\Phi(z(t+\tau,0,y)) - \Phi(z(t;0,y)) = \tau \sum_{i=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(z(t+\xi\tau,0,y))\, d\xi \quad (39)$$

Отсюда следует, что

$$|\Phi(z(t+\tau,0,y)) - \Phi(z(t;0,y))| \leqslant M|\tau|. \quad (40)$$

Из соотношений (38)-(40) следует, что

$$|\gamma_{12}(t,\tau) \leqslant M\tau. \quad (41)$$

Из соотношений (37) и (41) вытекает неравенство

$$|\gamma_1(t,\tau) \leqslant M|\tau|^{1/2}. \quad (42)$$

Оценка

$$|\gamma_2(t,\tau) \leqslant M|\tau|^{1/2}. \quad (43)$$

устанавливается проще.

Непрерывность $\gamma_3(t)$ по переменной t очевидна.

Отсюда и из оценок (42)-(43) вытекает непрерывность $\gamma(t)$ по переменной t при гладкой Φ.

Установим непрерывность $\gamma(t)$ по переменной t при любой $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R_S^{n\times n})$.

Пусть последовательность гладких функций Φ_m, $m = 1,2,.....$ сходится к Φ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R_S^{n\times n})$ при $m \to +\infty$. Очевидно, что

$$\gamma(t) = \langle\sigma(t,x), \Phi(x)\rangle = \langle\sigma(t,x), \Phi(x) - \Phi_m(x)\rangle + \langle\sigma(t,x), \Phi_m(x)\rangle = \bar{\gamma}_1(t) + \bar{\gamma}^m(t). \tag{44}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1(t) \leqslant |\langle g_1(t,x), \Phi(x) - \Phi_m(x)\rangle| + |\langle g_2(t,x), \Phi(x) - \Phi_m(x)\rangle| + \\ |\langle g_3(t,x), \Phi(x) - \Phi_m(x)\rangle| = Z_1 + Z_2 + Z_3.\end{aligned} \tag{45}$$

Здесь $g_i(t,x)$ определяются формулами (18)-(19).

Делая замену переменной $y = z(0;t,x)$ и пользуясь неравенством Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{gathered}Z_1 \leqslant \int\limits_t^{t+\tau} |\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)|_0 |\Phi(x) - \Phi_m(x)|_0\, ds \leqslant \\ M\int\limits_0^t |v(s,x)|_1\, ds |\Phi - \Phi_m|_0 \leqslant M\|v\|_{L_2(0,T;V)} |\Phi - \Phi_m|_0.\end{gathered} \tag{46}$$

Для Z_2 имеем

$$\begin{aligned}Z_2 \leqslant M|\mathcal{E}(v)(t,x)|_{-1}|\Phi(x) - \Phi_m(x)|_1 \leqslant M|v(t,x)|_0|\Phi - \Phi_m|_1 \leqslant \\ M_1 \sup_t |v(t,x)|_0 |\Phi - \Phi_m|_1.\end{aligned} \tag{47}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $v(t,x) \in C_w([0,T];H)$ и, следовательно, $|v(t,x)|_0$ равномерно ограничена по t.

Для Z_3 имеем очевидное неравенство

$$Z_3 \leqslant M|\Phi(x) - \Phi_m(x)|_1 \leqslant M_2|\Phi(x) - \Phi_m(x)|_1, \tag{48}$$

где $M_2 > 0$ некоторая константа.

Из оценок (45)–(48) следует, что

$$|\bar{\gamma}_1(t)| \leqslant M_3|\Phi(x) - \Phi_m(x)|_1, \tag{49}$$

где $M_3 > 0$ некоторая константа.

Пусть $m_0 > 0$ таково, что при $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$|\gamma_1(t)| \leqslant \varepsilon. \tag{50}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ произвольное наперед заданное число.

Так как $\bar{\gamma}^m(t)$ является непрерывной в силу гладкости Φ_m функцией, то отсюда и из (50) легко следует непрерывность $\gamma(t)$. Мы показали, что $\sigma \in C_w([0,T];W_2^{-1}(\Omega, R_S^{n\times n}))$.

Отсюда и из леммы 1 следует, что $\sigma \in W_2(0,T)$.

Выполнение условия (5) проверяется подстановкой $t = 0$ в формулу (14).

Лемма 5 доказана.

Далее, в силу леммы 4 пара (v,σ) удовлетворяет тождеству (12).

Покажем, что она удовлетворяет тождеству (11).

Перепишем тождество (13) в виде

$$\frac{d}{dt}(v,\varphi) - \sum_{i=1}^{n}(v_i v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) + (\mu_0\mathcal{E}(v)+ \mu_1\int_0^t \exp\left((s-t)/\lambda\right)(\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x)) + \exp(-t)/\lambda_1)(\sigma^0 - \mu_0\mathcal{E}(v^0),\mathcal{E}(\varphi))\,ds = \langle f,\varphi\rangle, \tag{51}$$

Первый сомножитель в скалярном произведении в третьем слагаемом дает σ в силу формулы (14). Тем самым справедливость тождества (11) доказана. Это и доказывает теорему 7.

Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воротников, Д. А. Обзор результатов и открытых проблем по математическим моделям вязкоупругих сред типа Джеффриса / Д. А. Воротников, В. Г. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 30–45.

2. Звягин, В. Г. Эквивалентность слабой разрешимости начально-краевых задач для модели Джеффриса-Олдройда и одной интегродифференциальной системы с памятью / В. Г. Звягин, В. П. Орлов, А. С. Арсентьев // Известия вузов. Математика. — 2020. — № 6. — С. 79–85.

3. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1987.

4. Zvyagin, V. G. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. — Berlin-New York, 2008. — 230 p.

5. Zvyagin, V. G. Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory / V. G. Zvyagin, V. P. Orlov // Nonlinear Analysis: TMA. — 2018. — V. 172. — P. 79–98.

6. Orlov V. P. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V. P. Orlov, P. E. Sobolevskii // Differential Integral Equations. — 1991. — V. 4, iss. 1. — P. 103–115.

7. DiPerna, R. J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R. J. DiPerna, P. L. Lions Invent. Math. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.

8. Ambrosio, L. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields / L. Ambrosio // Invent. Math. — 2004. — V. 158. — P. 227–260.

9. Crippa, G. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow / G. Crippa, C. de Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 6, № 6. — P. 15–46.

10. Zvyagin, V. G. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity / V. G. Zvyagin, V. P. Orlov // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. — 2018. — V. 38, iss. 12. — P. 6327–6350.

11. Воротников, Д. А. О сходимости решений регуляризованной задачи для уравнений движения вязкоупругой среды Джеффриса к решениям исходной задачи / Д. А. Воротников, В. Г. Звягин // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, вып. 4. — С. 49–63.

REFERENCES

1. Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. The review of results and open problems on mathematical models of motion of viscoelastic media of Jeffrey's type. [Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. Obzor rezul'tatov i otkrytyx problem po matematicheskim modelyam vyazkouprugix sred tipa Dzheffrisa].

Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2009, no. 2, pp. 30–45.

2. Zvyagin V.G., Orlov V.P, Arsentiev A.S. Equivalence of weak solvability of initial-boundary value problems for the Jeffreys-Oldroyd and one integro-differential system with memory. [Zvyagin V.G., Orlov V.P., Arsent'ev A.S. Ekvivalentnost' slaboyj razreshimosti nachal'no-kraevyx zadach dlya modeli Dzheffrisa-Oldroyjda i odnoyj integrodifferencial'noyj sistemy s pamyat'yu]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2020, no. 6, pp. 79–85.

3. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and numerical analysis . [Temam R. Uravneniya Nav'e-Stoksa. Teoriya i chislennyyj analiz]. Moscow, Mir, 1987. 4. Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications (12), Walter de Gruyter,Berlin-New York, 2008, 230 p.

5. Zvyagin V.G., Orlov V.P. Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory, Nonlinear Analysis: TMA, 2018, vol. 172, pp. 79–98.

6. Orlov V.P., Sobolevskii P.E. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory. Differential Integral Equations, 1991, vol. 4, iss. 1, pp. 103–115.

7. DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, Invent. Math., 1989, vol. 98, pp. 511–547.

8. Ambrosio L. Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields, Invent. Math., 2004, vol. 158, pp. 227–260.

9. Crippa G., de Lellis C. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow, J. Reine Angew. Math., 2008, vol. 6, no. 6, pp. 15–46.

10. Zvyagin V.G., Orlov V.P. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity. Discrete and continuous dynamical systems, series A, 2018, vol. 38, iss. 12, pp. 6327–6350.

11. Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. On the convergence of solutions of regularized problem for motion equations of Jeffreys viscoelastic medium to solutions of the original problem. [Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. O sxodimosti resheniyj regulyarizovannoyj zadachi dlya uravneniyj dvizheniya vyazkouprugoyj sredy Dzheffrisa k resheniyam isxodnoyj zadachi]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika — Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 11, iss. 4, pp. 49–63.

Арсентьев Андрей Сергеевич, НИИ математики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: arsenyandre@gmail.com

Arsentiev Andrey Sergeevich, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: arsenyandre@gmail.com

Беломытцева Елена Геннадиевна, кафедра математической физики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: bell-lenochk@mail.ru

Belomyttseva Elena Gennadievna , кафедра математической физики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: bell-lenochk@mail.ru

Звягин Виктор Григорьевич, НИИ математики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvg_ vsu@mail.ru

Zvyagin Viktor Grigorievich, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvg_ vsu@mail.ru

Орлов Владимир Петрович, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: orlov_vp@mail.ru

Orlov Vladimir Petrovich, Department of Mathematical Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: orlov_vp@mail.ru