

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Е. А. Михин^{1,2}, А. А. Дробышев²

¹ — *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”;*

² — *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 05.01.2020 г.

Аннотация. Исследована динамика движения частиц вблизи поверхности прямоугольной мембраны, совершающей вынужденные колебания. В качестве внешнего воздействия на мембрану выступали нестационарные силы, приложенные к отдельным точкам мембраны. Края мембраны считались закрепленными, и учитывалась диссипация энергии. Движение частицы описывалось на основе законов классической механики Ньютона. Оно включало свободное падение и кратковременные неупругие удары о поверхность мембраны. Найдено аналитическое решение уравнения движения мембраны для случая синусоидальных внешних сил. Для произвольной временной зависимости внешних сил нахождение закона движения мембраны сведено к численному решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Произведено компьютерное моделирование нестационарных колебаний мембраны при действии на неё сил в двух и трёх точках. При совпадении частоты внешних сил с одной из собственных частот колебаний мембраны, на её поверхности происходит возбуждение стоячих волн. Для этого случая произведено компьютерное моделирование движения частиц, которые в начальный момент располагались в зоне одной из пучностей мембраны. Движение частиц происходило в направлении к узловым линиям, при достижении которых оно прекращалось. Показана возможность управления динамикой частиц, путём изменения положения пучностей на мембране за счёт вариации параметров силового воздействия.

Ключевые слова: нестационарные колебания, прямоугольная мембрана, периодические сосредоточенные силы, диссипация энергии, неупругий удар.

MODELING THE DYNAMICS OF PARTICLE MOTION ON THE SURFACE OF A RECTANGULAR MEMBRANE, MAKING FORCED OSCILLATIONS IN THE FIELD OF GRAVITY PERFORMING FORCED OSCILLATIONS

E. A. Mikhin, A. A. Drobyshev

Abstract. The dynamics of movement of particles near the surface of the rectangular membrane, which performs forced oscillations, has been studied. The external effect on the membrane was the non-stationary forces applied to the individual points of the membrane. The edges of the membrane were considered fixed, and energy dissipation was taken into account. The movement of the particle was described based on the laws of Newton's classical mechanics. It included free fall and short-term non-elastic impacts on the surface of the membrane. An analytical solution to the membrane motion equation for the case of sinusoidal external forces has been found. For an arbitrary time dependence of external forces, finding the law of membrane motion is reduced to a numerical solution of the ordinary second-order differential

equation. Computer simulation of non-stationary oscillations of membrane is performed at action of forces on it in two and three points. When frequency of external forces coincides with one of natural frequencies of membrane oscillations, standing waves are excited on its surface. For this case, a computer simulation of the movement of particles, which at the initial moment were located in the zone of one of the membrane beams, was carried out. The particles moved towards the nodal lines at which they stopped. Thus, the possibility of controlling the dynamics of particles is shown by changing the position of the beams on the membrane by varying the parameters of the force action.

Keywords: non-stationary oscillations, rectangular membrane, periodic concentrated forces, energy dissipation, non-elastic impact.

ВВЕДЕНИЕ

Характер движения частицы по поверхности колеблющейся мембраны сильно зависит от соотношения между действующими на неё силами. Помимо силы тяжести и упругой силы, возникающей при столкновении с поверхностью мембраны, на частицу действует аэродинамическая сила, обусловленная колебательным движением примыкающего к мембране слоя воздуха. В том случае, если сила тяжести оказывается существенно больше аэродинамической силы, частица стремится расположиться вблизи узловой линии, для которой характерна минимальная амплитуда колебаний образующих её точек. Таким образом, при наличии большого количества частиц на поверхности мембраны формируются так называемые фигуры Хладни [1, 2]. В противоположном предельном случае, частица под воздействием воздушных потоков стремится расположиться в одной из пучностей, с этим эффектом связаны инверсные фигуры Хладни [3, 4].

Исследование описанного выше процесса движения частицы является актуальным, так как оно открывает возможность для реализации целого ряда приложений. Изменяя положение узлов и пучностей мембраны можно управлять положением частицы на её поверхности. Такой способ управления движением может быть применен, в том числе к микро- и наноразмерным частицам, что имеет особенное значение в области проектирования биосенсоров [5] и молекулярной электроники [6]. Его можно также использовать для очищения поверхностей от различного рода загрязнений и формирования ансамблей частиц с заданной геометрией. Зависимость аэродинамической силы от размера и формы частицы может быть использована для разделения смеси порошков на отдельные фракции [7].

В настоящей работе построена математическая модель движения частицы по поверхности колеблющейся мембраны. Размеры частицы предполагались малыми по сравнению с характерной длиной волн, возникающих на поверхности мембраны, что при подборе достаточной массы частицы обеспечило малость аэродинамической силы.

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ НА МЕМБРАНУ

Пусть имеется прямоугольная мембрана, размеры которой в направлении координатных осей xi , рис. 1. Рассмотрим вынужденные поперечные колебания мембраны под нестационарным действием сосредоточенных сил, приложенных к точкам $\{x_j, y_j\}_{j=1..N}$, где N — общее количество сосредоточенных сил.

Волновое уравнение колебаний [8] может быть записано в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \eta \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) G_j(t), \quad (1)$$

где ρ представляет собой поверхностную плотность материала мембраны; u — отклонение мембраны от равновесного состояния в направлении вертикальной оси z ; T — сила натяжения

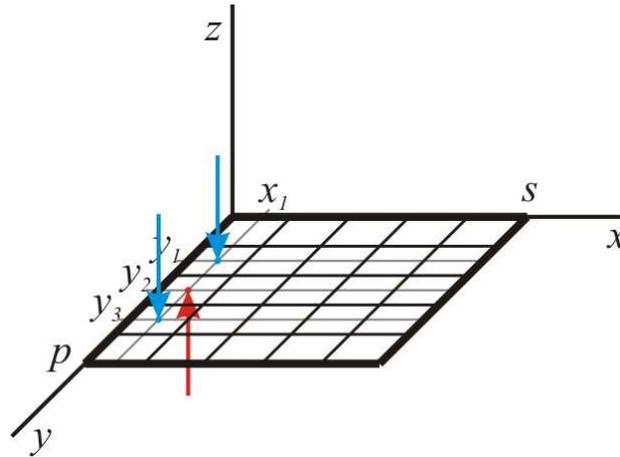


Рис. 1. Расположение мембраны в координатных осях.

мембраны, отнесённая к единице длины линии закрепления. В уравнении (1) учтена диссипация кинетической энергии колебаний путём введения дополнительной силы направленной против вертикальной составляющей скорости движения точек мембраны, её величина может варьироваться путём изменения коэффициента η . Сосредоточенные нагрузки заданы с помощью дельта-функции Дирака $\delta(x)$, временная зависимость сил заключена в множителе $G_j(t)$. Края мембраны считаются закреплёнными, а мембрана в начальный момент времени неподвижна в плоскости xOy .

Решение уравнения (1) может быть построено с использованием двойных рядов Фурье [9], позволяющих произвести в нём разделение переменных

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) T_{kn}(t). \quad (2)$$

Произведя аналогичное разложение для функции действия внешних сил

$$\sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) G_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) Y_n(y) g_{kn}(t) \quad (3)$$

и подставив (2) и (3) в (1) получим следующую систему уравнений для неизвестных функций

$$\begin{cases} X_k'' + \mu_k X_k = 0, \\ Y_n'' + \nu_n Y_n = 0, \\ T_{kn}'' + \gamma T_{kn}' + a^2 \lambda_{kn} T_{kn} = q g_{kn} \end{cases} \quad (4)$$

Штрихами в (4) обозначены производные функций по тем переменным от которых они зависят. Постоянные μ_k и ν_n могут быть определены из начальных и граничных условий. В (4) введены новые обозначения

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad q = \frac{1}{\rho}. \quad (5)$$

Первые два уравнения системы (4), с учётом начальных и граничных условий, налагаемых на мембрану допускают точные решения

$$\begin{cases} X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{s}\right), \\ Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right). \end{cases} \quad (6)$$

Для решения третьего уравнения системы (4) необходимо определить вид функции $g_{kn}(t)$, который может быть найден путём подстановки в (3) функций (6) и применения обратного преобразования Фурье

$$g_{kn}(t) = \frac{4}{sp} \int_0^s \int_0^p \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) G_j(t) \sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{p}\right) dx dy. \quad (7)$$

Интегрирование в (7) существенно упрощается из-за наличия дельта-функций, в результате получим

$$g_{kn}(t) = \frac{4}{sp} \sum_{j=1}^N G_j(t) \sin\left(\frac{\pi kx_j}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi ny_j}{p}\right), \quad (8)$$

с учётом (8) уравнение для функции $T_{kn}(t)$ принимает вид

$$T_{kn}'' + \gamma T_{kn}' + a^2 \lambda_{kn} T_{kn} = q \frac{4}{sp} \sum_{j=1}^N G_j(t) \sin\left(\frac{\pi kx_j}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi ny_j}{p}\right). \quad (9)$$

Решение (9) в общем случае может быть получено численными методами. Будем далее считать, что функция $G_j(t)$ изменяется в соответствии с гармоническим законом

$$G_j(t) = G_{0j} \sin(\omega t), \quad (10)$$

где G_{0j} — амплитудное значение силы j , а ω — циклическая частота, одинаковая для всех сил. Для этого частного случая может быть получено точное решение уравнения (9)

$$T_{kn}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) (C_{kn}^1 \sin(\omega_{kn}^t) + C_{kn}^2 \cos(\omega_{kn}^t)) + B_{kn}^1 \sin(\omega t) + B_{kn}^2 \cos(\omega t). \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) является решением уравнения (9) с исключенным неоднородным членом, расположенным справа от знака равенства. Это слагаемое экспоненциально убывает со временем и на больших временах не даёт значительного вклада. Последние два слагаемых в (11) являются следствием приложенных к мембране нестационарных сил, наличие этих слагаемых приводит к колебаниям мембраны на частоте вынуждающего воздействия ω . Ниже приведены значения всех констант входящих в (11)

$$C_{kn}^1 = \frac{Aq\omega(\gamma^2 - 2a^2\lambda_{kn} + 2\omega^2)}{z_{kn}\sqrt{4a^2\lambda_{kn} - \gamma^2}}, \quad C_{kn}^2 = \frac{Aq\gamma\omega}{z_{kn}}, \quad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2},$$

$$B_{kn}^1 = \frac{Aq(a^2\lambda_{kn} - \omega^2)}{z_{kn}}, \quad B_{kn}^2 = -C_{kn}^2, \quad z_{kn} = \gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - a^2\lambda_{kn})^2,$$

$$\omega_{kn} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2\lambda_{kn} - \gamma^2}, \quad A = \frac{4}{sp} \sum_{j=1}^N G_{0j} \sin\left(\frac{\pi kx_j}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi ny_j}{p}\right).$$

Таким образом, подстановкой (6) и (11) в (2) может быть получено решение исходного уравнения (1). При проведении численных расчетов количество слагаемых в суммах (2) ограничивается конечным числом, которое подбирается так, что их дальнейшее увеличение не приводит к существенному изменению получаемых результатов.

ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ МЕМБРАНЫ

Закон движения частицы по поверхности мембраны был получен на основе численного решения уравнений Ньютона

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t), \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{g} + \frac{1}{m}\mathbf{F}_r(t), \end{cases} \quad (12)$$

где m — масса частицы, а вектора $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ представляют собой радиус-вектор и скорость частицы соответственно. В начальный момент времени частица располагалась в одной из точек покоящейся мембраны и обладала нулевой скоростью. Вектор \mathbf{g} представляет собой ускорение свободного падения, а $\mathbf{F}_r(t)$ — силу действующую на частицу со стороны мембраны в моменты столкновения. Эта сила может быть представлена в виде суммы трёх слагаемых

$$\mathbf{F}_r(t) = \alpha d(t)\mathbf{n} - \beta \mathbf{v}_n(t) - \mu \alpha d(t)\boldsymbol{\tau}, \quad (13)$$

где члены справа от знака равенства в порядке их следования представляют собой: силу нормальной реакции, которая считается пропорциональной глубине d проникновения частицы внутрь эластичной мембраны с коэффициентом пропорциональности α ; силу сопротивления движению, направленную против нормальной к поверхности мембраны составляющей скорости частицы \mathbf{v}_n с коэффициентом сопротивления β ; силу трения скольжения частицы по поверхности мембраны с коэффициентом трения μ (\mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности в точке касания; $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор сонаправленный с проекцией скорости частицы на касательную плоскость).

Наличие сил сопротивления и трения скольжения является необходимым условием возможности направленного движения частицы по поверхности мембраны. В случае их отсутствия, при ударах частицы о поверхность мембраны её кинетическая энергия нарастает и может превысить некоторое критическое значение, что приведёт к реализации стохастического характера движения, подобного движению броуновской частицы. Для избежания этого коэффициенты β и μ должны быть подобраны соответствующим образом.

При численном моделировании динамики столкновения частицы с поверхностью мембраны временной шаг выбирался малым по сравнению с характерным периодом колебаний мембраны. Для каждой итерации рассчитывались значения функции $d(t)$, $\mathbf{v}_n(t)$ и $\mathbf{v}_\tau(t)$. Коэффициент α выбирался так, чтобы значения функции $d(t)$ оказывались малыми по сравнению с амплитудой колебаний точек мембраны для любого момента времени. Таким образом, в расчётах удалось учесть изменение наклона касательной плоскости в точке падения и её движение в вертикальном направлении за время удара.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При проведении расчётов были взяты следующие значения параметров, оказывающих влияние на рассматриваемый процесс: $s = p = 0.1$ м; $T = 25000$ Н/м; $\rho = 0.5$ кг/м²; $m = 0.001$ кг. При этом скорость распространения колебаний по поверхности мембраны оказалась равной $a = 223.6$ м/с. В табл. 1 представлены значения частот ω_{kn} при $k, n \leq 5$.

Всюду далее, за исключением особо оговоренного случая будем считать, что внешние силы приложены к точкам мембраны с координатами $(0.1s; 0.3p)$, $(0.1s; 0.5p)$, $(0.1s, 0.7p)$. На рис. 1 эти точки обозначены стрелочками. Эти координаты соответствуют вершинам пучностей мембраны при собственной частоте ω_{55} , которую мы выберем в качестве частоты внешних сил: $\omega = \omega_{55}$. Значения G_{0j} будем считать равными 5 Н, -5 Н, 5 Н для каждой точки соответственно. На рис. 2 представлен вид нескольких функций $T_{kn}(t)$ при разных значениях k и n (a), а также при разных значениях η и фиксированных k и n (б).

Таблица 1. Собственные частоты колебаний мембраны, $\eta = 1000 \text{ Н с/м}^3$.

$\omega_{kn}, \text{с}^{-1}$					
$k \setminus n$	1	2	3	4	5
1	9884.1	15676.1	22191.9	28946.8	35805.7
2	15676.1	19844.0	25308.6	31400.0	37816.6
3	22191.9	25308.6	29787.0	35109.8	40949.1
4	28946.8	31400.0	35109.8	39725.8	44969.6
5	35805.7	37816.6	40949.1	44969.6	49662.9

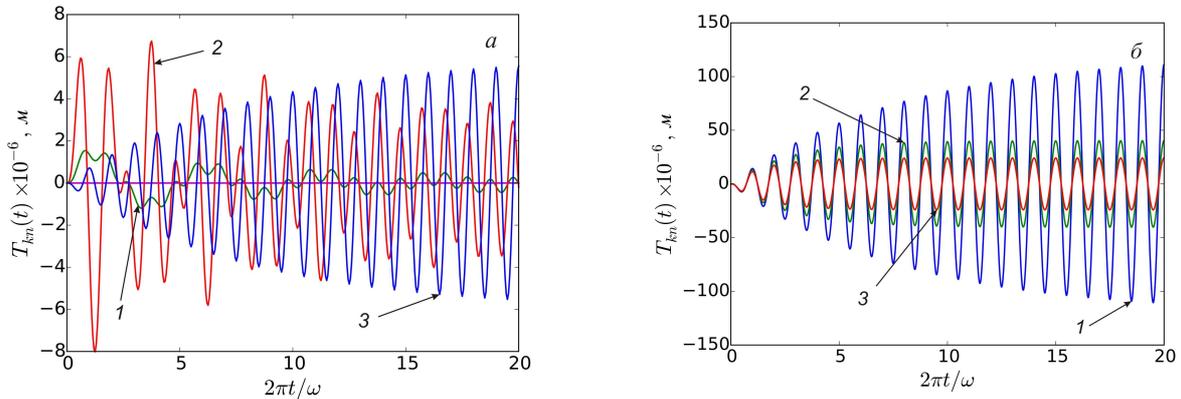


Рис. 2. Зависимость $T_{kn}(t)$: а – при $\eta = 1000 \text{ Н с/м}^3$ и значениях индексов $k = n = 1(1), k = n = 3(2), k = n = 5(3)$, для большей информативности рисунка значения уменьшены в 20 раз; б – при $k = n = 5$ и значениях коэффициента $\eta = 1000 \text{ Н с/м}^3(1), \eta = 3000 \text{ Н с/м}^3(2), \eta = 5000 \text{ Н с/м}^3(3)$.

Из анализа рис. 2а может быть сделан вывод о том, что из-за совпадения частоты внешних сил с собственной частотой ω_{55} происходит существенное подавление колебательных мод с другими частотами. На начальной стадии колебания имеют явно выраженный ангармонизм, а начиная с некоторого момента временная зависимость функции $u(x, y, t)$ оказывается близкой к гармоническому закону с частотой колебаний ω . Амплитуда колебаний постепенно нарастает, достигая своего предельного значения, которое растёт с уменьшением коэффициента η , рис. 2б. Для последующих расчётов будем считать, что $\eta = 1000 \text{ Н с/м}^3$, в этом случае амплитуда колебаний точек мембраны в вершинах пучностей оказывается порядка 0.1 мм.

Представленные на рис. 3 зависимости коэффициентов B_{kn}^1 и B_{kn}^2 от частоты ω показывают, что их значения оказываются существенными лишь в области частот близких к соответствующей собственной частоте ω_{kn} , являющейся по-сути резонансной частотой. При совпадении ω с ω_{kn} на поверхности мембраны происходит возбуждение стоячих волн с максимально возможной амплитудой. При этом положения вершин пучностей не изменяются. В противоположном случае эти вершины беспорядочно перемещаются по поверхности мембраны.

Из рис. 3 видно, что значение коэффициента B_{kn}^1 на частоте $\omega = \omega_{kn}$ оказывается равным нулю, в то время как значение коэффициента B_{kn}^2 достигает максимума. Однако, при небольшой отстройке от частоты ω_{kn} наблюдается обратная картина: B_{kn}^1 – достигает максимального значения, а значение B_{kn}^2 оказывается близким к нулю. В силу того, что в расчётах полагалось равенство сторон мембраны s и p , а также из-за симметрии силового воздействия на мембрану относительно оси параллельной оси Ox и проходящей через точку $(0.1s; 0.5p)$ значения коэффициентов B_{kn}^1 и B_{kn}^2 оказались равными нулю для четных k .

На рис. 4 представлены контурные графики усреднённых по периоду значений модуля

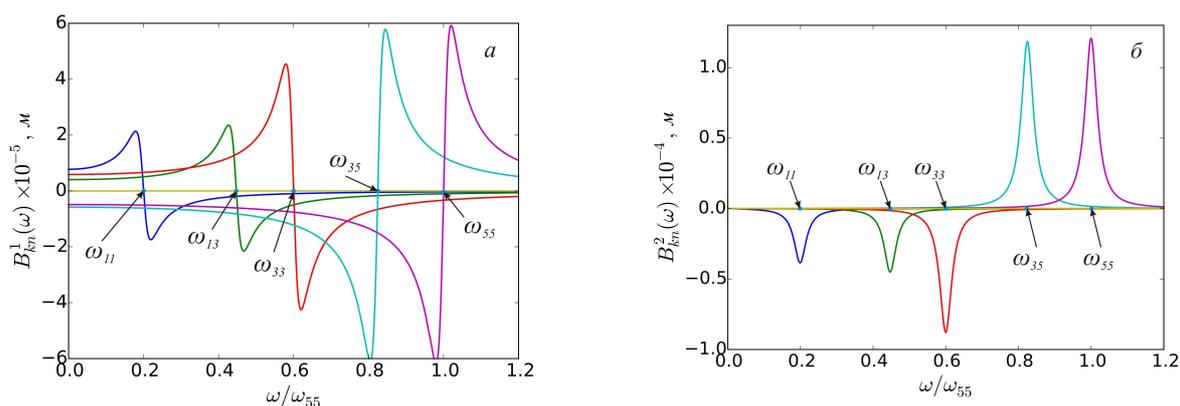
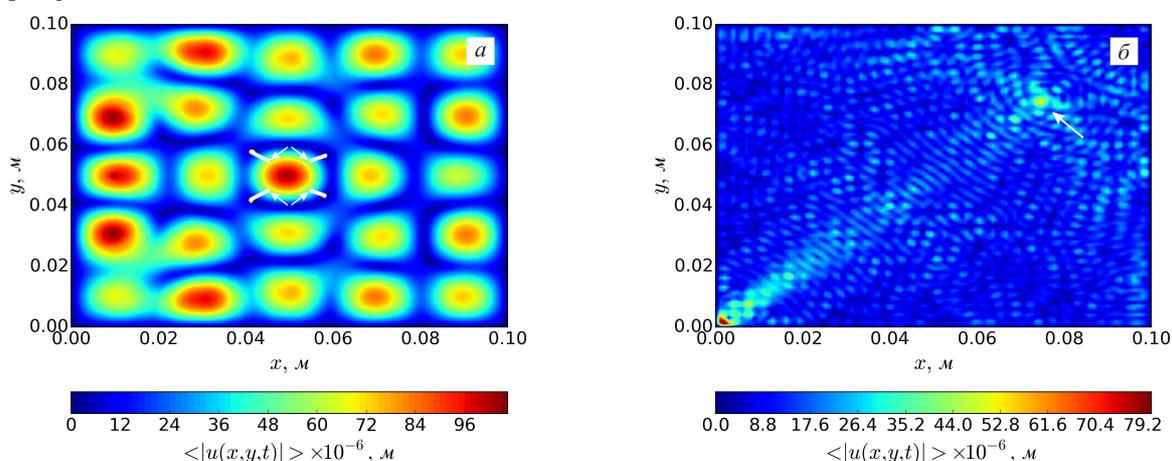


Рис. 3. Зависимость коэффициентов B_{kn}^1 (а) и B_{kn}^2 (б) от частоты ω . Индексы k и n коэффициентов совпадают с индексами собственных частот колебаний мембраны, представленных на рисунке.



с

Рис. 4. Усреднённые по периоду значения модуля функции $u(x,y,t)$: а — $\omega = \omega_{55} = 49662.9 \text{ c}^{-1}$, сосредоточенные силы приложены к точкам $(0.1s; 0.3p)$, $(0.1s; 0.5p)$, $(0.1s; 0.7p)$; б — $\omega = 280992.5 \text{ c}^{-1}$, сосредоточенные силы приложены к точкам $(0.025s; 0.025p)$ и $(0.075s; 0.075p)$.

функции $u(x,y,t)$. Рис. 4а построен для случая $\omega = \omega_{55}$, на нём видны пучности, расположенные в виде матрицы 5×5 с незначительными отклонениями от геометрически правильных положений. Эти отклонения связаны, прежде всего, с наличием действия внешних сил, а также с затуханием колебаний, что видно по уменьшению в среднем высот пучностей при рассмотрении рисунка слева направо. В центре рисунка имеется пучность с заметно выделяющейся амплитудой колебаний на фоне других ближайших к ней пучностей. Это обусловлено наличием конструктивной интерференции колебаний, распространяющихся из точек $(0.1s; 0.3p)$ и $(0.1s; 0.7p)$.

Расположив четыре частицы по разные стороны от вершины центральной пучности рис. 4а, в точках обозначенных стрелочками было произведено моделирование их динамики. Белыми линиями обозначены траектории частиц. Как видно, их движение происходит в направлении от максимума пучности к узловым линиям. Как только частицы достигают области с нулевой амплитудой колебаний их движение заканчивается. Таким образом, возможно управление движением частиц путём изменения положений пучностей на мембране, которое

может быть осуществлено за счёт надлежащего подбора вида функций $G_j(t)$. Разработка алгоритма подбора является нетривиальной задачей, и в данной статье не рассматривается. При увеличении частоты ω происходит уменьшение характерных размеров пучностей, рис. 4б. Благодаря этому оказывается возможным более точное позиционирование частицы на поверхности мембраны. В результате интерференции волн могут быть получены отдельные пучности значительной амплитуды, что отмечено на рис. 4б стрелочкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы решена задача определения закона движения мембраны находящейся под действием периодических сосредоточенных сил, учтено наличие затухания колебаний. Получено аналитическое решение волнового уравнения для случая синусоидальной временной зависимости действующих сил. Для этого же случая произведено компьютерное моделирование колебаний с двумя и тремя действующими на неё силами. Построена математическая модель позволяющая рассчитывать динамику движения частицы по поверхности мембраны. Произведено численное моделирование движения частицы, показана возможность управления её положением путём изменения положений пучностей на поверхности мембраны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Exploring the resonant vibration of thin plates: Reconstruction of Chladni patterns and determination of resonant wave numbers / P. H. Tuan et. al. // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2015. — V. 137. — P. 2113.
2. Trejo-Mandujano, H. A. Alternate model of Chladni figures for the circular homogenous thin plate case with open boundaries / H. A. Trejo-Mandujano, G. Mijares-Bernal, E. G. Ordoñez-Casanova // Journal of Physics: Conference Series. — 2015. — V. 582. — P. 012022.
3. Junjun, L. Formation of inverse Chladni patterns in liquids at microscale: roles of acoustic radiation and streaming-induced drag forces / L. Junjun // Microfluid Nanofluid. — 2017. — V. 21:50.
4. Inversion of Chladni patterns by tuning the vibrational acceleration/ Henk Jan van Gerner, Martin A. van der Hoef, Devaraj van der Meer, Ko van der Weele // Phys. Rev. E. — 2010. — V. 82. — P. 012301.
5. Wilson, M. S. Electrochemical Multianalyte Immunoassays Using an Array-Based Sensor / M. S. Wilson, W. Nie // Anal. Chem. — 2006. — V. 78. — P. 2507.
6. Mathew, P. T. Advances in Molecular Electronics: A Brief Review / P. T. Mathew, F. Fang // Engineering. — 2018. — V. 4. — P. 760.
7. Номоев, А. В. Разделение наночастиц диоксида кремния по размерам методом фигур Хладни / А. В. Номоев, Н. А. Романов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. — 2012. — № 8 (43). — С. 21.
8. Янютин, Е. Г. Нестационарные колебания мембраны с присоединёнными массами / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вестник ХНАДУ. — 2012. — № 56. — С. 75.
9. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики: монография / И. Г. Араманович. — М. : Наука, 1969. — 288 с.

REFERENCES

1. Tuan P.H., Wen C.P., Chiang P.Y., Yu Y.T., Liang H.C., Huang K.F., Chen Y.F. Exploring the resonant vibration of thin plates: Reconstruction of Chladni patterns and determination of resonant wave numbers. The Journal of the Acoustical Society of America, 2015, vol. 137, pp. 2113.
2. Trejo-Mandujano H.A., Mijares-Bernal G., Ordoñez-Casanova E.G. Alternate model of Chladni figures for the circular homogenous thin plate case with open boundaries. Journal of

Physics: Conference Series, 2015, vol. 582, p. 012022.

3. Junjun L. Formation of inverse Chladni patterns in liquids at microscale: roles of acoustic radiation and streaming-induced drag forces. *Microfluid Nanofluid*, 2017, vol. 21:50.

4. Henk Jan van Gerner, Martin A. van der Hoef, Devaraj van der Meer, Ko van der Weele Inversion of Chladni patterns by tuning the vibrational acceleration. *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 82, p. 012301.

5. Wilson M.S., Nie W. Electrochemical Multianalyte Immunoassays Using an Array-Based Sensor. *Anal. Chem.*, 2006, vol. 78, p. 2507.

6. Mathew P.T., Fang F. Advances in Molecular Electronics: A Brief Review. *Engineering*, 2018, vol. 4, p. 760.

7. Nomoyev A.V., Romanov N.A. Separation of silicon dioxide nanoparticles by size by the method of Chladni figures. [Nomoev A.V., Romanov N.A. Razdelenie nanochastich dioksida kremniya po razmeram metodom figur Xladni]. *Aktual'nye problemy gumanitarnyx i estestvennyx nauk — Topical problems of humanities and natural sciences*, 2012, no. 8 (43), p. 21.

8. Janutin E.G., Egorov P.A. Non-stationary fluctuations of membrane with attached masses. [Yanyutin E.G., Egorov P.A. Nestacionarnye kolebaniya membrany s prisoedinyonnymi massami]. *Vestnik XNADU — Bulletin Kharkov National Automobile and Highway University*, 2012, no. 56, p. 75.

9. Aramanovich I.G. Equations of mathematical physics: monograph. [Aramanovich I.G. Uravneniya matematicheskoy fiziki: monografiya]. Moscow, 1969, 288 p.

*Михин Евгений Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инноватики и строительной физики Воронежского государственного технического университета, доцент кафедры № 122, Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, г. Воронеж, Россия
E-mail: mihinzheny@mail.ru
Тел.: +7(473)246-77-18*

*Mikhin Evgeny Aleksandrovich, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of department of Innovation and Construction Physics, Voronezh State Technical University, Associate Professor of department № 122, Military Scientific Educational Center of Military-Air Forces “N. E. Zhukovsky and Ju. A. Gagarin Military-Air Academy”, Voronezh, Russia
E-mail: mihinzheny@mail.ru
Tel.: +7(473)246-77-18*

*Дробышев Алексей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инноватики и строительной физики Воронежского государственного технического университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: aleksejtf@rambler.ru
Тел.: +7(473)246-77-18*

*Drobyshev Alexey Aleksandrovich, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of department of Innovation and Construction Physics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: aleksejtf@rambler.ru
Tel.: +7(473)246-77-18*